UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA
1ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2013.2

Os exercícios 01 → 28 trazem um espaço vetorial V e um seu subconjunto W.
Sempre que W for um subespaço de V, use a definição de subespaço para provar este fato. Caso contrário, elabore um exemplo que justifique sua conclusão.

01. $V = \mathbb{R}^2$ e W o conjunto de todos os pontos do primeiro quadrante.
02. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y)/xy = 0\}$.
03. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y)/y = mx,\ m \in \mathbb{R}\}$.
04. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y)/x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.
05. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$.
06. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y)/x = 3y\}$.
07. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z)/x = y = z\}$.
08. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z)/ x \leq y \leq z\}$.
09. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z)/z \text{ é inteiro}\}$.
10. $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x, y, z, t)/z = x + 2y \text{ e } t = x - 3y\}$.
11. $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \{v \in V / Av = O,\ A \text{ uma matriz } m \times n \text{ e } O \text{ a matriz nula } m \times 1\}$.
(Observe que W, neste caso chamado de ***núcleo*** ou ***espaço nulo*** da matriz A, é o conjunto de todas as soluções de um sistema linear homogêneo).
12. $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \{v \in V / Av = b,\ A \text{ uma matriz } m \times n \text{ e } b \text{ uma matriz } m \times 1\}$.
13. $V = M_{2\times 2}$ e $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}/a = c,\ b + d = 0\}$.
14. $V = M_{2\times 2}$ e $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}/a + d \leq b + c\}$.
15. $V = M_{2\times 2}$ e $W = \{ A/\ AT = TA,\ T \text{ uma matriz fixada em } V\}$.
16. $V = M_{2\times 2}$ e W o conjunto das matrizes simétricas.
17. $V = M_{2\times 2}$ e W o conjunto das matrizes anti-simétricas.
18. $V = M_{2\times 3}$ *e* $W = \{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}/b = a + c\}$.
19. $V = M_{n\times n}$ e W o conjunto das matrizes diagonais.
20. $V = M_{n\times n}$ e $W = \{ A \in V /\ detA = det(A + I),\ I \text{ a matriz identidade } n\times n \}$.
21. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(x)/\ p(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}\}$.
22. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c/a + b = c\}$.
23. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2(x)/p(x)$ é divisível por um polinômio $q(x) \neq 0\}$.
24. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x)/\ p(0) = 2p(1)\}$
25. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x)/p(x) + p'(x) = 0\}$
26. $V = \mathbb{P}_2(x)$ e $W = \{p(x)/grau[p(x) + x^2] \leq 1\} \cup \{o(x)\}$, $o(x)$ o polinômio nulo.
27. $V = \mathbb{P}_3(x)$ e $W = \mathbb{P}_2(x)$.
28. $V = \mathbb{P}_4(x)$ e W o conjunto formado pelos polinômios de V que possuem grau par.
29. Se considerarmos o conjunto $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial, quais são seus subespaços?
30. Vamos denotar por $\mathbb{F}(\Omega)$ a coleção de todas as funções reais de uma variável real que possuem o conjunto Ω como domínio. Se f e g pertencem a $\mathbb{F}(\Omega)$ e λ é um escalar real,

definimos $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ e, assim, podemos verificar que $\mathbb{F}(\Omega)$ é um espaço vetorial. Considerando-se o caso especial em que $\Omega = (-\infty, +\infty)$, quais dos conjuntos abaixo são subespaços de $\mathbb{F}(\Omega)$?

a) Todas as funções constantes.

b) Todas as funções f, tais que $f(0) = 1$.

c) Todas as funções diferenciáveis.

d) Todas as funções pares.

e) Todas as funções ímpares.

f) Todas as funções f, tais que $f(x) = f(1-x)$.

31. Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa.

a) Um subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço, se o vetor nulo de V pertencer a W.

b) Um espaço vetorial também é um subespaço.

c) Um vetor é qualquer elemento de um espaço vetorial.

d) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

e) Um subespaço também é um espaço vetorial.

32. Em relação ao sistema de equações ao lado, pede-se:

$$\begin{cases} a - 3b - 3c = 0 \\ -2a + 4b + 2c = 0 \\ -a + 5b + 7c = 0 \end{cases}$$

a) Verificar que $a = 3$, $b = 2$ e $c = -1$ é uma solução.

b) Sem fazer uma nova verificação, explicar porque $a = 30$, $b = 20$ e $c = -10$ é outra solução.

