UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Iniciação ao Estudo de Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Relatório Final

NÁDIA PINHEIRO NÓBREGA
Bolsista pelo Programa PIBIC/UFPB/CNPq

PROF. DR. JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó
Orientador

10 de janeiro de 2003

Sumário

Relatório Final

0.1 Introdução

O presente é um resumo das atividades de pesquisa pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC/CNPq/UFPB, por parte da bolsista, no período de agosto de 2002 a julho de 2003. Nele será exibido comentários sobre o projeto, isto é, uma introdução do projeto, os objetivos, a metodologia utilizada, o conteúdo desenvolvido ao longo deste projeto,a conclusão, e por fim a bibliografia utilizada.

É bem sabido que tratou-se de um estudo inicial de equações Diferenciais Parciais visto à luz da Análise Funcional. O objetivo principal deste projeto foi introduzir os conceitos básicos necessários aos estudos de problemas que envolvem E.D.P . O estudo começou com as teorias básicas de espaços métricos , espaços de Banach, espaço de Hilbert, como primeira etapa do projeto e continuou nesta última etapa com o conhecimento e aplicação de importantes ferramentes como o Teorema de Hahn-Banach, os espaços L^p, os operadores compactos, a teorial espectral, os espaços de Sobolev e resolução de problemas de contornos em espaços unidimensionais.

O orientador é o Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, do Departamento de Matemática, e a aluna, Nádia Pinheiro Nóbrega, estudante de Matemática, matrícula n 10111089. O Projeto que teve início em agosto de 2002 está previsto para terminar em julho do corrente ano.

A segunda etapa , conforme os planos, era verificar aplicações a problemas elípticos semilineares com o desenvolvimento de um estudo introdutório de Análise Funcional e Integral de Lebesgue proposto pela primeira etapa.

Este projeto proporcionou a bolsita um amadurecimento considerável e certamente influenciará no sucesso acadêmico do todo aluno enserido em tal programa, PIBIC/UFPB/CNPq. Em particular, em nosso caso, o fato de participar do programa no grupo "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise"coordenado pelo Prof João Marcos Bezerra, nos deu um maior respaldo para o nosso crescimento, nos incentivou a dar continuidade aos estudos de uma Pós-Graduação.

Participar de um projeto desta natureza é consideravelmente benéfico, a iniciação científica se tornou de fato um meio para futuros estudos em uma pós-graduação e aplicações das ferramentas expostas ao longo da graduação.

0.2 Objetivos

O nosso projeto visa além do estudo das equações diferenciais Parciais preparar o aluno para uma futura pós-graduação e possui outros objetivos listados abaixo:

1. Aprofundamento dos conhecimentos já adquiridos na graduação;
2. estímulo para continuidade dos estudos em uma futura pós-graduação;
3. compreenção dos trabalhos que se poderá desenvolver em uma pesquisa;
4. oportunidade do trabalho científico em grupo;
5. interação não só com o orientador mas com colegas que são bolsistas também e outros estudantes de níveis superior ao nosso.

0.3 Metodologia

Usamos a seguinte metodologia:

1. apresentações semanais de temas para o orientador;
2. execução de leituras de textos da bibliografia.

Utilizamos também (como integrante do grupo "Projeto Integrado de Pesquisa em Análise"):

1. O estudo em grupo;
2. Apresentação dos temas para outros bolsistas que estão ligados ao grupo de pesquisa coordenado pelo Prof. João Marcos Bezerra;
3. Participação em ciclo de palestras promovidos pelo grupo supracitado.

0.4 Alguns dos conteúdos desenvolvido no projeto

De acordo com o nosso projeto o cumprimos na íntegra e listamos abaixo os de maior relevância.

1. Espaços Métricos: Exemplos básicos, Espaço das sequências l^∞;, O espaço l^p;, Convergência, sequências de Cauchy, exemplos de completude e Completamento de um espaço métrico.

2. Espaços normados ,Espaço de Banach: Lema da invariância por translação, Espaços e subespaços normados em dimenção finita ,Lema de combinação linear, Teorema das normas equivalentes ,Teorema da compacidade, Lema de F.Riesz, Teorema das funções contínuas, Teorema da dimensão finita, Teorema da continuidade e limitação, Funcionais lineares ,Teorema da continuidade e limitação, Espaço algébrico dual e bidual, Operadores lineares e funcionais em espaços de dimenção finita, Teorema da dimensão do dual algébrico, Lema do vetor zero, Teorema da reflexidade algébrica, Espaço dual.

3. Espaço de Hilbert : Lema da desigualdade de Schwarz e triângular,Teorema de Riesz, Lema da igualdade,Definição da forma sesquilinear,Teorema da representação de Riesz.

4. Os espaços L^p: Definições e propriedades elementares,Reflexidade, separabilidade, dual de L^p, Convolução e regularização,Critério de compacidade forte em L^p.

5. O teorema de stampacchia e o corolário de Lax-Milgran

6. Operadores Compactos: Definição e prorpiedades elementares, A teoria de Riesz-Fredholm,Espectro de um operador compacto,Decomposição espectral dos operadores autoadjuntos.

7. Espaços de Sobolev unidimensional: O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$,O espaço $W_0^{1,p}(I)$, Exemplos de problemas de contorno.

Vejamos detalhadamente alguns dos itens enumerados anteriormente.

Capítulo 1

Espaços Métricos

1.1 Espaço Métrico

Como é usual, a função distância (denotada por d) definida em $\mathbb{R}$ e dada por d(x,y)=$|x-y|$,$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Em Análise Funcional faremos estudos de espaços e funções mais gerais. Primeiramente, o conceito mais geral e flexível de um "espaço"é dado como segue. Inicialmente, é feita a substituição do conjunto de números reais por um conjunto abstrato X e depois é introduzida em X uma "função distancia "que tem as propriedades mais fundamentais da função distancia definida em $\mathbb{R}$. Mas, o que significa ser mais fundamental ? Essa não é uma questão tão trivial. De fato, a escolha e a formulação de axiomas em uma definição sempre precisam de experiência, familiaridade com problemas práticos e uma idéia clara dos objetivos a serem alcançados. No presente caso, o conceito seguinte é básico e importante em Análise Funcional e suas aplicações.

Definição 1.1.1 *Um espaço métrico é um par (X,d), onde X é um conjunto e d é uma métrica em X, isto é,uma função* $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x, y, z \in X$ *serão satisfeitas as seguintes condições:*

1. d é valor real, finito e não negativo

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3. d(x,y)=d(y,x)

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Um subespaço (Y,$\tilde{\mathrm{d}}$) de (X,d) é obtido se tomarmos um subconjunto $Y \subset X$ e restringir d para $Y \times Y$, assim a métrica em Y é a restrinção

$$d = d|_{Y\times Y}$$

$\tilde{\mathrm{d}}$ é chamada a métrica induzida em Y por d.

Daremos agora alguns dos exemplos mais importantes de espaços métricos.

Exemplo 1.1.1 Espaço das sequências s. *Este espaço consiste do conjunto de todas as sequências (limitadas ou não) de números complexos e cuja métrica é definida por*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|}$$

onde $x = (\alpha_j)$ *e* $y = (\beta_j)$.

A série acima é convergente. De fato, temos que $|\alpha_j - \beta_j| < 1+|\alpha_j - \beta_j|$. *Logo,* $\dfrac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} \leq 1$.*Como* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ *e como* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ *converge absolutamente temos que* $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|}$ *também é convergente.Verifiquemos se d é uma métrica, ou seja,*

1. *d é valor real, finito e não negativo*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} > 0$$

2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. *Se* $d(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} = 0 \Rightarrow \alpha_j = \beta_j$.*Se* $\alpha_j = \beta_j \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} = 0$

3. *d(x,y)=d(y,x)*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\beta_j - \alpha_j|}{1+|\beta_j - \alpha_j|} = d(y,x)$$

4. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ *Esta última condição será provada usando-se a função auxiliar definida em* $\mathbb{R}$ *por:*

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Diferenciando obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

Logo f é monótona crescente e como

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

temos

$$f(|a+b|) \leq (|a|)+(|b|)$$

Assim obtemos

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

Tomemos
$a = \alpha_j - \gamma_j$ *e* $b = \gamma_j - \beta_j$, *onde* $z = (\gamma_j)$. *Então*

$$\frac{|\alpha_j - \gamma_j + \gamma_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \gamma_j + \gamma_j - \beta_j|} \leq \frac{|\alpha_j - \gamma_j|}{1+|\alpha_j - \gamma_j|} + \frac{|\gamma_j - \beta_j|}{1+|\gamma_j - \beta_j|},$$

multiplicando por $\frac{1}{2^j}$ *e aplicando o somatório de 1 a* ∞ *sobre j teremos:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \beta_j|}{1+|\alpha_j - \beta_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\alpha_j - \gamma_j|}{1+|\alpha_j - \gamma_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\gamma_j - \beta_j|}{1+|\gamma_j - \beta_j|}.$$

Ou seja, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Exemplo 1.1.2 Espaço l^{∞}. *É formado pelo conjunto X de todas as sequências limitadas de números complexos, onde* $x = (\alpha_i)$ *tal que* $\forall i = 1,2,3,\ldots$ *temos* $|\alpha_i| \leq C_x$ *e cuja métrica é definida por:*

$$d(x,y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i - \beta_i|$$

onde $y = (\beta_i) \in X$. *Verifiquemos se d é uma métrica:*

1. *d é valor real, finito e não negativo*

$$d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\alpha_i-\beta_i|>0$$

2. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$. *Se*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|\alpha_i-\beta_i|=0\Rightarrow\alpha_i=\beta_i$$

   Se $\alpha_i=\beta_i\Rightarrow d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\alpha_i-\beta_i|=0$

3. *d(x,y)=d(y,x)*

$$d(x,y)=\sup_{i\in\mathbb{N}}|\alpha_i-\beta_i|=d(y,x)\sup_{i\in\mathbb{N}}|\beta_i-\alpha_i|$$

4. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$$\begin{array}{rcl} |\alpha_i-\beta_i| & = & |\alpha_i+\varphi_i-\varphi_i-\beta_i| \leq |\alpha_i-\varphi_i| + |\varphi_i-\beta_i| \\ \sup_{i\in\mathbb{N}}|\alpha_i-\beta_i| & \leq & \sup_{j\in\mathbb{N}}|\alpha_j-\varphi_j|+\sup_{j\in\mathbb{N}}|\varphi_j-\beta_j| \end{array}$$

   Logo, esta última condição confirma que d é uma métrica e que l^{∞} *é um espaço métrico.*

Exemplo 1.1.3 Espaço l^p. *Seja* $p\geq 1$ *um número real fixo. Por definição, cada elemento do* l^p *é uma sequência* $x=(\alpha_i)$ *numérica tal que* $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ *cuja métrica* $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i-\beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *onde* $y=(\beta_i)$ *e* $\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|<\infty$. *Como a série* $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ *é convergente e de termos positivos temos que a mesma será limitada, ou seja,* $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|=C_x$. *Para que d seja uma métrica no espaço* l^p *precisamos provar todas as condições na definição* **??***.Mas as condições (1) e (4) só serão provadas se obtermos inicialmente:*

1. uma inequação auxiliar ;

*2. a desigualdade de Hölder de **??**;*

*3. a desigualdade de Minkovski de **??**;*

*4. a condição (4) de **??**.*

E (1) será a última condição a ser provada.

1. Seja $p > 1$ e defina q por:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1.1}$$

*2. De **??** temos $(p-1)(q-1) = 1$. Consequentemente $\frac{1}{p-1} = q-1$ a fim de que $f(x) = x^{p-1}$ tenha como inversa $f(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$.*

Agora sejam α e β números positivos quaisquer e a área de um retângulo definida por $\alpha\beta$. Assim, obtemos por integração a seguinte inequação:

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha x^{p-1}dx + \int_0^\beta y^{q-1}dy = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \tag{1.2}$$

*Por definição temos que $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|_p\right)^{\frac{1}{p}}$, ou seja , esta é uma métrica induzida por uma norma.Tomemos então $\alpha = \frac{|a_i|}{||a||_p}$ e $\beta = \frac{|b_i|}{||b||_q}$. Substituindo α e β em **??** teremos:*

$$\frac{|a_i\ b_i|}{||a||_p\,||b||_q} \ \leq\ \frac{|a_i|^p}{p\,||a||_p^p} + \frac{|b_i|^q}{q\,||b||_q^q}.$$

E aplicando o somatório sobre i de 1 a ∞ teremos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i\ b_i|}{||a||_p\,||b||_q} \ \leq\ \frac{1}{p\,||a||_p^p}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p \ +\ \frac{1}{q\,||b||_q^q}\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i\ b_i|}{||a||_p\,||b||_q} \leq \frac{1}{p}\ +\ \frac{1}{q}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i\ b_i|}{||a||_p\,||b||_q}\ \leq\ 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\ b_i| \leq ||a||_p\,||b||_q\,.$$

E,assim obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i\ b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ +\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.3}$$

que é chamada de Desigualdade de Hölder de **??** .

3. *Aplicando a Desigualdade de Hölder em:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{p-1}\,|x_j + y_j|$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{p-1}\,(|x_j| + |y_j|)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\ \ =\ \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{p-1}\,|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{p-1}\,|y_j| \tag{1.4}$$

Obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}$$

A desigualdade anterior é chamada Desigualdade de Minkowvski.

4. *Sendo a sequência numérica (x_j) um elemento no espaço l^p,temos que $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j| < \infty$.A série $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p$ de termos positivos está limitada pela soma de dois elementos do l^p.Portanto,a série $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p$ é convergente.Verifiquemos se a métrica definida para o espaço l^p converge:*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+(-y_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

A inequação **??** *mostra que a métrica do espaço* l^p *é de termos positivos e limitada pela soma de dois elementos do* l^p*,portanto convergente.então a propriedade (4) é verificada a seguir usando-se a desigualdade de Minkowvski.*

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x\alpha_i - \gamma_i + \gamma_i - \beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i - \gamma_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i - \beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

E por último propriedade (1)é verificada como segue:

$$se \quad x \neq y \Rightarrow d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$$

1.2 Conjuntos Abertos, Conjuntos Fechados

No que segue, apresentaremos algumas definições básicas que vamos usar no decorrer do nosso trabalho.

