UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

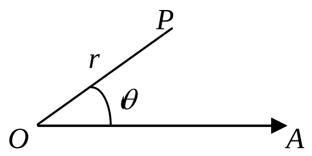
APLICAÇÕES DA INTEGRAL

1.1 – Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas que conhecemos para identificar pontos no plano é o *sistema de coordenadas retangulares*. Existe outro sistema de coordenadas que pode ser usado neste sentido: "*O sistema de coordenadas polares*". A seguir, veremos como construir e como identificar pontos neste sistema.

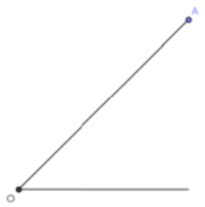
Considere um plano e sobre ele escolha um ponto fixo *O*, chamado de *origem* ou *polo* do sistema. A partir do ponto *O*, em qualquer direção, trace uma semirreta, normalmente traçada horizontalmente, que será chamada de *eixo polar*.

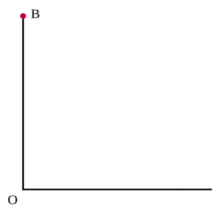
Seja P um ponto qualquer do plano, distinto de *O*. Seja θ o ângulo, em radianos, orientado *AOP*. Se $r = \left|\overline{OP}\right|$, então os números reais r e θ serão as coordenadas polares do ponto *P* que serão representadas pelo par ordenado (r, θ).

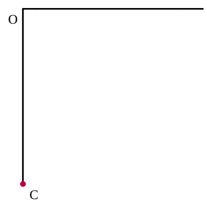


Exemplos: Identificar os pontos no plano polar.

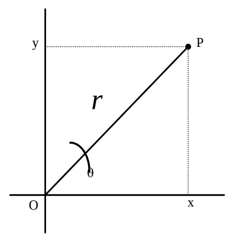
a) $A = (4, \frac{\pi}{4})$ b) $B = (5, \frac{\pi}{2})$ c) $C = (-3, \frac{\pi}{2})$







Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer no sistema cartesiano e $P(r,\theta)$ esse mesmo ponto no sistema polar. Poderíamos, então, perguntar se existe alguma relação entre as coordenadas cartesianas de *P* e suas coordenadas polares? A resposta é afirmativa. Para mostrarmos isto, considere o sistema de coordenadas cartesianas (retangulares), fazendo a origem do plano polar coincidir com a origem do plano cartesiano e o eixo polar coincidir com o eixo dos *x*. Suponha que $r > 0$. Observe que o triângulo xOP é retângulo, e, portanto temos:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta \text{ e } sen\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r sen\theta.$$

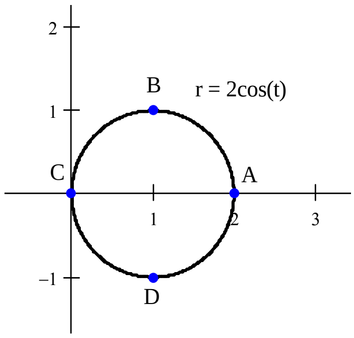
Note que $x^2 + y^2 = r^2$ e que $tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = (tg\theta)x$. Conhecidas as coordenadas cartesianas de *P* podemos encontrar as suas coordenadas polares e vice-versa.

Exemplos: Esboce os gráficos.

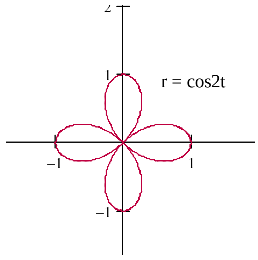
a) $r = 2\cos\theta$ b) $r = \cos 2\theta$ c) $r = 2(1 + \cos\theta)$

d) $\theta = \frac{\pi}{4}$ e) $r = 4$

Solução: a) Vamos esboçar o gráfico de $r = 2\cos\theta$. Quando $\theta = 0$, teremos $r = 2$. A curva passa pelo ponto A(2, 0). Da mesma forma temos que a curva passa pelos pontos: $B\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $C(0, \pi/2)$, $D\left(-\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$, $E(-2, \pi)$, $F\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$, $G(0, 3\pi/2)$, H $\left(\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$ e I$(2, 2\pi)$. O gráfico da curva será:



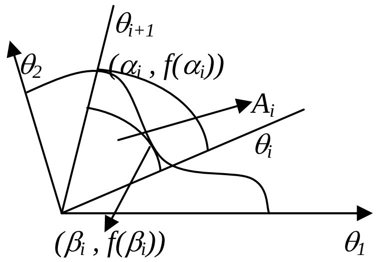
b) Vamos esboçar o gráfico de $r = \cos 2\theta$. Quando $\theta = 0$, teremos $r = 1$. A curva passa pelo ponto A(1, 0). A curva também passa pelos pontos: $B(0, \pi/4)$, $C(-1, \pi/2)$, $D(0, 3\pi/4)$, $E(1, \pi)$, $F(0, 5\pi/4)$, $G(-, 3\pi/2)$, H$(0, 7\pi/4)$ e I$(1, 2\pi)$. O gráfico da curva está ao lado.