33. Sejam W_1, W_2 e W_3 os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$W_1 = \{(x,y,z)/x = z\}$, $W_2 = \{(x,y,z)/x = y = 0\}$ e $W_3 = \{(x,y,z)/x + y + z = 0\}$.

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$?

Em algum dos casos a soma é direta?

34. Se $W_1 = \{(x, y)/\ x = y\}$, encontre um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^2$, tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

35. Em $V = M_{2\times 2}$, considere os subespaços

$$W_1 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} / c = d = 0\} \text{ e } W_2 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} / d = a + b\}.$$

a) $W_1 + W_2 = M_{2\times 2}$?

b) $W_1 \oplus W_2 = M_{2\times 2}$?

36. Suponha um espaço vetorial V escrito como soma direta de dois subespaços W_1 e W_2. Mostre que $\forall v \in V$, existe um único vetor $v_1 \in W_1$ e um único $v_2 \in W_2$, tais que $v = v_1 + v_2$.

37. Considere $W = \{(0, 0, 0, 0), (-1, 4, 2, 2), (3, -1, 0, 2), (-1, 1, 4, 3), (0, 1, 1, 0)\}$ e $U = [(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 2, 1)]$.

a) Esses conjuntos são subespaços de $V = \mathbb{R}^4$?

b) Qual é o conjunto $U \cap W$?

c) $U \cap W$ é um subespaço de $V = \mathbb{R}^4$?

38. A mesma questão anterior, considerando-se agora $V = M_{2\times 2}$,

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ e } U = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right].$$

39. Ainda a mesma questão, desta feita para $V = \mathbb{P}_2(x)$,

$W = \{3x^2 - 3x + 1,\ x^2 - x + 1,\ x + 1,\ 2x^2 - x - 1\}$ e $U = [x^2 - x,\ x^2 - 2x + 1,\ -x^2 + 1]$.

40. Verifique que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1, 2)$ e $(1, 0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1, 2), (1, 0)]$?

41. Encontre um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, tal que $[v] = W_1 \cap W_2$, onde $W_1 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)]$ e W_2 é o plano XY.

42. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores em um espaço vetorial V. Se W é um subespaço de V e $S \subset W$, conclua que $[S] \subset W$.

43. Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vetores *LI* em um espaço vetorial V, conclua que

a) $\{u + v - 2w,\ u - v - w,\ u + w\}$ também é um conjunto *LI* em V.

b) $\{u + v - 3w,\ u + 3v - w,\ v + w\}$ é um conjunto *LD* em V.

44. O conjunto $\alpha = \{2x^2 + x + 2,\ x^2,\ x,\ 1\}$ é *LI* ou *LD* em $\mathbb{P}_3(x)$?
E qualquer subconjunto de α com três elementos?

45. Sejam A e B subconjuntos finitos de um espaço vetorial e suponha que $A \subset B$. Mostre que:

a) Se A é *LD*, então B também o é.

b) Se B é *LI*, então A também o é.

Se B é *LD*, o que se pode afirmar a respeito de A? E se A é *LI*?

46. Seja A um subconjunto finito de um espaço vetorial. Mostre que A é *LD*, se, e somente se, um de seus vetores é combinação linear dos demais.

47. Se $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, conclua que $\alpha = \{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

48. Se $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ são tais que $ac + bd = 0$ e $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, conclua que $\alpha = \{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

49. É possível estabelecerem-se condições sobre k, de modo que $\{(1, 0, k), (1, 1, k), (1, 1, k^2)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$?

50. Se $u = (1 - a, 1 + a)$ e $v = (1 + a, 1 - a)$, determine o valor de a para que $\{u, v\}$ **não** seja uma base de $\mathbb{R}^2$.

51. Se $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$, o conjunto $\alpha = \{p(x),\ p'(x),\ p''(x)\}$ é uma base de $\mathbb{P}_2(x)$?

52. Encontre uma base e dê a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

a) $W_1 = \{(x, y, z) / x - 2y = 0\}$.

b) $W_2 = \{(x, y, z) / x + z = x - 2y = 0\}$.

c) $W_1 \cap W_2$.

d) $W_3 = \{(x, y, z) / x + 2y - 3z = 0\}$.

e) $W_2 + W_3$.

f) o plano XY.

g) o plano X = Y.

h) $[(1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, -1, 1)]$.

53. Em $V = \mathbb{R}^3$, sejam W_1 o plano YZ e W_2 o subespaço gerado pelos vetores $(1, 2, 0)$ e $(3, 1, 2)$. Determine uma base e dê a dimensão de W_1, de W_2, de $W_1 + W_2$ e de $W_1 \cap W_2$.