Definição 1.2.1 *Dado um ponto* x_0 *pertencente ao espaço métrico* X *e um número real* $r > 0$*, definimos três tipos de conjuntos:*

- *Bola aberta*
$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\};$$
- *Bola fechada*
$$\tilde{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\};$$
- *Esfera*
$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}.$$

Nos três casos anteriores ,x_0 *é chamado o centro e* r *o raio.Como consequência dessa definição segue que*

$$S(x_0, r) = \tilde{B}(x_0, r) - B(x_0, r)$$

Definição 1.2.2 *Um subconjunto* M *de um espaço métrico* X *é aberto se contiver uma bola ao redor de cada um de seus pontos. Um subconjunto* K *de* X *é fechado se seu complemento (em* X*) é aberto, isto é,*$K^c = X - K$ *é aberto.*

Uma bola aberta $B(x_0, \varepsilon)$ *de raio* ε *é chamada uma vizinhança* ε *de* x_0*, onde* $\varepsilon > 0$*.*

Definição 1.2.3 (funções contínuas).*Sejam X=(X,d) e* $Y = (Y, d_1)$ *espaços métricos. Uma função* $T : X \longrightarrow Y$ *é contínua em um ponto* $x_0 \in X$ *se* $\forall \epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $d_1(Tx, Tx_0) < \epsilon$ *implica que* $d(x, x_0) < \delta$ *,* $\forall x$.

T é dita contínua se for contínua em todo ponto de X.

Definição 1.2.4 *Seja M um subconjunto de um espaço métrico X. Assim, um ponto x de X(que pode ou não ser um ponto de M) é chamado um ponto de acumulação de M se toda vizinhaça de x contém pelo menos um ponto* $y \in M$ *diferente de x.*

Chama-se feixo do conjunto M ao conjunto $\overline{M}$ *formado por todos os pontos de M e os pontos de acumulação de M.*

Definição 1.2.5 (conjunto denso, conjunto separável). *Um conjunto M de um espaço métrico X é dito denso em X se*

$$\overline{M} = X.$$

X é dito separável se tiver um subconjunto enumerável que é denso em X. Portanto se M é denso em X, então não existe pontos $x \in X$ *que tenha uma vizinhança que não contenha pontos de M.*

Exemplo 1.2.1 *O espaço* l^p *com* $1 \leq p \leq +\infty$ *é separável.*

Prova: Seja M o conjunto de todas as sequências y da forma

$$y = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, 0, 0, \ldots)$$

onde α *é um inteiro positivo qualquer e os* α*'s são racionais.M é enumerável pois* $y \approx \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}$*, isto é , a união infinita dos racionais é enumerável pois* $\mathbb{Q}$ *é enumerável, por definição.Mostremos que M é denso em* l^p. *Seja* $x = (\gamma_j) \in l^p$ *arbitrário. Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe n que depende de* ε *tal que*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\gamma_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Como os racionais são denso em $\mathbb{R}$ *, para cada* γ_j *existe um* α_j *fechado nele. Logo podemos encontrar um* $y \in M$ *que satisfaz*

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j - \alpha_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

E segue que

$$[d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j - \alpha_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\gamma_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Assim temos $d(x,y) < \varepsilon$ *e, portanto , M é denso em* l^p.

1.3 Convergência , sequência de Cauchy , completitude

Para apresentarmos os espaços de Banach, vamos nesta seção introduzir algumas definições básicas.

Definição 1.3.1 *Uma sequência* (x_n) *em um espaço métrico* $X = (X,d)$ *é convergente se existir* $x \in X$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Lema 1.3.1 *Seja* $X = (X,d)$ *um espaço métrico . Então:*

1. *Uma sequência convergente em X é limitada e seu limite é único*

2. *Se* $x_n \to x$ *e* $y_n \to y$ *em X, então* $d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$

   Prova:(1)Suponha que $x_n \to x$. *Tomando* $\varepsilon = 1$, $\exists N$ *tal que* $d(x_n, x) <$ 1
   $\forall n > N$. *Seja a=* $max\ \{d(x_1,x_N), d(x_2,x_N), \ldots, d(x_{N-1},x_N)\}$.
   Logo,

   $$d(x_n, x) < 1 + a \quad \forall n.$$

   Portanto (x_n) *é limitada. Admita agora que* $x_n \to x$ *e* $y_n \to z$. *Pela desigualdade triangular obtemos*

   $$0 \le d(x,z) \le d(x,x_n) + d(x_n,z)$$

   Segue que

   $$0 \le d(x,z) \le 0 + 0.$$

Daí obtemos $x = z$. Portanto (x_n) tem limite único.

(2)Usando a desigualdade triangular novamente obtemos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y).$$

E alternando os termos x_n e x, e também y_n e y obtemos

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y),$$

isto é ,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq 0 \quad \forall n > N.$$

Logo

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x, y)$$

Definição 1.3.2 *Uma sequência (x_n) é de Cauchy quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall m, n > N$*

Teorema 1.3.1 *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Prova:Se $x_n \longrightarrow x$, então $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $d(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > N$.
Seja agora $n, m > N$, e usando a desigualdade triangular temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo (x_n) é de Cauchy

Teorema 1.3.2 ***(Fecho, conjunto fechado**)Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X,d) e $\overline{M}$ seu fecho. Então:*

1. *$x \in \overline{M} \Leftrightarrow \exists (x_n)$ em M tal que $x_n \to x$*

   Prova: Suponhando que $x \in \overline{M}$. Teremos dois casos a considerar:

   (a) *Se $x \in M$ teremos a sequência $(x, x, x, \ldots) \to x$*
   (b) *Se $x \notin M$. Então $\exists y \neq x \in B(x\,;\,r)$ tal que $y \in M$, $\forall B(x\,;\,r)$*
   Seja $x_n \in M$ onde $x_n \in B(x\,;\,\frac{1}{n})$.
   Quando $n \to \infty$, $x_n \to x$

Suponhamos agora que $\exists (x_n) \subset M$ *tal que* $x_n \to x$. *Então* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ *tal que* $d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n > N$

Portanto para os pontos de acumulação teremos que $\forall B(x, \varepsilon)$ $\exists y \in B(x, \varepsilon)$ *onde* $y \in M$ *e* $y \neq x$

2. *M é fechado* $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subset M$, $(x_n \to x \Rightarrow x \in M)$

   Suponhamos que M é fechado, ou seja, $M = \overline{M}$. *Então por (1) temos que* $x \in \overline{M}$ *e pela hipótese conclui-se que* $x \in M$.

   Agora suponha que $(x_n) \subset M$ *tal que* $(x_n \to x \Rightarrow x \in M)$.*E por (1) temos que* $x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{M}$. *Portanto* $M = \overline{M}$.

Definição 1.3.3 *Um espaço é completo quando toda sequência de cauchy* (x_n) *converge.*

Teorema 1.3.3 *(**Subespaço completo**) Seja M um subespaço de um espaço métrico completo X.Dizemos que M é um espaço métrico completo se, e somente se M é um subconjunto fechado de X.*

Prova:Suponhamos que M é completo. Pelo teorema **??***(1),* $\forall x \in \overline{M}$ $\exists (x_n)$ *em M onde* $x_n \to x$. *Por outro lado toda sequência convergente é de Cauchy e juntamente com a hipótese teremos que* $x_n \to x$ *e* $x \in M$, *isto é,* $x \in \overline{M} \Rightarrow x \in M$. *Mas, por definição* $x \in M \Rightarrow x \in \overline{M}$. *Portanto* $M = \overline{M}$.

Inversamente, seja M fechado, isto é, $M = \overline{M}$ *e* (x_n) *uma sequência de Cauchy em M. Então* $(x_n) \subset X$ *e sendo X um espaço métrico completo teremos que* $x_n \to x$ *e* $x \in X$. *Mas pela hipótese e pelo teorema* **??***(2) teremos que*
$x_n \to x \Rightarrow x \in M$.*Então pela definição* **??** *M é completo.*

1.4 Exemplos. Demonstrações de Completitude

Em diferentes espaços tais demonstrações variam em complexidade, mas o modelo geral de desenvolvimento é o mesmo:

- Construção de um elemento x (para ser usado como limite).
- Provar que x está no espaço considerado.
- Provar a convergencia $x_n \to x$ (no sentido da métrica).

Exemplo 1.4.1 *O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Prova:A métrica em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$d(x,y) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \qquad y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n) \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$

Seja (x_m) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, onde $x_m = (\gamma_1^{(m)}, \ldots, \gamma_n^{(m)})$. Como (x_m) é uma sequência de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$ existe um N tal que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_r) &= \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(r)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \forall m, r > N \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\forall 1 \leq j \leq n$ fixo obtemos:

$$\left(\gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \quad \forall m, r > N$$

E segue que

$$|\gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(r)}| < \varepsilon \quad \forall m, r > N$$

*Isso mostra que para cada j fixo, a sequência $(\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}, \gamma_j^{(3)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de numeros reais. Ela converge pois por definição $\mathbb{R}$ é um espaço completo, ou seja, $\gamma_j^{(m)} \to \gamma_j$ quando $m \to \infty$. Tomando estes n limites definimos $x = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Obviamente, $x \in \mathbb{R}^n$. De (**??**) com $r \to \infty$ teremos:*

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j^{(m)} - \gamma_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} &\leq&\ \varepsilon \quad (m > N) \\ &\left(\gamma_j^{(m)} - \gamma_j\right)^2 &\leq&\ \varepsilon^2 \\ &|\gamma_j^{(m)} - \gamma_j| &<&\ \varepsilon + 1 = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Então x é o limite de (x_m) e portanto está provada a completude do $\mathbb{R}^n$ já que (x_m) foi uma sequência de Cauchy arbitrária.

Exemplo 1.4.2 *O espaço l^∞ é completo.*

Prova: Já sabemos que esse espaço é formado pelas sequências limitadas de números complexos, ou seja, $y = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ é uma sequência onde $|\alpha_j| < C \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Seja (x_m) uma sequência qualquer em l^∞, onde $x_m = (\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \eta_3^{(m)}, \ldots)$. Como a métrica em l^∞ é dada por

$$d(x, y) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\eta_j - \alpha_j|,$$

onde $x = (\eta_j)$, $y = (\alpha_j)$ e (x_m) é de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ tal que $\forall m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\eta_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}| < \varepsilon$$

E para j fixo obtemos

$$|\eta_j^{(m)} - \eta_j^{(n)}| < \varepsilon \tag{1.8}$$

Portanto para j fixo, a sequência $(\eta_j^{(1)}, \eta_j^{(2)}, \eta_3^{(3)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números e também convergente pois o plano dos complexos $\mathbb{C}$ é um espaço métrico completo.E então $\eta_j^{(m)} \to \eta_j$ quando $m \to \infty$.Repetindo esse processo infinitas vezes definimos $x = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \ldots)$ e mostremos que $x \in l^\infty$ e que $x_m \to x$. Fazendo em (2) $n \to \infty$ obtemos:

$$|\eta_j^{(m)} - \eta_j| \leq \varepsilon \quad m > N \tag{1.9}$$

Como $x_m = \left(\eta_j^{(m)}\right) \in l^\infty$, existe um número real k_m tal que $|\eta_j^{(m)}| \leq k_m \quad \forall j$. Portanto, pela desigualdade triangular

$$|\eta_j| \leq |\eta_j - \eta_j^{(m)}| + |\eta_j^{(m)}| \leq \varepsilon + k_m \quad (m > N).$$

*Observa-se que o lado direito dessa desigualdade não depende de j e portanto (η_j) é uma sequência limitada de números. Isso mostra que $(\eta_j) \in l^\infty$ e de (**??**) obtemos*

$$d(x_m, x) \;=\; \sup_{j \in \mathbb{N}} |\eta_j^{(m)} - \eta_j| \leq \varepsilon \quad (m > N)$$

Isso mostra que $x_m \to x$. E está provada a completude de l^∞

Exemplo 1.4.3 *O espaço l^p é completo.*

Prova:Seja (x_m) *uma sequência de Cauchy em* l^p*, onde* $x_m = (\gamma_1^{(m)}, \gamma_2^{(m)}, \gamma_3^{(m)}, \ldots)$. *Então* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ *tal que* $\forall m, n > N$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Mas pela definição de limite temos que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ *tal que* $d(x_m, x) < \varepsilon$ $\forall m, n > N$. *E aplicando a desigualdade triangular obtemos:*

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \\ d(x_m, x_n) &\leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(n)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{1.10}$$

Segue que $\forall j = 1, 2, \ldots$ *temos*

$$\left| \gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(n)} \right| < \varepsilon \qquad (m, n > N) \tag{1.11}$$

De (**??**) *observamos que* $(\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)}, \gamma_j^{(3)}, \ldots)$ *é uma sequência de Cauchy de números. Ela converge pois* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *são espaços completos.Temos que quando* $m \to \infty$ $\gamma_j^{(m)} \to \gamma_j$*.Repetindo esse processo infinitas vezes definimos* $x = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots)$ *e mostremos que* $x \in l^p$ *e* $x_m \to x$*.E tomando*

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \gamma_j^{(m)} - \gamma_j^{(n)} \right|^p \right) < \varepsilon^p \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.12}$$

Fazendo $n \to \infty$ *em* (**??**) *obtemos para* $m > N$

$$d(x_m, x) = \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \gamma_j^{(m)} - \gamma_j \right|^p \right) \leq \varepsilon^p \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

Fazendo $k \to \infty$ *obtemos*

$$d(x_m, x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \gamma_j^{(m)} - \gamma_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad m > N$$

Logo $x_m - x = (\gamma_j^{(m)} - \gamma_j) \in l^p$*.Tomemos então* $x = x_m + (x - x_m)$*. Aplicando a desigualdade de Minkowski teremos:*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \gamma_j^{(m)} + \left(\gamma_j - \gamma_j^{(m)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\gamma_j^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\gamma_j - \gamma_j^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C^{\frac{1}{p}} + U^{\frac{1}{p}} \\
\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma_j|^p\right) &\leq \left(C^{\frac{1}{p}} + U^{\frac{1}{p}}\right)^p
\end{aligned}
$$

Logo $x \in l^p$, e isso prova que o l^p é completo.

1.5 Completamento dos Espaços Métricos

Definição 1.5.1 (funções isométricas, espaços isométricos) *Seja X=(X,d) e $\tilde{X}$=($\tilde{X}$,$\tilde{d}$) espaços métricos. Então:*

1. *Uma função $T : X \longrightarrow \tilde{X}$ é dita isométrica ou uma isometria se T preserva distãncias, isto é, $\forall x, y \in X$*

$$\tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$$

   onde Tx e Ty são as imagens de x e y, respectivamente.