1.2 – Área em coordenadas polares

Seja $r = f(\theta)$ uma função contínua e definida no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$. Admita que $f(\theta) \geq 0$ e que $\theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$. Vamos determinar a área limitada pelas retas θ_1 e θ_2 e pela curva $r = f(\theta)$.

Subdivida o intervalo $[\theta_1,\theta_2]$ em subintervalos $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Sejam α_i e β_i os pontos de máximo e de mínimo de f em cada intervalo $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, respectivamente. Note que a área A_i, limitada pelas retas θ_1 e θ_2 e pela curva $r = f(\theta)$ está compreendida entre as áreas dos setores circulares de raios $f(\alpha_i)$ e $f(\beta_i)$, ou seja:



$$\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2\pi}\cdot \pi f(\beta_i)^2 \leq A_i \leq \frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2\pi}\cdot \pi f(\alpha_i)^2$$

Somando estas áreas, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot f(\beta_i)^2(\theta_{i+1}-\theta_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\cdot f(\alpha_i)^2(\theta_{i+1}-\theta_i)$$

Passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tfrac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

Exemplos: 1) Calcule a área limitada pelas curvas:

a) $r = \cos 2\theta$ b) $r = 2(1 + \cos\theta)$

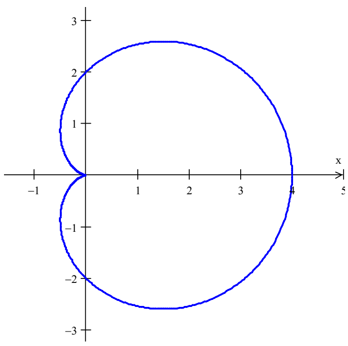
Solução: a) O esboço da curva está no exemplo anterior. Podemos ver que a área procurada é oito vezes a área da metade de uma pétala. Então:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 4\theta\right)d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{sen\,4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}.$$

Portanto a área procurada é: $A = 8 \times \dfrac{\pi}{16} = \dfrac{\pi}{2}$ unidades de área.

b) A área da região limitada pelo cardióide será dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[2(1+\cos\theta)\right]^2 d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)d\theta =$$



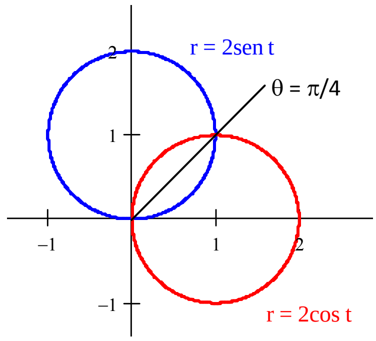
$$= 2\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}(3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta)d\theta =$$

$$= \left[3\theta + 4sen\,\theta + \frac{sen 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi \text{ unidades de área.}$$

2) Calcule a área entre as curvas $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\,sen\,\theta$.

Solução: Vamos inicialmente determinar a interseção entre as curvas:

$$2a\cos\theta = 2a sen\,\theta \Rightarrow \cos\theta = sen\,\theta \Rightarrow \theta = \pi/4.$$



Assim, a área entre as curvas dadas será dada por:

$$A = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2sen\,\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4sen^2\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(1-\cos 2\theta)d\theta = [2\theta - sen 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\times\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,\text{u.a.}$$

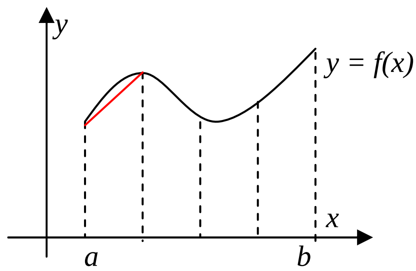
3) Calcule a área interior ao círculo $r = 6\cos\theta$ e exterior ao cardióide $r = 2(1+\cos\theta)$

4) Calcule a área interior ao círculo $r = 4$ e exterior ao cardióide $r = 4(1-\cos\theta)$.

1.3 – Comprimento de Curvas

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em $[a, b]$, com f' contínua. Vamos determinar o comprimento da curva $y = f(x)$ no intervalo dado. A ideia é aproximar a curva por segmentos de reta e somar os comprimentos desses segmentos.