54. Em $V = \mathbb{R}^4$, determine uma base e dê a dimensão do subespaço W, gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 4, 0)$, $v_3 = (3, 2, -2, 0)$ e $v_4 = (-1, 0, 2, 0)$. É verdade que $W = \mathbb{R}^4$?

55. Sejam W_1 e W_2 os subespaços de M_{2x2} definidos por

$$W_1 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / b = -a\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / c = -a\}.$$

Determine uma base e dê a dimensão de W_1, de W_2, de $W_1 + W_2$ e de $W_1 \cap W_2$.
É verdade que $M_{2x2} = W_1 \oplus W_2$?

56. Considere $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a + d = 0\}$ como subespaço de $V = M_{2\times 2}$.

a) Determine uma base para W, completando-a, em seguida, até uma base de V.

b) Determine um subespaço U de V, tal que $V = W \oplus U$.
(procure usar a solução dada ao item anterior)

57. Ainda em $V = M_{2\times 2}$, encontre uma base e dê a dimensão dos seguintes subespaços:

a) $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a = c, b + d = 0\}$

b) $W = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

c) W o conjunto das matrizes simétricas.

d) W o conjunto das matrizes diagonais.

58. No espaço vetorial $\mathbb{P}_3(x)$, sejam $U = \{p(x)/ p(0) + p'(0) = 0\}$ e W o conjunto dos polinômios que possuem uma tangente horizontal no ponto $x = 0$.
Determine uma base e dê a dimensão de U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

59. Suponha que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, onde $\alpha = \{u\}$ é base de U e $\beta = \{v\}$ é base de W. Prove que $\gamma = \alpha \cup \beta$ é base de $\mathbb{R}^2$. Generalize este resultado.

60. Se W_1 e W_2 são subespaços bidimensionais de $\mathbb{R}^3$, pode ocorrer $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$?

61. Se W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}^3$, tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e W_1 não está contido em W_2, conclua que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

62. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, com $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 5$ e $\dim V = 7$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

63. Suponha que U e W sejam subespaços de um espaço vetorial V, onde $\dim U = 2$, $\dim W = 3$ e $\dim V = 4$. Sabendo-se que $\theta = \{u, v\}$ é um conjunto de geradores para $U \cap W$, pode-se garantir que θ é uma base para $U \cap W$?

64. Dê um exemplo de um subespaço unidimensional em $\mathbb{R}^3$ e de um bidimensional em $\mathbb{R}^4$.

65. Verifique que $\beta = \{(2, 1, (1, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(4, -1)]_\beta$ e $[(x, y)]_\beta$.

66. Verifique que $\alpha = \{(1 - x)^3, (1 - x)^2, 1 - x, 1\}$ é uma base de $\mathbb{P}_3(x)$ e calcule as coordenadas do vetor $p(x) = -x^2 - 2x + 3$ nessa base.

67. Determine a matriz de mudança da base $\alpha = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)\}$ para a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e vice-versa.

68. Se $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ são bases de $\mathbb{R}^3$ cujos vetores relacionam-se pelas equações $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = 2u_1 + u_2 + u_3$ e $v_3 = u_1 + 2u_2 + u_3$, determine as matrizes $[I]^\alpha_\beta$ e $[I]^\beta_\alpha$.

69. Considerando os dados do exercício anterior, determine $[v]_\beta$ sabendo que $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

70. Se a matriz de mudança de uma base α de $\mathbb{R}^2$ para a base $\beta = \{(1, 1, (0, 2)\}$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

determine a base α.

71. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $\gamma = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$ e $[v]_\gamma$.

72. Qual é o vetor v de que trata a questão anterior ?

73. Se α é uma base qualquer de um espaço vetorial, qual é a matriz $[I]_\alpha^\alpha$?

74. Seja W o subespaço de $V = M_{2\times 2}$, constituído das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

a) $\alpha = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ e $\beta = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ são bases de W?

b) Se sua resposta ao item anterior foi positiva, determine $[I]_\beta^\alpha$ e $[I]_\alpha^\beta$.

75. Em $V = \mathbb{P}_2(x)$, considere as bases $\alpha = \{x^2, x, 1\}$ e $\beta = \{(x+1)^2, x+1, 1\}$. Usando a matriz de mudança de base adequada, determine $[-x^2 + 2(x-1)]_\beta$.

(***Sugestão: Observe que*** $x^n = ((x+1) - 1)^n$).

□□□□□□