2. *O espaço X se diz isométrico ao espaço $\tilde{X}$ se existir uma bijeção isométrica de X em $\tilde{X}$.Os espaços X e $\tilde{X}$ são então chamados de espaços isométricos.*

   Os espaços métricos podem diferir quando muito pela natureza de seus elementos mas são indistinguíveis do ponto de vista da métrica.

Teorema 1.5.1 (Completamento) *Para um espaço métrico $X = (X, d)$ existe um espaço métrico $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$ que tem um subespaço W que é isométrico com X e denso em $\hat{X}$. Essse espaço $\hat{X}$ é único exceto para isometrias, isto é, se $\tilde{X}$ é qualquer espaço métrico tendo um subespaço $\tilde{W}$ denso isométrico com X, então $\tilde{X}$ e $\hat{X}$ são isométricos.*

A demonstração será dividida em quatro etapas onde contruiremos:

1. $\hat{X} = (\hat{X}, \hat{d})$;

2. uma isometria $T : X \longrightarrow W$, onde $\overline{W} = \hat{X}$.

   Então provaremos:

3. A completude de $\hat{X}$;

4. A unicidade de $\hat{X}$, exceto para isometrias.

??. Seja $A = \{(x_n) \subseteq X; (x_n) \quad é \quad de \quad Cauchy\}$
Vamos definir a seginte relação de equivalẽncia em $A \times A$:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Provemos então que $\sim$ define uma relação de equivalência:

- $(x_n) \sim (x_n) \qquad \forall (x_n) \in A$

$$(x_n) \sim (x_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = 0$$

- $(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (y_n) \sim (x_n)$

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n)$$

  Logo $(y_n) \sim (x_n)$

- $(x_n) \sim (y_n) \quad e \quad (y_n) \sim (z_n) \Rightarrow (x_n) \sim (z_n) \qquad \forall (x_n), (y_n), (z_n) \in A$
  Segue então que

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon_1 \; \exists n_1 \; ; \; d(x_n, y_n) < \varepsilon_1 \; \forall n > n_1$$

$$(y_n) \sim (z_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon_2 \; \exists n_2 \; ; \; d(y_n, z_n) < \varepsilon_2 \; \forall n > n_2$$

  E usando a desigualdade triangular:

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \forall n > máx\{n_1, n_2\}$$

  E tomando $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ obtemos:
  $d(x_n, z_n) < \varepsilon$

$$|d(x_n, z_n) - 0| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{n to \infty} d(x_n, z_n) = 0$

Logo

$(x_n) \sim (z_n)$

Como $\sim$ define uma relação de equivalência, podemos construir o conjunto das classes de equivalência das sequências de Cauchy da seguinte forma:

$$\frac{A}{\sim} = \{\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}, \overline{(z_n)}, \ldots\}$$

e para simplificar a notação denotaremos $\overline{(x_n)} = \hat{x}$, $\overline{(y_n)} = \hat{y}$ ... E o conjunto $\frac{A}{\sim} = \hat{X}$.

Definamos agora $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\hat{d} = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ com $(x_n) \in \hat{x}$ e $(y_n) \in \hat{y}$. E mostremos que esse limite existe e que $\hat{d}$ define uma função. Pela desigualdade triangular

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

Portanto obtemos

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

E uma desigualdade semelhante é obtida alternando m e n. Assim obtemos

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \tag{1.13}$$

Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy temos que em (**??**)
$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \quad \exists N_1, N_2$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon_1 \qquad \forall m, n > N_1$$

e

$$d(y_m, y_n) < \varepsilon_2 \qquad \forall m, n > N_2$$

Então $\forall \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0 \qquad \exists N_0 = máx\{N_1, N_2\}$ tal que

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon \qquad \forall m, n > N_0$$

Logo $\exists \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ já que $\mathbb{R}$ é completo.

Seja $\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad (x_n) \in \hat{x}, (y_n) \in \hat{y}$ e $\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{'}, y_n^{'})$ $(x_n^{'}) \in \hat{x}, (y_n^{'}) \in \hat{y}$. E mostremos que esse limite é único.Da desiguldade triangular temos

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x_n^{'}) + d(x_n^{'}, y_n^{'}) + d(y_n^{'}, y_n) \\ d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'}) &\leq d(x_n, x_n^{'}) + d(y_n^{'}, y_n) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} d(x_n^{'}, y_n^{'}) &\leq d(x_n^{'}, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_n^{'}) \\ d(x_n^{'}, y_n^{'}) - d(x_n, y_n) &\leq d(x_n^{'}, x_n) + d(y_n, y_n^{'}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

De (**??**) e (**??**) obtemos

$$\left| d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'}) \right| \leq d(x_n^{'}, x_n) + d(y_n, y_n^{'}) \tag{1.16}$$

Mas como $(x_n) \sim (x_n^{'})$implica que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n^{'}) = 0$ e $(y_n) \sim (y_n^{'})$ implica que $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_n^{'}) = 0$ e aplicando o limite em **??** obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'}) \right| \leq 0.$$

Pela definição de sequência de Cauchy obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| d(x_n, y_n) - d(x_n^{'}, y_n^{'}) \right| = 0.$$

E da completude de $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n^{'}, y_n^{'}).$$

Mostremos também que $\hat{d}$ define uma métrica em $\hat{X}$, isto é,

1. $\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) > 0 \quad$ se $x \neq y$. Usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_n) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \\ d(x_n, x_n) - d(x_m, y_m) &\leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \end{aligned} \tag{1.17}$$

E alternando os índices n e m obtemos

$$|d(x_n, x_n) - d(x_m, y_m)| \;\; \leq \;\; d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \qquad (1.18)$$

Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy então $\forall \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$
$\exists N_0 = \{N_1, N_2\}$ tal que

$$|d(x_n, x_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon \qquad \forall m, n > N_0.$$

Isso define uma sequência de Cauchy numérica $(d(x_n, y_n))$, que é positiva por definição, e como $\mathbb{R}$ é completo temos que

$$\exists \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) > 0$$

2. $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$. E para demonstrar este caso serão necessários os seguintes fatos:

   (a) Seja $\hat{x} = \{(y_n) \in A; (y_n) \sim (x_n)\}$, $(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$

   (b) $\hat{x} \neq \hat{y} \Leftrightarrow \hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

   Suponha que

   $$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \Rightarrow (x_n) \sim (y_n) \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

   Inversamente

   $$\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow (x_n) \sim (y_n)$$

   onde $(x_n) \in \hat{x}$ e $(y_n) \in \hat{y}$ implica que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y})$

3. $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{d}(\hat{y}, \hat{x})$ é imediato.

4. $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$. Fazendo $n \to \infty$ temos
   $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n)$.

   Seja $(x_n) \in \hat{x}$, $(y_n) \in \hat{y}$ e $z_n) \in \hat{z}$ então

   $$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \leq \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{d}(\hat{z}, \hat{y})$$

   Logo $\hat{d}$ define uma métrica em $\hat{X}$.

(**??**.) Construção de uma isometria $T : X \longrightarrow W$ onde $\overline{W} = \hat{X}$

A cada $b \in X$ associamos a classe $\hat{b} \in \hat{X}$ que contém a sequência de cauchy constante $(b, b, b, \ldots)$. Isso define a função

$$\begin{array}{rccc} T: & X & \longrightarrow & W = T(X) \subseteq \hat{X} \\ & b & \longmapsto & Tb = \hat{b} \end{array}$$

onde $(b, b, \ldots) \in \hat{b}$. Temos que T é sobrejetiva pela maneira como foi construída, i. e.,cada elemento na imagem tem sempre um correspondente no domínio. Sabemos que

$$d(b, c) = \lim_{n \to \infty} d(b, c) = \hat{d}(\hat{b}, \hat{c})$$

onde $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são as classes de (x_n) e (y_n) respectivamente com $x_n = b$, $y_n = c \quad \forall n$, e portanto T é uma isometria sobrejetiva. Logo W e X são espaços isométricos. Mostremos agora que $\overline{W} = X$.

Seja $\hat{x}$ um elemento qualquer de $\hat{X}$ e seja $(x_n) \in \hat{x}$. Como (x_n) é de Cauchy temos que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, n > n_0$$

Seja $N > n_0$ e $n > N$. Então

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad N > n_0$$

Observe que $(x_N, x_N, \ldots) \in A$. Logo $(x_N, x_N, \ldots)$ pertence a alguma classe de equivalência, i. e.,$(x_N, x_N, \ldots) \in \hat{x}_N$. Então $\hat{x}_N = Tx_N \in W$ e

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_N) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (n > N)$$

Isso mostra que toda vizinhança de raio ε de qualquer $\hat{x} \in \hat{X}$ contém um elemento de W. Portanto W é denso em $\hat{X}$.

(**??**.) A completude de $\hat{X}$

Seja $\hat{x}_n$ uma sequência de Cauchy de $\hat{X}$. Como W é denso em $\hat{X}$, $\forall \hat{x}_n$ $\exists \hat{z}_n \in W$ tal que

$$\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{n} \tag{1.19}$$

Pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) &\leq \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_m) \\
\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) &< \frac{1}{m} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Como $(\hat{x}_m)$ é uma sequência de cauchy obtemos

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) < \frac{1}{m} + \varepsilon + \frac{1}{n} \tag{1.20}$$

e o lado direito se tornará tão pequeno quanto quisermos fazendo n e m suficientemente grandes. Portanto $\hat{z}_m$ é de Cauchy em W.

Então como X e W são isométricos $T^{-1}(\hat{z}_m) = (z_m)$ que é de Cauchy em X. Seja $\hat{x}$ a classe de equivalência a qual (z_m) pertence. Por **??**:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) &\leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) \\
\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) &< \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) \\
\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) &< \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(z_n, z_m)
\end{aligned}$$

faça $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} d(z_n, z_m)$$

Segue que $\lim_{n\to\infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}) = 0$. Por definição $\hat{x}_n \to \hat{x}$ e $\hat{x} \in \hat{X}$. Logo $\hat{X}$ é completo.

(**??**.) A unicidade de $\hat{X}$, exceto para isometrias.

Se $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é outro espaço métrico completo com um subespaço $\tilde{W}$ denso em $\tilde{X}$ e isométrico com X, então $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ temos as sequências $(\tilde{x}_n), (\tilde{y}_n)$ em $\tilde{W}$ tal que $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ e $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$; portanto

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

segue de

$$\left| \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \right| \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{y}_n) \to 0$$

Como $\tilde{W}$ é isométrico com $W \subset \hat{X}$ e $\overline{W} = \hat{X}$, as distâncias entre $\hat{X}$ e $\tilde{X}$ tem que ser iguais.Portanto $\hat{X}$ e $\tilde{X}$ são isométricos.

Capítulo 2

Espaços Normados e Espaço de Banach

Os espaços métricos importantes são obtidos se tomarmos um espaço vetorial e definirmos nele uma métrica por meio de uma norma. O espaço resultante é chamado de espaço normado. Se o espaço métrico é completo, então ele é chamado um espaço de Banach. No presente capítulo serão desenvolvidas as idéias básicas dessas teorias.

2.1 Espaço Normados e Espaço de Banach

Definição 2.1.1 *Um espaço normado X é um espaço vetorial com uma norma definida nele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma). A norma no espaço vetorial X (real ou complexo) é uma função em X cujo valor para um $x \in X$ é chamada norma de x e denotado por $||x||$ e que tem as propriedades*

1. $||x|| \geq 0$;
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $||\alpha x|| = |\alpha|||x||, \qquad \alpha$ *escalar qualquer;*
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad \forall x, y \in X$ *(desigualdade triangular.)*

Uma norma em X define uma métrica d que é dada por

$$d(x, y) = ||x - y|| \qquad (x, y \in X) \tag{2.1}$$

e é chamada a métrica induzida pela norma. Mostremos (**??**) é uma métrica.

- $d(x, y) \geq 0$ é imediato;
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Suponhamos que $d(x, y) = 0$, então

$$d(x, y) = ||x - y|| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

  Suponhamos agora que $x = y$, então

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||0|| = 0;$$

- $d(x, y) = d(y, x)$ que é imediato também;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Pela desigualdade triangular proveniente da propriedade (4) de norma

$$d(x, y) = ||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y||.$$

  e resulta que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

O espaço normado assim definido é denotado por $(X, ||.||)$ ou simplesmente por X. A propriedade (4) de norma implica imediatamente que

$$|||y|| - ||x||| \leq ||x - y|| \tag{2.2}$$

A fórmula **??** implica uma importante propriedade de norma.

A norma é contínua, i. e., sejam $(X, ||.||)$ e $\mathbb{R}$ dois espaços normados. Uma função

$$\begin{array}{rccc} ||.||: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ||x|| \end{array}$$

é contínua em um ponto $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x, x_0|| < \delta \Rightarrow |||x||, ||x_0||| < \varepsilon \quad \forall x$$

onde $||.||$ é a norma usual induzida por uma métrica em $\mathbb{R}$.

Lema 2.1.1 Invariância por Translação

Uma métrica induzida por uma norma num espaço normado satisfaz

1. $d(x + a, y + a) = d(x, y)$;

2. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y) \quad \forall x, y, a \in X$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Prova:

$$d(x + a, y + a) = ||x + a - (y + a)|| = ||x - y|| = d(x, y)$$

e

$$d(\alpha x, \alpha y) = ||\alpha x - \alpha y|| = |\alpha| ||x - y|| = |\alpha| d(x, y)$$

E reciprocamente. Seja X um espaço vetorial métrico. Se d é uma métrica que verifica (**??**.) e (**??**.). Então d induz uma norma em X.

Prova: Seja

$$\begin{array}{rccc} ||.|| : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ||x|| = d(x, 0) \end{array}$$

uma função de um espaço vetorial métrico X em $\mathbb{R}$. Verifiquemos que essa função é uma métrica.