Para isto, subdivida o intervalo $[a, b]$ em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Em cada subintervalo da subdivisão, escolha um ponto, digamos x_i, e considere o ponto sobre a curva $(x_i, f(x_i))$. Temos que o comprimento de cada segmento de reta que liga os pontos $(x_i, f(x_i))$ e $(x_i, f(x_i))$ é dado por



$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \qquad (7)$$

Do Teorema do Valor Médio, temos que:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)\cdot(x_{i+1}-x_i), \quad c_i \in (x_{i+1} - x_i)$$

Substituindo em (7), obtemos:

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + f'(c_i)(x_{i+1}-x_i)^2} = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2(1+f'(c_i)^2)}$$
$$= \sqrt{(1+f'(c_i)^2)}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Somando estes comprimentos, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(1+f'(c_i)^2)}\,(x_{i+1}-x_i)$$

Se tomarmos $g(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$, temos a soma de Riemann da função g e passando o limite quando n $\to \infty$, podemos definir, quando este limite existir, o comprimento da curva C, $y = f(x)$, como sendo

$$C = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Suponhamos que a curva seja dada na sua forma paramétrica $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in [a, b]$, f e g deriváveis, com derivadas contínuas. Repetindo o mesmo raciocínio anterior, obteremos que o comprimento C da curva será dado por

$$C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt$$

Observação: Sejam $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$ funções deriváveis e $t = t(x)$ a função inversa de $x = x(t)$. Então

$$y = y(t(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(t).t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

pois $\dfrac{dt}{dx} = t'(x) = \dfrac{1}{x'(t)} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x'(t)}dx$. Logo

$$C = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Suponhamos que a curva seja dada na forma polar, isto é, em coordenadas polares $r = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, com f' contínua. Sabemos que

$$\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r sen\,\theta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta) sen\,\theta \end{matrix}$$

Assim, $x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\theta$ e $y'(\theta) = f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\theta$. Logo,

$$x'(\theta)^2 = f'(\theta)^2\cos^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\cos\theta sen\theta + f(\theta)^2 sen^2\theta$$

$$y'(\theta)^2 = f'(\theta)^2 sen^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\cos\theta sen\theta + f(\theta)^2\cos^2\theta$$

e

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = f'(\theta)^2 + f(\theta)^2.$$

Portanto, o comprimento C da curva $r = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, será dado por

$$C = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\,d\theta$$

Exemplo: 1) Calcule o comprimento das curvas abaixo:

a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2},\ 0 \le x \le 3$ b) $r = \dfrac{2}{\cos\theta},\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

c) $x(t) = e^t \cos t,\ y(t) = e^t\, sen\, t,\ 1 \le t \le 2$

Solução: a) O comprimento C da curva dada será dado por:

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Temos que:

$$y = f(x) = \tfrac{1}{3}(x^2+2)^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{3}{2}(x^2+2)^{1/2}\times 2x \Rightarrow f'(x) = x\sqrt{x^2+2} \Rightarrow (f'(x))^2 = x^2(x^2+2).$$

Logo,

$$C = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)}\,dx = \int_0^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_0^3 = 12 \text{ u.c.}$$

b) O comprimento C da curva dada será dado por:

$$C = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\,d\theta.$$

Temos que:

$$r = f(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} \Rightarrow f'(\theta) = \frac{2sen\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow r = \left(f(\theta)\right)^2 + \left(f'(\theta)\right)^2 = \frac{4}{\cos^2\theta} + \frac{4sen^2\theta}{\cos^4\theta} = \frac{4}{\cos^4\theta}.$$

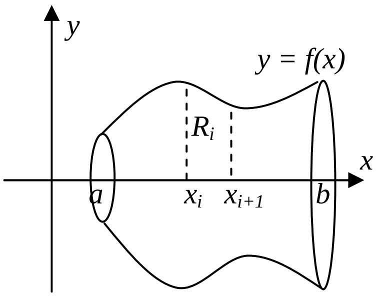
Logo,

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{4}{\cos^4\theta}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2\theta\, d\theta = \left(2tg\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\text{ u.c.}$$

1.9 – Volumes de Revolução

Quando giramos uma região plana em torno de uma reta, obtemos um sólido, chamado *sólido de revolução*. A reta em torno da qual a região gira é chamada de *eixo de revolução ou eixo de rotação*. Por exemplo, quando giramos a região do plano limitada pelas retas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$, em torno do eixo dos x, obtemos um sólido de revolução chamado de *cone*. Se girarmos o retângulo limitado pelas retas $y = 3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$, em torno do eixo OY, obteremos um sólido de revolução, chamado de *cilindro*.