1. $||x|| = d(x, 0) \geq 0$;

2. Se $||x|| = d(x, 0) = 0 \Rightarrow x = 0$. E reciprocamente, se $x = 0 \Rightarrow d(x, 0) = d(0, 0) = 0$;

3. $||\alpha x|| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x, 0) = |\alpha| ||x||$;

4. $||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x + y - y, 0 - y) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + |-1| d(y, 0) = ||x|| + ||y||$

Definição 2.1.2 *Um subespaço Y de um espaço normado X é um subespaço de X considerado como um espaço vetorial com a norma obtida por restrinção à norma em X para o conjunto Y. Essa norma em Y é chamada a norma induzida pela norma em X. Se Y é fechado em X, então Y é chamado um subespaço fechado em X.*

Definição 2.1.3 *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é considerado um espaço normado , mas não precisa ser completo. Nessa conexão, o Teorema* **??** *e o Teorema* **??** *são úteis já que eles fornecem os dois Teoremas enunciados a seguir e, cujas demonstrações são bem semelhantes.*

Teorema 2.1.1 *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se o conjunto Y é fechado em X.*

Teorema 2.1.2 *Seja* $X = (X, ||.||)$ *um espaço normado. Então existe um espaço de Banach* $\hat{X}$ *e uma isometria A de X em um subespaço W de* $\hat{X}$ *que é denso em* $\hat{X}$. *O espaço* $\hat{X}$ *é único exceto para isometrias.*

2.2 Espaço e subespaços normados de dimensão finita

Nesta seção, vamos apresentar alguns fatos básicos que são válidos somente em dimensão finita.

Lema 2.2.1 *Seja $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto linearmente independente (LI) de vetores em um espaço normado X (de qualquer dimensão). Então existe um número $c > 0$ tal que para qualquer escolha de escalares temos*

$$||\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n|| \geq c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|) \tag{2.3}$$

Prova:Se $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = 0$ *então* $\forall \alpha_i = 0$ *(**??**) torna-se*

$$||0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n|| \geq c.0 \Rightarrow ||0|| \geq c.0$$

Se $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \neq 0$ *teremos*

$$\left|\left| \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|} x_1 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|} x_n \right|\right| \geq c$$

Chamemos $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|}$. *Então*

$$||\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n|| \geq c. \tag{2.4}$$

Com $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| = 1 \right)$. *Portanto é suficiente que exista $c > 0$ tal que (**??**) mantenha-se para toda n-upla de escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$ com* $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| = 1$.*Suponha que (**??**) seja falso, então teremos uma sequência de vetores (y_m) com*

$$||y_m|| = ||\beta_1^{(m)} x_1 + \ldots + \beta_n^{(m)} x_n|| \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j^{(m)}| = 1$$

tal que $||y_m|| \to 0$. *Já que* $\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j^{(m)}| = 1$, *temos* $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$. *Portanto para cada* j *fixo teremos que a sequência* $(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \ldots, \beta_j^{(m)})$ *é uma sequência*
limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass $(\beta_1^{(m)})$ *tem uma subsequência convergente cujo limite será denotado por* β_1, *e seja denotado por* $(y_1^{(m)})$ *a subsequência correspondente de* (y_m). *Da mesma forma* $(y_1^{(m)})$ *tem uma subsequência* $(y_2^{(m)})$ *para a qual a subsequência correspondente de escalares* $(\beta_2^{(m)})$ *converge ; seja denotado o limite por* β_2. *Repetindo esse processo* n *vezes obtemos a subsequência* $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots)$ *de* (y_m) *cujos termos são da forma*

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1 \right)$$

com $\gamma_j^{(m)} \to \beta_j$ *quando* $m \to \infty$. *Portanto*

$$y_{n,m} \to y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

Onde $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$, *e é claro que nem todos os* β_j *são iguais a zero. Como* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *é um conjunto LI, resulta que* $y \neq 0$. *Pela continuidade da norma* $||y_{n,m}|| \to ||y||$. *Mas por hipótese* $||y_m|| \to 0$ *e como* $(y_{n,m})$ *é subsequência de* (y_m) *temos que* $||y_{n,m}|| \to 0$, *e consequentemente* $||y|| = 0$. *E pela propriedade da norma* $y = 0$, *o que resulta numa contradição.*

Esse lema é de grande importancia para o seguinte teorema :

Teorema 2.2.1 *Todo subespaço* Y *de dimensão finita de um espaço normado* X *é completo. Em particular, todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Definição 2.2.1 (Normas Equivalentes)

Uma norma $||.||$ *num espaço vetorial* X *é dita equivalente a norma* $||.||_0$ *em* X *se existem números positivos* a *e* b *tais que* $\forall x \in X$ *temos*

$$a||x||_0 \leq ||x|| \leq b||x||_0$$

A motivação deste conceito está no fato de que normas equivalentes em X definem a mesma topologia para X.

De posse dessa definição enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.2 *Num espaço vetorial X de dimensão finita, qualquer norma $||.||$ é eguivalente a outra norma $||.||_0$ qualquer.*

2.3 Compacidade e Dimensão Finita

Definição 2.3.1 *Um espaço métrico X é dito compacto se $\forall (x_n)$ em X tem uma subsequência (x_{n_k}) convergente em X. Um subconjuno M é dito compacto se M é compacto considerado como um subespaço de X., i. e., se toda $(y_n) \in M$ tem uma subsequência (y_{n_k}) cujo limite é um elemento de M.*

Lema 2.3.1 *Um conjunto compacto $M \subset (X,d)$ é fechado e limitado.*

Prova:Queremos mostrar que $M = \overline{M}$. Então $\forall x \in \overline{M} \Rightarrow \exists (x_n) \in M$ tal que $x_n \to x$. Mas como M é compacto existe (x_{n_k}) subsequência de (x_n) convergente, ou seja, $x_{n_k} \to y$ e $y \in M$ e pela unicidade do limite temos que $x = y$. Mas por definição $m \subset \overline{M}$. Então M é fechado.

Provemos que M é limitado. Suponhamos que M seja não-limitado, ou seja, $\exists (y_n)$ não limitada contida em M, tal que $d(y_n, b) > n$, onde b é fixo. Logo (y_n) não pode ter uma subsequência (y_{n_k}) convergente, pois toda sequência é limitada.

A recíproca desse lema é falsa, ou seja, $M \subset (X,d)$ fechado e limitado é compacto.

Prova: Considere o conjunto das sequências $(e_n) \in l^2$ onde

$$e_n = (\delta_{nj})_{j=1}^{\infty} = \begin{cases} n = j \ , \ 1 \\ n \neq j \ , \ 0 \end{cases} \quad \forall n$$

Esta sequência é limitada pois $||e_n|| = 1$, então o conjunto $A = \{e_n \ ; \ e_n = (\delta_{nj}) \in l^2\}$ é limitado. Mas a norma $||e_{n_k} - e_{n_r}|| = \sqrt{2}$ é sempre constante para $k \neq r$ em l^2. Então essa sequência não possui uma subsequência convergente. Portanto o conjunto A é fechado pois o conjunto dos pontos de acumulação é vazio e o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Pela mesma razão A não é compacto.

Teorema 2.3.1 *Num espaço normado X de dimensão finita, qualquer subconjunto $M \subset X$ é compacto se, e somente se M é fechado e limitado.*

Prova: O inverso é consequência imdiatatado do Lema **??**. *Seja M fechado e limitado. Seja dim$X = n$,$\{e_1, e_2, \ldots\}$ uma base para X e (x_m) uma sequência qualquer de M. Pelo lema* **??** *x_m tem a representação*

$$x_m = \xi_1^m e_1 + \xi_2^m e_2 + \ldots + \xi_n^m e_n$$

Como M é limitado temos $||x_m|| \leq k \quad \forall m$. Também pelo lema **??**,

$$k \geq ||x_m|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j^m e_j\right|\right| \geq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^m|$$

onde $c > 0$. Portanto para j fixo a sequência $(\xi_j^{(m)})$ é limitada , pelo Teorema de Bolzano- Weierstrass tem um ponto de acumulação ξ_j com $\quad 1 \leq j \leq n$. Ainda pelo lema **??** *(x_m) tem uma subsequência (z_m) onde $z_m \to z = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$. Como M é fechado, $z \in M$. Portanto M é compacto.*

Lema de F. Riesz 2.3.1 *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (de qualquer dimensão) e suponha que Y é fechado e um subconjunto próprio de Z. Então $\forall \beta$ real no intervalo $(0, 1)$ existe um $z \in Z$ tal que*

$$||z|| = 1, \quad ||z - y|| \geq \beta \quad \forall y \in Y$$

Prova: Consideremos $v \in Z - Y = \{v \in X; v \in Z \text{ e } v \notin Y\}$ e denotamos sua distancia a y por a, i. e.,

$$a = \inf_{y \in Y} ||v - y||$$

Como Y é fechado temos $a > 0$. Tomemos agora qualquer $\beta \in (0, 1)$. Pela definição de ínfimo $\exists y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq ||v - y_0|| \leq \frac{a}{\beta} \quad \left(\frac{a}{\beta} > a \text{ pois } 0 < \beta < 1\right)$$

Seja $z = c(v - y_0)$ com $c = \dfrac{1}{||v - y_0||}$.

Então $||z|| = \left|\left|\dfrac{(v - y_0)}{||v - y_0||}\right|\right| = \dfrac{||v - y_0||}{||v - y_0||} = 1$, mostremos que $||z - y|| \geq \beta \quad \forall y \in Y$. Ou seja,

$$||z - y|| = ||c(v - y_0) - y|| = c||v - y_0 - c^{-1}y||$$

Tomemos $y_1 = y_0 + c^{-1}y \in Y$*. Portanto* $||z-y|| = c||v-y_1||$*. E* $||v-y_1|| \geq a$ *pela maneira como a foi definido. Então*

$$||z-y|| = c||v-y_1|| \geq c.a = \frac{a}{||v-y_0||} \geq \frac{a}{a/\beta} = \beta$$

Como $y \in Y$ *foi arbitrário, a demonstração está concluída.*

Como "recíproca" do lema anterior será enunciado o seguinte teorema:

Teorema 2.3.2 *Se um espaço normado* X *tem a propriedade que a bola unitária e fechada* $M = \{x\ ;\ ||x|| \leq 1\}$ *é compacta, então* X *é de dimensão finita.*

2.4 Operadores lineares limitados e contínuos

Definição 2.4.1 *Sejam* X *e* Y *espaços normados e* $T : D(T) \longrightarrow Y$ *um operador linear, onde* $D(T) \subset X$*. O operador* T *é dito limitado se existe um número real* c *tal que*

$$||Tx|| \leq c||x|| \tag{2.5}$$

*A equação (**??**) mostra que um operador linear limitado leva* $D(T)$ *(um conjunto limitado) em* Y *(outro conjunto limiado).Por essa razão é usado o termo "limitado". Observe que devemos encontrar o menor* c *possível de modo que (**??**) continue verdadeiro* $\forall x \in D(T)$*. A nossa primeira possibilidade é o caso em que* $x = 0$*, ou seja,* $x = 0 \Rightarrow Tx = T0 = 0$*. Agora para* $x \neq 0$ *temos de (**??**)*

$$\frac{||Tx||}{||x||} \leq c \tag{2.6}$$

Então c *deve ser tão grande quanto o supremo de (**??**), com domínio sendo* $D(T) - \{0\}$*. Portanto o menor* c *possível é esse supremo denotado por*

$$||T|| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{||Tx||}{||x||} \tag{2.7}$$

onde $||T||$ *é chamado a norma do operador* T *. Se* $D(T) = \{0\}$ *definimos* $||T|| = 0$*, pois* $T = 0$ *já que* $T0 = 0$*.*

*Observe que em (**??**) com* $c = ||T||$ *obtemos*

$$||Tx|| \leq ||T||||x||. \tag{2.8}$$

Lema 2.4.1 *Seja T um operador linear como na definição (**??**). Então*

1.
$$||T|| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in D(T)}} \frac{||Tx||}{||x||}$$
tem como fórmula alternativa
$$||T|| = \sup_{\substack{||x||=1\\ x\in D(T)}} ||Tx|| \tag{2.9}$$

2. *A expressão definida em (**??**) satisfaz as condições da norma.*

Prova:

- *Denotemos $||x|| = a$ e $y = \frac{1}{a}x$, onde $x \neq 0$. Então*
$$||y|| = \left|\left|\left(\frac{1}{a}\right)x\right|\right| = \frac{||x||}{||x||} = 1$$
Como T é linear por hipótese. Então
$$||y|| = \sup_{x\neq 0} \frac{1}{a}||Tx|| = \sup_{x\neq 0}\left|\left|T\left(\frac{1}{a}\right)x\right|\right| = \sup_{||x||=1} ||Ty||$$
*Trocando y por x obtemos (**??**).*
- *Mostremos que a expressão **??** define uma norma.*

(a)
$$||T|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} \geq 0 \quad x \in D(T)$$

(b) $||T|| = 0 \Leftrightarrow T = 0$
$$||T|| = 0 \Rightarrow \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in D(T)}} \frac{||Tx||}{||x||} = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow T = 0$$

(c) $||\alpha T|| = |\alpha|||T|| \quad \alpha \in \mathbb{R}$
$$\sup_{||x||=1} ||\alpha Tx|| = \sup_{||x||=1} |\alpha|||Tx|| = |\alpha| \sup_{||x||=1} ||Tx||$$

(d) $||T_1 + T_2|| \leq ||T_1|| + ||T_2||$

$$\begin{aligned} ||T_1x + T_2x|| &\leq ||T_1x|| + ||T_2x|| \\ \sup_{||x||=1} ||T_1x + T_2x|| &\leq \sup_{||x||=1} ||T_1x|| + ||T_2x|| \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então todo operador linear em X é limitado.*

Prova:Seja a $dimX = n$ e $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base para X. Seja $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ uma combinação linear qualquer dos vetores da base e consideremos um operador linear qualquer T em X. Já que T é linear

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \left|\left|T\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j T e_j\right|\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| ||Te_j|| \\ &\leq \max_k ||Te_k|| \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \end{aligned} \tag{2.10}$$

*Usando o lema (**??**) com temos*

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right|\right| &\geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \\ \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| &\leq \frac{1}{c} \left|\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right|\right| \\ &\leq c||x|| \end{aligned} \tag{2.11}$$

*De (**??**) e (**??**) temos $||Tx|| \leq \eta ||x||$ onde*

$$\eta = \frac{1}{c} \max_k ||Te_k|| \tag{2.12}$$

*De (**??**) e (**??**) comprovamos que T é limitada.*

Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador qualquer, não necessariamente linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados, o operador T é contínuo em $x_0 \in D(T)$ se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||Tx - Tx_0|| < \varepsilon \quad \forall x \in D(T)$$

T é conínua se T é contínua $\forall x \in D(T)$. No caso em que T é linear temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4.2 *Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y são espaços normados. Então*

1. *T é contínua se, e somente se T é limitada;*
2. *Se T é contínua em um ponto singular, então T é contínua.*

*Prova:(**??**.) Para $T = 0$ o resultado é imediato. Para $T \neq 0$ temos $||T|| \neq 0$. Suponhamos que que T é limitada e consideremos $x_0 \in D(T)$. Dado $\varepsilon > 0$ e como T é linear, $\forall x \in D(T)$;$||x - x_0|| < \delta$ onde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{||T||}$. E obtemos*

$$\begin{aligned} ||Tx - Tx_0|| &= ||T(x - x_0)|| \\ &\leq ||T||||x - x_0|| \\ &\leq ||T||\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, T é contínua.

Suponha que T é contínua num $x_0 \in D(T)$ qualquer.Então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$||x - x_0|| \leq \delta \Rightarrow ||Tx - Tx_0|| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D(T) \tag{2.13}$$

Tome $y \neq 0 \in D(T)$ qualquer e estabeleça

$$x = x_0 + \frac{\delta}{||T||}y.$$

Então

$$||x - x_0|| = \left|\left|\frac{\delta}{||y||}y\right|\right| = \frac{\delta}{||y||}y||y|| = \delta$$

*E usando (**??**) juntamente com a hipótese de T ser linear obtemos*

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| = \left|\left|T\left(\frac{\delta}{||y||}y\right)\right|\right| = \frac{\delta}{||y||}||Ty||$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{||y||}||Ty|| &\leq \varepsilon \\ ||Ty|| &\leq \frac{\varepsilon}{\delta}||y|| \end{aligned}$$

Tomando $c = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$ *teremos* $||Ty|| \leq c||y||$. *Portanto,* T *é limitada.*

*(**??**.) A continuidade de* T *num ponto implica na limitação de* T *pela segunda parte da demonstração de (**??**.).Agora usando a primeira parte de (**??**.) teremos a contiuidade em (**??**.).*

2.5 Funcionais lineares

Definição 2.5.1 *Um funcional linear* f *é um operador linear cujo domínio é um espaço vetorial* X *e contradomínio o corpo escalar* K *de* X. *Assim* $f : D(f) \longrightarrow K$, *onde* $K = \mathbb{R}$ *se* X *é real e* $K = \mathbb{C}$ *se* X *é complexo.*

Definição 2.5.2 *Um funcional linear limitado é um operador com contradomínio no corpo escalar do espaço normado* X *no qual o domínio existe.Assim existe um número real* c *tal que* $\forall x \in D(T)$,

$$|f(x)| \leq c||x||$$

Além disso, a norma de f *é dada por:*

$$||f|| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in D(T)}} \frac{||f(x)||}{||x||} \tag{2.14}$$

ou

$$||f|| = \sup_{||x||=1} |f(x)| \tag{2.15}$$

*Na definição (**??**) a fórmula (**??**) agora implica*

$$|f(x)| \leq ||f||||x||.$$

*Como um caso particular do Teorema (**??**) temos*

Teorema 2.5.1 *Um funcional linear* f *com domínio* $D(f)$ *num espaço normado é contínuo se, e somente se* f *é limitado.*

Observe que o conjunto de todos os funcionais lineares definidos num espaço vetorial X podem ser por si só um espaço vetorial. Este espaço é denotado por X^* e chamado de espaço dual algébrico de X. Como este espaço é vetorial, temos que a soma de dois funcionais ainda é um funcional S cujo valor $\forall x \in X$ é definido como $S(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

O produto αf de um escalar α por um funcional f é um funcional G cujo valor em $x \in X$ é : $G(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Consideremos agora o dual de $(X^*)^*$ de X^*, cujos elementos são funcionais lineares definidos em X^*.Denotamos $(X^*)^*$ por X^{**} que é chamado de espaço bidual algébrico. Vejamos então a notação dos conjuntos X^{**} e X^* :

$$X^* = \left\{ \begin{array}{llcc} x \in X; & f: X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \quad\; x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right\}$$

E

$$X^{**} = \left\{ \begin{array}{llcc} f \in X^*; & g: X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \quad\; f & \longmapsto & g(f) \end{array} \right\}$$

Podemos obter um $g \in X^{**}$, que é um funcional linear definido em X^*, fixando $x \in X$ e escrevendo

$$g(f) = g_x(f) = f(x) \tag{2.16}$$

Onde temos $x \in X$ fixo e $f \in X^*$ variável. O g_x como definido em (**??**) é linear, i. e.,

$$g_x(\alpha f_1 + \beta f_2) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha g_x(f_1) + \beta g_x(f_2)$$

Portanto g_x é um elemento de X^{**}, pela definição de X^{**}.

Observe que para cada $x \in X$ existe um $g_x \in X^{**}$. Isso define uma função

$$\begin{array}{cccc} C: & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & g_x \end{array}$$

C é chamada a função canônica de X em X^{**}. C é linear já que seu domínio é um espaço vetorial . Aqui temos $C(x) = g_x$ e $C(x)(f) = f(x)$. Então provemos que $C(\alpha x + y) = \alpha C(x) + C(y)$, ou seja,

$$\begin{aligned} C(\alpha x + y) &= g_{\alpha x + y} \\ C(\alpha x + y)(f) &= g_{\alpha x + y}(f) \\ &= f(\alpha x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha f(x) + f(y) \\
&= \alpha g_x(f) + g_y(f) \\
&= (\alpha g_x + g_y)(f) \\
&= (\alpha g_x + g_y) \\
&= \alpha C(x) + C(y)
\end{aligned}$$

Como a função canônica é injetiva e linear, ela é um isomorfismo de X em $R(C) \subset X^{**}$. Se C é sobrejetiva (portanto bijetiva), temos $R(C) = X^{**}$, então X é dito algebricamente reflexivo.

2.6 Operadores lineares e funcionais em espaços de dimenção finita

Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita sobre o mesmo corpo e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Escolhamos uma base $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ para X e uma base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ para Y com os vetores numa ordem fixa. Então todo $x \in X$ tem uma única representação

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \tag{2.17}$$

Já que T é linear, a imagem de x é da forma:

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T e_k \tag{2.18}$$

Como a representação em (**??**) é única, resulta que T é unicamente determinado se as imagens $y_k = Te_k$ dos n vetores da base E são determinados.

Como y e y_k estão em Y, suas representações são únicas , ou seja

$$y = \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j \tag{2.19}$$

$$Te_k = \sum_{j=1}^{r} A_{jk} b_j \tag{2.20}$$

E substituindo em (**??**) obtemos:

$$y = \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T e_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{k=1}^{n} T e_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{r} A_{jk} b_j \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk} \alpha_k \right) b_j
\end{aligned}
$$

Como os b_j's formam um conjunto LI, seus coeficientes tem que ser iguais, i. e.,

$$\beta_j = \sum_{j=1}^{r} A_{jk}\alpha_k \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{2.21}$$

Com isso temos o seguinte resultado:

A imagem $y = Tx = \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j$ de $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ podem ser obtidos de (**??**). Os coeficientes A_{jk} em (**??**) formam uma matriz

$$T_{EB} = (A_{jk}).$$

Dadas as bases E e B de X e Y, respectivamente, cujos elementos obedecem a uma ordem definida de forma arbitrária porém fixada, então a matriz T_{EB} é unicamnte determinada pelo operador T. Dizemos que a matriz T_{EB} representa o operador com respeito a essas bases.

Tomando os vetores $\tilde{x} = (\alpha_k)$ e $\tilde{y} = (\beta_j)$ escrevemos (**??**) da forma

$$\tilde{y} = \sum_{j=1}^{r} A_{jk}\tilde{x}$$

Semelhantemente, (**??**) também pode ser escrito em notação matricial como

$$Te = {T_{EB}}^T b.$$

Nos encotramos agora no caso dos funcionais lineares definidos em X, onde $dimX = n$ e $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de X.Esses funcionais constituem o espaço dual algébrico X^* de X. Para todo funcional f e $\forall x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ temos

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j \tag{2.22}$$

onde $f(e_j) = \eta_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$ e f é unicamente determinada por seus η_j's nos n vetores da base de X.

Do contrário, toda n-upla de escalares $\eta_1, \ldots, \eta_n$ determina um funcional linear em X por (**??**). Em particular, tome as n-uplas da seguinte maneira:

$$\begin{array}{cccc} (1 & 0 & \cdots & 0) \\ (0 & 1 & \cdots & 0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (0 & 0 & \cdots & 1) \end{array}$$

Por (**??**) obtemos n funcionais $f_1, \ldots, f_n$ com valores

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 \quad , \quad se \quad j \neq k \\ 1 \quad , \quad se \quad j = k \end{cases} \tag{2.23}$$

Teorema 2.6.1 *Seja X um espaço vetorial n-dimansional e $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de X. Então $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ dado por (**??**) é uma base para o dual algébrico X^* de X, e $dimX^* = dimX$.*

Prova: F é um conjunto LI já que

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(x) = 0 \qquad (x \in X) \tag{2.24}$$

Com $x = e_j$ dado

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \delta_{jk} = \xi_j = 0$$

*Por (**??**)*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \eta_j \qquad \forall x \in X$$

E,

$$f_j(x) = f_j(\eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n) = \eta_j$$

E também

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x)$$

Portanto a única representação de para o funcional linear qualquer em X em termos da base é

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$$

Lema 2.6.1 *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita. Se $x_0 \in X$ tem a propriedade que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x_0 = 0$.*

*Prova:Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base para X e $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_{0j} e_j$. Então (**??**) torna-se*

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{0j} \eta_j$$

onde $f(e_j) = \eta_j$. Por hipótese isso é igual a zero $\forall f \in X^*$, ou seja, para toda escolha dos $\eta_1, \ldots, \eta_n$.Portanto todos ξ_{0j} tem que ser zero.

2.7 Espaço Dual

Definição 2.7.1 *Seja X um espaço normado. Então o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constitui um espaço normado com a norma definida por*

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||f(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)| \qquad x \in X$$

que é chamado de espaço dual de X e denotado por X'.

Os dois teoremas apresentados a seguir são resultados importantes no caso do conjunto $B(X, Y)$ cujos elementos são todos os operadpres lineares de X em Y, onde X e Y são espaços normados. Este pode ser por si só um espaço normado (como veremos nos resultaods seguintes).Primeiramente teremos que toda bola $B(X,Y)$ torna-se um espaço vetorial se definirmos a soma $T_1 + T_2$ de dois operadores $T_1, T_2 \in B(X,Y)$ da forma

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

e o produto βT de $T \in B(X,Y)$ por um escalar α como

$$(\beta T)x = \beta Tx.$$

Teorema 2.7.1 *O espaço vetorial $B(X,Y)$ é por si próprio um espaço normado com a norma definida por*

$$||T|| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ (x \in X)}} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{\substack{||x||=1 \\ (x \in X)}} ||Tx||$$

O próximo teorema tem grande importancia para comprovar em quais casos o conjunto $B(X,Y)$ pode ser um espaço de Banach. E o que é interessante na condição desse Teorema é que X pode ou não ser completo.

Teorema 2.7.2 *Se Y é um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é um espaço de banach.*

Os dois últimos resultados se aplicam ao teorema:

Teorema 2.7.3 *O espaço dual X' de um espaço de Banach X é um espaço de Banach (se X for ou não).*

O próximo resultado (Teorema de Hahn-Banach) é uma ferramenta muito utilizada em Análise Funcional. É um Teorema de extensão para funcionais lineares. Em geral, num problema de extensão considera-se um objeto matemático (por exemplo, uma funsão) definida num subconjunto Z de um dado conjunto X e é preciso extender esse objeto de Z para o conjunto maior, ou seja, X de tal maneira que certas propriedades básicas desse objeto continuem mantendo-se para o objeto extendido.

No teorema de Hahn-Banach o objeto a ser extendido é um funcional linear f definido num subespaço Z de um espaço vetorial X e tem uma certa propriedade de limitação.

Por definição este é um funcional p em X que é subaditivo, ou seja

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$$

e positivo-homogêneo, ou seja

$$p(\alpha\, x) = \alpha\, p(x) \quad \forall \alpha \geq 0 \; em \; \mathbb{R} \; e \; x \in X.$$

Assumimos ainda que o funcional f extendido é majorado pelo funcional p em X, e extende-se f de Z para X sem perder a linearidade e a majoração por p. vejamos agora o enunciado formal de tal teorema.

Teorema 2.7.4 (Teorema de Hahn-Banach)

Seja X um espaço vetorial e p um funcional sublinear em X. Além disso, seja f um funcional linear definido num subespaço Z de X e satisfaz

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Z \tag{2.25}$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z em X satisfazendo

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X \tag{2.26}$$

*Ou seja, $\tilde{f}$ é um funcional linear em X satisfazendo (**??**) em X e $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in Z$.*

Capítulo 3

Espaços com Produto Interno Espaços de Hilbert

3.1 Espaço com Produto Interno Espaços de Hilbert

A seguir, apresentaremos, um tipo especial de espaço de Banach que tem propriedade geométricas bastante ricas.

Definição 3.1.1 *Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X com um produto interno definido em X.Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno (completo numa métrica definida pelo produto interno.) Aqui um produto interno em X é uma função $f : X \times X \longrightarrow K$ onde k é o corpo escalar, ou seja,*

$$\begin{array}{rccc} f: & X \times X & \longrightarrow & K \\ & (x,y) & \longmapsto & <x,y> \end{array} \qquad \forall x,y \in X$$

tal que $\forall x, y, z$ e α escalar temos

1. $<x+y,z>=<x,z>+<y,z>$
2. $<\alpha x,y>=\alpha<x,y>$
3. $<x,y>=\overline{<y,x>}$
4. $<x,x>\geq 0$ e $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$

Um produto interno em X define uma norma em X dada por

$$||x|| = \sqrt{< x, y >}$$

e a métrica

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{< x - y; x - y >}.$$

Logo os espaços com produto interno são espaços normados, e os espaços de Hilbert são espaços de Banach.