Consideremos o seguinte problema: Seja R uma região do plano limitada pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Vamos calcular o volume V do sólido de revolução S, obtido pela rotação de R, em torno do eixo OX.



Suponhamos que f seja uma função contínua e não negativa ($f \geq 0$) em $[a, b]$. Considere uma subdivisão do intervalo $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

Sejam $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ o comprimento de cada intervalo $[x_i\,,\, x_{i+1}]$, R_i o retângulo de base Δx_i, cuja altura é $f(c_i)$, onde c_i é um ponto qualquer do intervalo $[x_i\,,\, x_{i+1}]$. Quando giramos o retângulo R_i, em torno do eixo OX, obtemos um cilindro cujo volume é

$$\pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

A soma dos volumes desses cilindros,

$$\sum_{i=0}^{n} \pi[f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

nos dá uma aproximação do volume do sólido S. Passando o limite quando n $\to \infty$, podemos, se este limite existir, definir o volume V do sólido S, como sendo

$$V = \int_a^b \pi\, f(x)^2 dx\,.$$

Observações: 1) Suponha que a região R é limitada pelos gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Admita que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Então o volume do sólido S obtido pela rotação de R em torno do eixo OX é

$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx$$

2) Se, ao invés de girarmos em torno do eixo OX, girarmos em torno do eixo OY, teremos, neste caso, que o volume do sólido S será

$$V = \int_c^d \pi g(y)^2\, dy$$

3) Suponhamos que a rotação seja feita em torno de uma reta paralela ao eixo OX, de equação $y = L$. Neste caso, o volume do sólido S obtido será

$$V = \int_a^b \pi[f(x) - L]^2\, dx$$

4) Suponhamos que a rotação seja feita em torno de uma reta paralela ao eixo *OY*, de equação $x = M$. Neste caso, o volume do sólido *S* obtido será

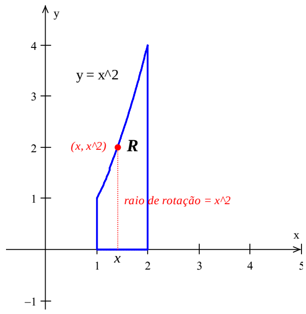
$$V = \int_c^d \pi[g(y) - M]^2 \, dy$$

Exemplos: 1) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo *OX*, da região limitada pela curva $y = x^2$ e pelas retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

Solução: O volume do sólido obtido pela rotação **R** em torno do eixo *OX*, é dado por:

$$V = \int_a^b \pi\, f(x)^2 dx\,.$$

Observe que neste caso o raio de rotação é x^2, conforme mostra figura ao lado. Então



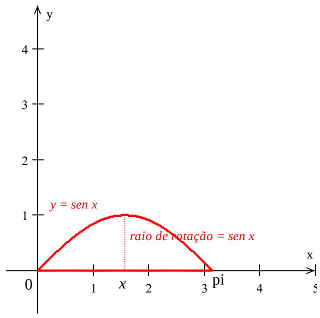
$$V = \int_1^2 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}\right) = \frac{31}{5}\pi\, u.v.$$

2) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo *OX*, da região limitada pela curva $y = sen\, x$ e pelas retas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 0$.

Solução: O volume do sólido obtido pela rotação **R** em torno do eixo *OX*, é dado por:

$$V = \int_a^b \pi\, f(x)^2 dx\,.$$

Observe que neste caso o raio de rotação é $(sen\, x)^2$, conforme mostra figura ao lado. Então



$$V = \int_0^\pi \pi(sen x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)dx = \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{sen\, 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2 u.v.$$

3) Determine o volume do sólido *S* gerado pela rotação da região *R*, em torno do eixo *OX*, onde *R* é limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Solução:

4) Encontre o volume do sólido *S* obtido pela rotação da região *R*, em torno do eixo *OY*, limitada pelas curvas $y^2 = 4x$ e $x = 4$.

5) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 0$ e $x = 4$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno da reta $y = -2$.

6) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 0$ e $x = 4$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno da reta $x = -2$.

7) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y = x^3$ e pelas retas $y = 8$ e $x = 0$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno do eixo *OX*.

8) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y = x^2 - 4x$ e pela reta $y = 0$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno do eixo *OX*.

9) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y^2 = x$ e $2y = x$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno do eixo *OY*.

10) Seja *R* a região do plano limitada pela curva $y = x^2$ e pela reta $y = 4$. Calcule o volume do sólido *S* obtido pela rotação de *R* em torno de: a) $y = 4$; b) $y = 5$; c) $x = 2$.

11) Calcule o volume de um cone de altura *H* e raio R.

12) Calcule o volume de uma esfera de raio R.