*De (**??**) a (**??**) obtemos as fórmulas*

$$\begin{aligned} < \alpha x + \beta y, z > &= \alpha < x, z > + \beta < y, z > && (3.1) \\ < x, \alpha y > &= \overline{\alpha} < x, y > && (3.2) \\ < x, \alpha y + \beta z > &= \overline{\alpha} < x, y > + \overline{\beta} < x, z > && (3.3) \end{aligned}$$

Também temos que a norma num espaço com produto interno satisfaz a importante igualdade do paralelogramo a seguir

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Definição 3.1.2 *Um elemento x de um espaço com produto interno X é dito ortogonal com um elemento $y \in X$ se*

$$< x, y >= 0$$

O lema abaixo é muito utilizado na teoria da Análise Funcional no que diz respeito aos espaços com produto interno.

Lema 3.1.1 *Um produto interno e a norma correspondente satisfazem as desigualdades de Schwarz e Triangular como segue*

$$\begin{aligned} | < x, y > | &\leq ||x||||y|| && (3.4) \\ ||x + y|| &\leq ||x|| + ||y|| && (3.5) \end{aligned}$$

*As desigualdades (**??**) e (**??**) são as chamadas desigualdades de Schwarz e Triangular, respectivamente.*

3.2 Representação de Funcionais em Espaços de Hilbert

É importante sabermos a forma geral dos funcionais lineares limitados em vários espaços. Nos espaços de Banach em geral tais fórmulas podem ser complicadas. Entretanto ,no caso dos espaços de Hilbert a situação é bem mais simples como se verifica no seguinte teorema:

Teorema de Riesz 3.2.1 *Todo funcional linear limitado f num espaço de Hilbert H pode ser representado em termos do produto interno, i. e.,*

$$f(x) =< x, z > \tag{3.6}$$

onde z que depende de f, é unicamente determinado por f e tem norma

$$||z|| = ||f|| \tag{3.7}$$

Lema 3.2.1 *Se $< v_1, w >=< v_2, w >$ para todo w num espaço com produto interno X, então $v_1 = v_2$. Particularmente, se $< v_1, w >= 0$ para todo $w \in X$, então $v_1 = 0$.*

Prova: Por suposição, $\forall w$,

$$< v_1 - v_2, w >=< v_1, w > - < v_2, w >= 0$$

para $w = v_1 - v_2$, temos $||v_1 - v_2||^2 = 0$. Portanto $v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$. Em particular $< v_1, w >= 0$ com $w = v_1$ resulta em $||v_1||^2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$.

Definição 3.2.1 (forma sesquilinear) *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $K(K = \mathbb{R} \quad ou \quad K = \mathbb{C})$. Então a forma sesquilinear (ou funcional sesquilinear) h em $X \times Y$ é uma funcão*

$$h : X \times Y \longrightarrow K$$

tais que $\forall x, x_1, x_2 \in X$ e $\forall y, y_1, y_2 \in Y$ e $\forall \alpha, \beta$ escalares temos

1. $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$;
2. $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$;
3. $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$;

4. $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y.)$

Portanto h é linear no primeiro argumento e conjugado linear no segundo. Se X e Y são epaços normados e se existe um número real c tal que $\forall x, y$

$$|h(x,y)| \leq c||x||||y||$$

então h é dito limitado, e o número

$$||h|| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||||y||} = \sup_{\substack{||x||=1 \\ ||y||=1}} |h(x,y)| \tag{3.8}$$

é chamado de norma de h.

Teorema 3.2.1 (Representaçõa de Riesz) *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $h : H_1 \times H_2 \longrightarrow K$ uma forma sesquilinear limitada. então h tem uma representação*

$$h(x,y) = < Sx, y > \tag{3.9}$$

onde $S : H_1 \longrightarrow H_2$ é um operador linear limitado. S é unicamente determinada por h e tem norma

$$||S|| = ||h||$$

Prova: Consideremos

$$\begin{array}{rccc} \overline{h}: & H_1 \times H_2 & \longrightarrow & \overline{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & \overline{h(x,y)} \end{array}$$

Isso é linear em y por causa da barra, ou seja,

$$\begin{aligned} \overline{h}(x, y_1 + y_2) &= \overline{h(x, y_1 + y_2)} \\ &= \overline{h(x,y_1) + h(x,y_2)} \\ &= \overline{h(x,y_1)} + \overline{h(x,y_2)} \\ &= \overline{h}(x,y_1) + \overline{h}(x,y_2) \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \overline{h}(x, \beta y) &= \overline{h(x, \beta y)} \\ &= \overline{\overline{\beta} h(x, \beta y)} \\ &= \beta \overline{h(x,y)} \\ &= \beta \overline{h}(x,y) \end{aligned}$$

*Para aplicarmos o Teorema (**??**) fixaremos x. Então esse teorema fornece uma representação em que y é variável,*

$$g(y) = \overline{h(x,y)}$$

tal que

$$g(y) =< y, z >= \overline{h(x,y)} \Rightarrow h(x,y) = \overline{< y, z >} =< z, y > \tag{3.10}$$

*Aqui $z \in H_2$ é único mas, é claro, depende de $x \in H_1$ fixado. Segue de (**??**) que a variável x define um operador*

$$\begin{array}{rccc} S: & H_1 & \longrightarrow & H_2 \\ & x & \longmapsto & z = Sx \end{array}$$

*Substituindo $z = Sx$ em (**??**) teremos (**??**).*

*S é linear.De fato, seu domínio é o espaço vetorial H_1 e de (**??**) e a sesquilinearidade obtemos*

$$\begin{aligned} < S(\alpha x_1 + \beta x_2), y > &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) \\ &= \alpha < Sx_1, y > + \beta < Sx_2, y > \\ &= < \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y > \end{aligned}$$

*Pelo lema (**??**)*

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2$$

*S é limitada. De fato, o caso $S = 0$ é imediato, mas para $S \neq 0$ temos de (**??**) e (**??**)*

$$||h|| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{||x||||y||} = \sup_{\substack{||x||=1 \\ ||y||=1}} |h(x,y)|$$

e

$$h(x,y) =< Sx, y >$$

Dos conjuntos $A = \left\{ \frac{| < Sx, y > |}{||x||||y||}; x \neq 0, y \neq 0 \right\}$ e $B = \left\{ \frac{| < Sx, Sx > |}{||x||||Sx||}; x \neq 0, Sx \neq 0 \right\}$ temos $A \subseteq B$. E portanto

$$\begin{aligned}
||h|| &= \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|<Sx,y>|}{||x||||y||} \\
&\geq \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{|<Sx,Sx>|}{||x||||Sx||} \\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{||Sx||^2}{||x||||Sx||} \\
&= \sup_{\substack{x\neq 0\\ Sx\neq 0}} \frac{||Sx||}{||x||} = ||S||
\end{aligned}$$

Isso prova a limitação. E mais, $||h|| \geq ||s||$. *Agora note que aplicando a desigualdade de Schwarz temos*

$$||h|| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \frac{|<Sx,y>|}{||x||||y||} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{|||Sx||||y|||}{||x||||y||} = ||S||$$

Logo $||h|| = ||S||$.

Unicidade de S.

Suponhams que existe um operador linear $T : H_1 \longrightarrow H_2$ *tal que* $\forall x \in H_1$ *e* $\forall y \in H_2$ *temos*

$$h(x,y) =< Sx, y >=< Tx, y >$$

*Então pelo Lema (**??**)* $Sx = Tx \quad \forall x \in H_1$. *Logo* $S = T$ *por definição.*

Capítulo 4

Espaços L^p

4.1 Espaço L^p

Em um certo momento é necessários inserir a estrutura de um espaço de Banach no conjunto de todas as funções integráveis de um espaço mensurável. É dessa forma que introduzimos os espaços L^p. Estes , são extremamente úteis na definição e construção de outros espaços com os espaços de Sobolev.

Aqui Ω é um aberto do $\mathbb{R}^N$ munido da medida de
Lebesgue dx. Designamos por L^1 o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ cuja norma é dada por:

$$||f||_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx$$

Duas funções em L^1 coincidem exceto num conjunto de medida nula.

Serão apresentados agora alguns resultados de integração extremanente úteis ao longo desse capítulo.

Teorema 4.1.1 (Teorema da cconvergencia monótona de Beppo Levi) *Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que $\sup_n \int f_n < \infty$. Então $f_n(x)$ converge q.t.p. em Ω, isto é, $f_n(x) \to f(x)$ onde $f(x)$ é um limite finito. Além disso $f \in L^1$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$.*

Teorema 4.1.2 (Teorema da convergencia dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1. Suponhamos que:*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;*

2. *existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \le g(x)$ q.t.p em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$

Lema 4.1.1 (Lema de Fatou)
Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que

1. *para cada n, $f_n(x) \ge 0$ q.t.p. em Ω ;*

2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

Para cada $x \in \Omega$ escreve-se $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n$. Então $f \in L^1$ e

$$\int f \le \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n$$

Notação: Designamos por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas de Ω y com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega \backslash K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ é um compacto}\}$$

Teorema 4.1.3 (Teorema da densidade)
O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$, ou seja,

$$\forall f \in L^1 \quad e \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists f_1 \in C_c(\Omega) \text{ tal que } ||f - f_1||_{L^1} < \varepsilon$$

Sejam $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos e seja $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável.

Teorema 4.1.4 (Tonelli)
Suponhamos que

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)|dy < \infty$$

para quase todo $x \in \Omega_1$ e que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)|dy < \infty$$

Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Teorema 4.1.5 (Fubini)
Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Então para quase todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \;\; e \;\; \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

Igualmente para quase todo $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \;\; e \;\; \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

Além disso se verifica

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} |F(x,y)|dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |F(x,y)|dx\, dy$$

4.2 Deinição e Propriedades dos Espaços L^p

Definição 4.2.1 *Seja* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leq p < \infty$; *se define*

$$L^p = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\; f \text{ é mensuravél e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

E cuja norma é definida por:

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição 4.2.2 *Se define*
$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensuravél e existe uma constante* C *tal que* $|f(x)| < C$ *q.t.p. em* $\Omega\}$
Cuja norma é definida por

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C \;;\; |f(x)| \leq C \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega\}$$

A seguinte observação afirma que uma função em L^∞ está limitada pela sua própria norma.

Observação 4.2.1 *Se* $f \in L^\infty$*, então*

$$|f(x)| \leq ||f||_{L^\infty} \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$$

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$; se designa por $p^{'}$ o expoente conjugado de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$

Teorema 4.2.1 (Desigualdade de Hölder)

Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1$ e

$$\int |f\ g| \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^{p'}} \tag{4.1}$$

Demonstração:

1. *Se $p = 1$ teremos $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$, donde $fg \in L^1$ e*

$$\int |f\ g| \leq \int |f(x)\ g(x)| \leq ||g||_{L^\infty} \int |f(x)| = ||g||_{L^\infty} ||f||_{L^1}$$

2. *Para $p = \infty$ o caso é análogo.*

3. *Para $1 < p < \infty$ recordemos a desigualdade de Young.*

$$a\ b \leq \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p^{'}}\ b^{p^{'}} \qquad \forall a \geq 0 \qquad \forall b \geq 0 \tag{4.2}$$

Temos que a função $\log$ *é côncava no intervalo* $]0, \infty[$ *temos*

$$\log\left(\frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p^{'}}\ b^{p^{'}}\right) \geq \frac{1}{p} \log\ a^p + \frac{1}{p^{'}} \log\ b^{p^{'}} = \log\ a\ b$$

Suponha que $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ e que $||f||_{L^p} \neq 0$ e $||g||_{L^{p'}} \neq 0$ Claramente $f\ g$ é mensurável . Tomando
$a = \frac{|f(x)|}{||f||_{L^p}}$ *e* $b = \frac{|g(x)|}{||g||_{L^{p'}}}$
temos que

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p||f||_{L^p}} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'||g||_{L^{p'}}} \qquad q.t.p \quad x \in \Omega \tag{4.3}$$

*De onde resulta que $fg \in L^1$. Integrando (**??**) obtemos*

$$\int \frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}} \leq \int \frac{|f(x)|^p}{p||f||_{L^p}} + \int \frac{|g(x)|^{p'}}{p'||g||_{L^{p'}}}$$

$$\int \frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}} \leq \frac{\int |f(x)|^p}{p \int |f(x)|^p} + \frac{\int |g(x)|^{p'}}{p' \int |g(x)|^{p'}}$$

$$\frac{1}{||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}} \; ||f \; g||_{L^1} \leq 1$$

E resulta que

$$||f \; g||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}$$

Uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder é o seguinte resultado:
Sejam $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ funções tais que

$$f_i \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \;\; com \;\; \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1.\, f_2 \ldots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$||f||_{L^p} = ||f_1||_{L^{p_1}} \ldots ||f_k||_{L^{p_k}}$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e verifica-se a desigualdade da interpolação

$$||f||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^{\alpha} ||f||_{L^q}^{1-\alpha}$$

donde

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

Teorema 4.2.2 *L^p é um espaço vetorial e $||.||_{L^p}$ é uma norma para todo* $1 \leq p \leq \infty$

Demonstração: O espaço L^p é subespaço vetorial do espaço vetorial das funções $F = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}$ cuja soma é definida por:

$$\begin{array}{rccc} + \; : & F \times F & \longrightarrow & F \\ & (f, g) & \longmapsto & f + g \end{array}$$

E o produto

$$\begin{array}{rccc} . : & \mathbb{R} \times F & \longrightarrow & F \qquad k \in \mathbb{R} \\ & (k, g) & \longmapsto & kg \end{array}$$

Para $p = 1$ *e* $p = \infty$ *temos que* L^1 *e* L^∞ *são espaços vetoriais normados. Agora, suponha que* $1 < p < \infty$ *e sejam* f , $g \in L^p$, *então* $f + g \in L^p$. *De fato,*

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (2|\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|, |g(x)|\}|^p \leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p)$$

e integrando teremos

$$\int |f(x) + g(x)|^p dx \leq 2^p(\int |f(x)|^p + \int |g(x)|^p) < \infty$$

E como a soma de funções mensuráveis ainda é uma função mensurável resulta que $f + g \in L^p$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f \in L^p$. *Então* $\alpha f \in L^p$. *De fato, já temos que* αf *é mensurável e*

$$|\alpha f(x)|^p = |\alpha|^p |f(x)|^p$$

e integrando temos

$$\int |\alpha f(x)|^p = |\alpha|^p \int |f(x)|^p < \infty$$

Portanto, $\alpha f \in L^p$. *A norma em* L^p *é definida por*

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

De fato,

1. $||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$
2. $||f||_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *De fato,*

   $f = 0$ *é mensurável e* $||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |0(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$

   $||f||_{L^p} = 0 \Leftrightarrow \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \int_\Omega |f(x)|^p = 0 \Rightarrow f = 0$

3. $||\alpha f||_{L^p} = |\alpha| ||f||_{L^p}$. De fato, $||\alpha f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |\alpha f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\alpha|^p |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| ||f||_{L^p}$

4. $||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$ (desigualdade de Minkowski)

$$\begin{aligned} ||f+g||^p_{L^p} &= \int_\Omega |(f+g)(x)|^p \\ &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p \\ &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)| \end{aligned} \tag{4.4}$$

Verifiquemos que $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$. Daí temos que $(|f+g|^{p-1})^{p'} = |(f+g)^{\frac{p}{p'}}|^{p'} = |f+g|^p$ e como mostramos que $f+g \in L^p$ temos que

$$\left|\int |f+g|^{p-1}\right|^{p'} = \int |f+g|^p < \infty$$

Logo $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$. E assim

$$\int |(f+g)(x)|^{p-1}|(f+g)(x)| \leq \int |(f+g)(x)|^{p-1}||f(x)| + \int |(f+g)(x)|^{p-1}|g(x)|$$

Daí segue

$$\begin{aligned} ||f+g||^p_{L^p} &\leq ||f+g||^{p-1}_{L^p}||f||_{L^p} + ||f+g||^{p-1}_{L^p}||g||_{L^p} \\ ||f+g||^{p-p+1}_{L^p} &\leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p} \\ ||f+g||_{L^p} &\leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p} \end{aligned}$$

Teorema 4.2.3 (Fischer-Riesz) *L^p é um espaço de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$

Demonstração:

1. $p = \infty$. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^∞. Então dado um inteiro $k \geq 1$ e N_k tal que

$$||f_m - f_n||_{L^\infty} \geq \frac{1}{k} \qquad m, n \geq N_k \tag{4.5}$$

Portanto existe um conjunto de medida nula E_k *tal que*

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq ||f_m - f_n||_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash E_k \quad \forall m, n \geq N_k$$

Temos que $E = \bigcup_k E_K$ *é de medida nula e* $\forall x \in \Omega \backslash E_k$ *a sequência* $(f_n(x))$ *é de Cauchy em* $\mathbb{R}$. *Seja* $f_n(x) \longrightarrow f(x)$
$\forall x \in \Omega \backslash E_k \quad \forall x \geq N_k$.

Aplicando o limite em (**??**) *quando* $m \to \infty$ *obtemos*

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E. \ \forall n \geq N_k$$

Daí temos que $f \in L^\infty$ *e* $||f - f_n||_{L^\infty} \leq \dfrac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$.

Portanto $||f - f_n||_{L^\infty} \longrightarrow 0$. *Logo* L^∞ *é de Banach.*

2. *Suponha que* $1 \leq p < \infty$. *Seja* (f_n) *uma sequência de Cauchy em* L^p. *É suficiente mostrar que* (f_n) *possui uma subsequência convergente em* L^p.*Sabemos que podemos extrair uma subsequência* (f_{nk}) *tal que*

$$||f_{nk+1} - f_{nk}|| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

Então existe n_1 *tal que* $||f_m - f_n||_{L^p} \leq \dfrac{1}{2}$ *para* $m, n \geq n_1$; *tomamos depois* $n_2 \geq n_1$ *tal que* $||f_m - f_n||_{L^p} \leq \dfrac{1}{2^2}$ *para* $m, n \leq n_2$, *e assim sucessivamente. E mostramos que* $(f_n)_k$ *converge em* L^p. *Para simplificar a notação usaremos* f_k *em vez de* f_{nk}, *de modo que*

$$||f_{k+1} - f_k|| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1 \tag{4.6}$$

Pondo $g(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$

Resulta que $||g_n||_{L^p} \leq 1$

Do teorema da convergência monótona se deduz que q.t.p em Ω, $g_n(x)$ converge a um limite, que se denota $g(x)$, com $g \in L^p$.Por outro lado, para cada $m \geq n \geq 2$ se verifica

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ldots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x)\end{aligned}$$

E disso resulta que $f_n(x)$ q.t.p. em Ω é de Cauchy e converge para um limite, denotado $f(x)$. Temos q.t.p. em Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \qquad n \geq 2 \tag{4.7}$$

E resulta que $f \in L^p$. Por último $||f_n - f|| \to 0$; de fato, tem-se $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ q.t.p. e $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ uma majorante integrável. E a conclusão vem graças ao teorema de Lebesgue.

Teorema 4.2.4 *Sejam (f_n) uma sequência em L^p e $f \in L^p$, tais que $||f_n - f|| \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

1. *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ e q.t.p. em Ω, com $h \in L^p$*

*Demonstração: Para $p = \infty$ o resultado se verifica. Suponhamos então que $1 \leq p < \infty$. Como a sequência é de Cauchy, podemos repetir a demonstração do Teorema (**??**) e extrair uma subsequência (f_{n_k}) verificando (**??**). Continuando como na demonstração do teorema (**??**) vemos que $(f_{n_k})(x)$ converge para um limite que denotamos por $f^*(x)$. Além do mais temos graças a (**??**)*

$$|f^*(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall k. \;\; q.t.p \text{ em } \Omega, \text{ com } g \in L^p$$

*de onde resulta que $f^* \in L^p$ e que $f_{n_k} \to f^*$ em L^p (pelo teorema de Lebesgue). Por conseginte $f = f^*$ q.t.p. e se obtém (**??**.). Para obter (**??**.) basta tomar $h = f^* + g$.*

Teorema 4.2.5 *L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$*

A demostração será dividida em três etapas:

1. **(Primeira desigualdade de Clarkson)** *Seja $2 \leq p < \infty$; se verifica*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_{L^p}^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(||f||_{L^p}^p + ||g||_{L^p}^p\right) \quad \forall f, g \in L^p \tag{4.8}$$

Demonstração : é suficiente demonstrar que

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

Se tem

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

(reduza ao caso $\beta = 1$ e observe que a função $(x_2 + 1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$ é crescente sobre $[0, \infty[$). Tomando $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|$ e $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|$ resulta

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leq \left(\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right|\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade resulta da convexidade da função $x \mapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ por $p \geq 2$.

2. *L^p é uniformemente convexo, e portanto reflexivo para $2 \leq p \leq \infty$. De fato, seja $\varepsilon > 0$ fixo. Suponhamos que*

$$||f||_{L^p} \leq 1 \ , \ ||g||_{L^p} \leq 1 \quad e \quad ||f-g||_{L^p} > \varepsilon$$

*E se deduz de (**??**) que*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e então

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p} < 1-\delta$$

com

$$\delta = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Como consequência L^p é uniformemente convexo e portanto reflexivo pois todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.

3. *L^p é reflexivo para $1 < p \leq 2$.*

   Demonstração: Seja $1 < p \leq 2$. Consideremos o operador $T : L^p \longrightarrow (L^p)'$ definido como segue: Seja $u \in L^p$ fixo; a aplicação $f \in L^{p'} \mapsto \int u\ f$ é uma forma linear e contínua sobre $L^{p'}$, designada Tu, de forma que

$$< Tu, f >= \int u\ f \quad \forall f \in L^{p'}$$

   temos pela desigualdade de Hölder

$$| < Tu, f > | \leq ||u||_{L^p}||f||_{L^{p'}}$$

   e então

$$||Tu||_{L^{p'}} \quad \leq \quad ||u||_{L^p} \tag{4.10}$$

   Por outra parte, ponhamos
   $f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad (f_0(x) = 0$ *se* $u(x) = 0)$
   Temos que $f_0 \in L^p$, $||f_0||_{L^{p'}} = ||u||_{L^p}^{p-1}$ e $< Tu, f_0 >= ||u||_{L^p}^p$. E então

$$||Tu||_{L^{p'}} \geq \frac{< Tu, f_0 >}{||f_0||} = ||u||_{L^p} \tag{4.11}$$

   *Comparando (**??**) e (**??**) obtemos $||Tu||_{L^{p'}} = ||u||_{L^p}$. Resulta que T é uma isometria de L^p sobre um subespaço fechado (pois L^p é completo) de $L^{p'}$. Porém L^p é reflexivo e usando o fato de que L^p é espaço de Banach e reflexivo se e, somente se $L^{p'}$ é reflexivo obtemos o resultado esperado. Segue do fato que L^p é espaço de Banach e $T(L^p) \subset L^p$ é um subespaço vetorial fechado então $T(L^p)$ com a norma induzida por L^p também é reflexivo. E portanto L^p também é reflexivo.*

Teorema 4.2.6 (Teorema da Representaç ao de Riesz)
Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p)^{'}$. Então existe $u \in L^{p^{'}}$ único tal que

$$< \varphi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^p$$

Além do mais se verifica

$$||u||_{L^{p'}} = ||\varphi||_{(L^p)'}$$

Demonstração: Definamos o operador $T \ : \ L^{p^{'}} \ \longrightarrow \ (L^p)^{'}$ *por*

$$< Tu, f >= \int uf \quad \forall f \in L^{p^{'}}$$

e se tem

$$||Tu||_{(L^p)'} = ||u||_{L^{p'}} \forall u \in L^{p^{'}}$$

*(Se procede como na demonstração do Teorema (**??**) $3^{\underline{a}}$ etapa) teremos que mostrar que T é sobrejetivo. Tomemos $E = T(L^p)$. Como E é um subespaço fechado , basta demonstrar que E é denso em $L^{p^{'}}$. seja $h \in L^{p^{''}}[= L^p$ pois L^p é $reflexivo$] tal que $< Tu, h >= 0 \quad \forall u \in L^p$; Mostermos que $h = 0$. De fato, temos*

$$\int uh =< Tu, h >= 0 \quad \forall u \in L^p.$$

e concluimos que $h = 0$ tomando $u = |h|^{p-2}h$.

Teorema 4.2.7 (Densidade)
O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em L^p para $1 \leq p < \infty$.
Comecemos com uma definição e um lema.

Definição 4.2.3 *Seja $1 \leq p \leq \infty$; se diz que uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{Loc}(\Omega)$ se $f1_k \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$*

Lema 4.2.1 *Seja $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{4.12}$$

Então $f = 0$ q.t.p em Ω
*Demonstração do Lema **??**: É dividida em duas etapas:*

1. *Suponhamos que afinal se verifica* $f \in L^1(\Omega)$ *e* $|\Omega| < \infty$. *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $f \in C_c(\Omega)$ *tal que* $||f - f_1|| < \varepsilon$. *Por (??) temos*

$$\left| \int f_1 u \right| \leq \varepsilon ||u||_{L^\infty} \quad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{4.13}$$

Sejam $K_1 = \{x \in \Omega \ ; \ f_1(x) \geq \varepsilon\}$ *e* $K_2 = \{x \in \Omega \ ; \ f_1(x) \leq -\varepsilon\}$

Como K_1 *e* K_2 *são compactos disjuntos, pode-se construir uma função* $u_0 \in C_c(\Omega)$

$$u_0(x) = \begin{cases} +1 & se \quad x \in K_1 \\ -1 & se \quad x \in K_2 \end{cases}$$

e $$|u_0(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$$

Colocando $K = K_1 \cup K_2$ *resulta*

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega \backslash K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

e assim, graças a (??)

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leq \varepsilon + \int_{\Omega \backslash K} |f_1 u_0| \leq \varepsilon + \int_{\Omega \backslash K} |f_1|$$

Por conseguinte

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega \backslash K} |f_1| \leq \varepsilon + 2 \int_{\Omega \backslash K} |f_1| \leq \varepsilon + 2\varepsilon |\Omega|$$

e que $|f_1| \leq \varepsilon$ *em* $\Omega \backslash K$

Então

$$||f||_{L^1} \leq ||f - f_1||_{L^1} + ||f_1||_{L^1} \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon |\Omega|$$

Como esta desigualdade é válida para todo $\varepsilon > 0$, *conclui-se que* $f = 0$ *q.t.p em* Ω.

2. *Consideremos agora o caso geral.Escreve-se* $\Omega = \bigcup\limits_n \Omega_n$ *com* Ω_n *aberto e* $\overline{\Omega}_n$ *compacto,* $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_n$ *[Tomar, por exemplo; dist*$(x, \complement\Omega) > \dfrac{1}{n}$

e $|x| < n$]. Aplicando o caso anterior a Ω_n e $f\,|_{\Omega_n}$ se vê que $f = 0$ q.t.p em Ω_n e conclui-se que $f = 0$ q.t.p em Ω.

*Demonstração do Teorema **??**: Sabe-se que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$. Suponhamos então que $1 < p < \infty$. Para demonstrar que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ é suficiente comprovar que se $h \in L^{p'}(\Omega)$ verifica $\int hu = 0$ $\forall u \in C_c(\Omega)$, então $h = 0$. Mas $h \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e que $\int |h1_k| \leq ||h||_{L^{p'}} |k|^{\frac{1}{p}<}\infty$ e assim podemos aplicar o Lema **??**para concluir que $h = 0$ q.t.p.*

Outra prorpiedade importante dos espaços L^p é a separabilidade, ou seja, os espaços L^p possuem um subconjunto enumerável que é denso em L^p. pelo teorema a seguir.

Teorema 4.2.8 *$L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$*

Teorema 4.2.9 *Seja $\varphi \in (L^1)'$. Então existe $u \in L^\infty$ único tal que*

$$< \varphi, f >= \int u\, f \quad \forall f \in L^1.$$

Além do mais se verifica

$$||u||_{L^\infty} = ||\varphi||_{(L^1)'}$$

*Demonstração: Comecemos demonstrando a existência de u. Se fixarmos uma função $w \in L^2(\Omega)$ tal que para todo compacto $K \subset \Omega$, $w \geq \varepsilon_k > 0$ q.t.p. em K. É claro que tal função existe: basta tomar por exemplo, $w(x) = \alpha_n$ para $x \in \Omega$, $n \leq |x| < n+1$, e ajustar as constantes $\alpha_n > 0$para que $w \in L^2$. A aplicação $f \in L^2 \longmapsto < \varphi, w\, f >$ é uma forma linear e contínua sobre L^2. Segundo o Teorema **??** (aplicado em $p = 2$) existe uma função $v \in L^2$ tal que*

$$< \varphi, wf >= \int vf \quad \forall f \in L^2 \tag{4.14}$$

*ponhamos $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$; oqual tem sentido já que $w(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$ e u é enumerável. Demonstremos que $u \in L^\infty$ e que $||u||_{L^\infty} \leq ||\varphi||_{(L^1)'}$. Por (**??**) temos*

$$|\int vf| \leq ||\varphi||_{(L^1)'} ||wf||_{L^1} \quad \forall f \in L^2 \tag{4.15}$$

Seja $C > ||\varphi||_{(L^1)'}$. *Demonstremos que o conjunto*

$$A = \{x \in \Omega\ ;\ |u(x)| > C\}$$

é de medida nula (e asssim resultará que $u \in L^\infty$ *e que* $||u||_{L^\infty} \leq ||\varphi||_{(L^1)'}$.*) Raciocinemos por absurdo. Se* A *não é de medida nula, existe* $\tilde{A} \subset A$ *mensurável tal que* $0 < |\tilde{A}| < \infty$. *Substituindo em (??) a função*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & se \quad x \in \tilde{A} \quad e \quad u(x) > 0 \\ -1 & se \quad x \in \tilde{A} \quad e \quad u(x) < 0 \\ 0 & se \quad x \in \Omega\backslash\tilde{A} \end{cases}$$

resulta $\int_{\tilde{A}} |u|w \leq ||\varphi||_{(L^1)'} \int_{\tilde{A}} w$ *e, por conseguinte* $C \int_{\tilde{A}} w \leq ||\varphi||_{(L^1)'} \int_{\tilde{A}} w$ *o qual é absurdo já que* $\int_{\tilde{A}} w > 0$.

Recapitulemos : foi construido $u \in L^\infty(\Omega)$ *com* $||u||_{L^\infty} \leq ||\varphi||_{(L^1)'}$ *tal que*

$$< \varphi, wf >= \int uwf \qquad \forall f \in L^2 \tag{4.16}$$

De onde resulta que

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in C_c(\Omega) \tag{4.17}$$

De fato, se $g \in C_c(\Omega)$, *então* $f = \dfrac{g}{w} \in L^2$ *(já que* $w \geq \varepsilon > 0$ *sobre Supp* g*) e se pode substituir* f *em (??). Como* $C_c(\Omega)$ *é denso em* L^1 *se deduz de (??) que*

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in L^1.$$

Por último temos

$$| < \varphi, g > | = \int |ug| \leq ||u||_{L^\infty} ||g||_{L^1} \qquad \forall g \in L^1$$

Logo $||\varphi||_{(L^1)'} \leq ||u||L_\infty$. *e portanto,* $||\varphi||_{(L^1)'} = ||u||_{L_\infty}$. *A unicidade de* u *é consequencia imediata do Lema (??).*

Observação 4.2.2 *O espaço L^1 não é reflexivo. De fato, suponhamos que $0 \in \Omega$. Consideremos a sequência $f_n = \alpha_n 1_{B(0,\frac{1}{n})}$ com n suficientemente grande para que $B(0,\frac{1}{n}) \subset \Omega$ e $\alpha_n = \left|B(0,\frac{1}{n})\right|^{-1}$ de modo que $||f_n||_{L^1} = 1$. Se L^1 fosse reflexivo existira uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $f \in L^1$ tal que $f_{n_k} \to f$ na topologia fraca $\sigma(L^1, L^\infty)$. Assim pois,*

$$\int f_{n_k}\varphi \to \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty. \tag{4.18}$$

*Quando $\varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$ nota-se que $\displaystyle\int f_{n_k}\varphi = 0$ para k suficientemente grande. Resulta de (**??**) que*

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \to C_c(\Omega\backslash\{0\})$$

*aplicando o Lema **??** no aberto $\Omega\backslash\{0\}$ a função f (restringida a $\Omega\backslash\{0\}$) obtemos que $f = 0$ q.t.o em $\Omega\backslash\{0\}$. E portanto $f = 0$ q.t.p em Ω. porém se $f \equiv 1$ em (**??**), resulta que $\displaystyle\int f = 1$ – o que é um absurdo.*

observemos (Teorema **??**) que $L^\infty = (L^1)'$.

Contudo, L^∞ não é reflexivo (caso contrário, L^1 seria e se sabe que L^1 não é reflexivo).

O dual de L^1 contém L^∞ (já que $(L^1)' = L^\infty$) e é estritamente maior que L^1; existem formas lineares contínuas φ sobre L^∞ que não são do tipo

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^\infty \quad com \quad u \in L^1$$

Construamos um exemplo comcreto. Suponhamos que $0 \in \Omega$ e seja $\varphi_0(f) = f(0)$ para $f \in C_c(\Omega)$. Temos que φ_0 é uma forma linear e contínua sobre $C_c(\Omega)$ para a norma $||.||_{L^\infty}$. Segundo o teorema de Hahn-Banach, φ_0 se estende a uma forma linear e contínua sobre L^∞ denotada por φ. Se verifica

$$< \varphi, f >= f(0) \quad \forall f \in C_c(\Omega) \tag{4.19}$$

Demonstremos que não existe uma função $u \in L^1$ tal que

$$< \varphi, f >= \int uf \quad \forall f \in L^\infty$$

Com efeio, se tal função existisse, teríamos

$$\int uf = 0 \quad \forall f \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$$

Em virtude do Lema **??** (aplicado sobre $(\Omega\backslash\{0\})$) obteríamos $u = 0$ q.t.p em $\Omega\backslash\{0\}$, e enão

$$< \varphi, f >= 0 \quad \forall f \in L^\infty$$

o qual contradiz (**??**).

Observação 4.2.3 *O espaço L^∞ não é separável. Para estabelecer este fato será utilizado o seguinte Lema:*

Lema 4.2.2 *Seja E um espaço de Banach. Suponhamos que existe uma família $(O_i)_{i\in I}$ tal que*

1. *Para todo $i \in I$, O_i é um aberto não vazio de E.*
2. *$O_i \cap O_j = \varnothing$ se $i \neq j$.*
3. *I não é enumerável.*

Então E não é separável.

Demonstração do Lema **??** *:Raciocinemos por absurdo, supondo que E é separável. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqência densa em E. Para cada $i \in I$, $O_i \cap (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \varnothing$ e escolhemos $n(i)$ tal que $u_{n(i)} \in O_i$. A aplicação $i \longrightarrow n(i)$ é injetiva; de fato, se $n(i) = n(j)$ então $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ e assim $i = j$. Consequentemente, I é enumerável contrariando o item (**??**).*

Demonstremos que L^∞ não é enumerável. Para todo $a \in \Omega$ fixamos $r_a < dist(a, \complement\Omega)$; pondo $u_a = 1_{B(a,r_a)}$ e

$$O_a = \left\{ f \in L^\infty \ ; \ ||f - u_a||_{L^\infty} < \frac{1}{2} \right\}.$$

*Daí temos que a família $(O_a)_{a\in\Omega}$ satisfaz os itens (**??**),(**??**) e (**??**).*

4.3 Convolução e Regularização

Teorema 4.3.1 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (aqui consideramos $\Omega = \mathbb{R}^N$) com $1 \leq p \leq \infty$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$. Define-se como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy$$

então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$$

Demonstração: A conclusão é evidente para $p = \infty$. Suponhamos primeiro que $p = 1$ e seja

$$F(x,y) = f(x-y)g(y)$$

Para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$ tem-se

$$\int |F(x,y)|\, dx = |g(y)| \int |f(x-y)| dx = ||f||_{L^1}|g(y)| < \infty$$

e

$$\int dy \int |F(x,y)| dx = ||f||_{L^1}||g||_{L^1} < \infty$$

*aplicando o Teorema de Tonelli (**??**) vemos que $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.*

*Graças ao Teorema de Fibini (**??**) obtemos*

$$\int |F(x,y)| dy < \infty \quad q.t.\ x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\int dx \int |F(x,y)| dy \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1}$$

*Isto corresponde exatamente a conclusão do Teorema (**??**). Suponhamos agora que $1 < p < \infty$. Pelo caso anterior sabemos que para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, a função $y \longmapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$, i.e.,*

$$|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$$

Como $|f(x-y)| \in L^p_y$, *deduz-se da desigualdade de Hölder que*

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\ |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1_y$$

e

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} ||f||^{\frac{1}{p}}_{L^1}$$

i.e. $|(f*g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x)\ ||f||^{\frac{p}{p'}}_{L^1}$

Aplicando o resultado do caso $p = 1$ *temos*

$$f * g \in L^p \ \ e \ \ ||f*g||^p_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||^p_{L^p}||g||^{\frac{p}{p'}}_{L^1}$$

i.e.

$$||f*g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$$

Notação : Dada uma função f *escreve-se* $\tilde{f}(x) = f(-x)$

Proposição 4.3.1 *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Então se verifica*

$$\int (f*g)h = \int g(\tilde{f} * h)$$

Demonstração : A função $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ *já que*

$$\int |h(x)| \left(\int |f(x-y)||g(y)|dy\right) dx < \infty$$

*Graças ao Teorema (**??**) e a desigualdade de Hölder.*

Por conseguinte

$$\begin{aligned} \int (f*g)(x)h(x)dx &= \int dx \int F(x,y)dy \\ &= \int dy \int F(x,y)dx \\ &= \int g(y)(\tilde{f}*h)(y)dy \end{aligned}$$

Suporte de Convolução

A noção de suporte de uma função contínua é conhecida: é o complemento do maior aberto sobre o qual f se anula (ou, igualmente, a aderência do conjunto $\{x; f(x) \neq 0\}$). Quando trabalha-se com funções mensuráveis deve-se ter mais cautela – já que estas funções estão definidas somente para quase todo ponto – e a definição já não é adequada . A definição apropriada é a seguinte :

Proposição 4.3.2 *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto e f uma função definida em Ω com valores em $\mathbb{R}$. Considera-se a família de todos os abertos $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tais que para cada $i \in I$, $f = 0$ q.t.p. em ω_i. Definimos $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Então $f = 0$ q.t.p. em ω. Por definição*

$$Supp\ f = \Omega \backslash \omega$$

Observação 4.3.1 1. *Se f_1 e f_2 são duas funções tais que $f_1 = f_2$ q.t.p. em Ω, então $Supp\ f_1 = Supp\ f_2$. Podemos desse modo falar do suporte de uma função $f \in L^p$.*

2. *Se f é contínua em Ω tem-se que esta definição coincide com a usual.*

Proposição 4.3.3 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$Supp(f * g) \subset Supp\ f\ +\ Supp\ g$$

*Demonstração : Seja $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, tal que a função $f \longmapsto f(x-y)g(y)$ sela integrável (veja Teorema (**??**).) Tem-se*

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x - Supp\ f) \cap Supp\ g} f(x-y)g(y)dy$$

Se $x \notin Supp\ f\ +\ Supp\ g$, Então $(x - Supp\ f) \cap Supp\ g = \varnothing$ e $(f*g)(x) = 0$. Por tanto

$$(f * g)(x) = 0 \text{ q.t.p. em } (Supp\ f + Supp\ g)^{\complement}$$

e em particular

$$(f * g)(x) = 0 \text{ q.t.p. em } Int\ (Supp\ f + Supp\ g)^{\complement}.$$

Em consequência, $Supp\ (f * g) \subset \overline{Supp\ f + Supp\ g}$

Observação 4.3.2 *Naturalmentente, se f e g tem ambas o suporte compacto, então $f * g$ tem suporte compacto, Em geral, se apenas um destes tiver suporte compacto, então $f * g$ não tem suporte compacto.*

Proposição 4.3.4 *Sejam $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N)$$

Demonstração : Observemos primeiro que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ a função $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$ e assim $f * g$ tem sentido para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Seja $x_n \to xy$ e ponhamos

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$

$$F(y) = f(x - y)g(y)$$

de modo que $F_n(y) \to F(y)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, seja K um compacto fixo tal que $(x_n - Supp\ f) \subset K \ \ \forall n$. Assim $f(x_n - y) = 0$ para $y \notin K$ e portanto $|F_n(y)| \leq ||f||_{L^\infty} 1_K(y)g(y)$,é uma majorante integrável.Do teorema de Lebesgue deduz-se que

$$(f * g)(x_n) = \int F_n(y)dy \to \int F(y)dy = (f * g)(x)$$

Notações: $C^k(\Omega)$ designa o sepaço das funçoes k vezes continuamente diferenciável sobre Ω.

Proposição 4.3.5 *Sejam $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$ (k inteiro). Então*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Em particular, se $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Demonstração : Por recorrência, tem-se imediatamente o caso $k = 1$.

Seja $x \in \mathbb{R}^N$ fixo; demonstremos que $f * g$ é diferênciável em x e que

$$\bigtriangledown(f * g)(x) = (\bigtriangledown f \ * \ g)(x)$$

Seja $h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| < 1$ (h tende a zero.) Tem-se

$$\begin{aligned} &|f(x+h-y) - f(x-y) - h \bigtriangledown f(x-y)| \\ &\qquad = \left| \int_0^1 [h \bigtriangledown f(x+sh-y) - h \bigtriangledown f(x-y)] ds \right| \\ &\qquad \leq |h| \varepsilon(|h|) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

com $\varepsilon(|h|) \to 0$ *quando* $|h| \to 0$ *(já que* $\bigtriangledown f$ *é uniformemente contínuo sobre* $\mathbb{R}^N$*).*

Seja K *um compacto fixo suficientemente grande para que* $x + B(0,1) - $ *Supp* $f \subset K$*. Tem-se*

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h \bigtriangledown f(x-y) = 0 \quad \forall y \notin K \quad \forall h \in B(0,1)$$

e então

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h \bigtriangledown f(x-y)| \leq |h| \ \varepsilon(|h|) 1_K(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \quad \forall h \in B(0,1)$$

Por conseguinte

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x) - h(\bigtriangledown f \ * \ g)(x)| \leq |h| \ \varepsilon(|h|) \int_K |g(y)| dy$$

Donde resulta que $f * g$ *é diferenciável em* x *e que* $\bigtriangledown(f*g) = (\bigtriangledown f \ * \ g)(x)$*.*

Sucessões Regularizantes

Definição 4.3.1 *Chama-se sucessões regularizantes a toda sucessão* $(\rho_n)_{n \geq 1}$ *de funções tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad Supp\ \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

Observe que existem sucessões regularizantes. De fato, basta fixar uma função $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *com Supp* $\rho \subset B(0,1)$, $\rho_n \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e* $\int \rho > 0$; *tomar por exemplo a função*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|-1}} & se \quad |x| < 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

E considerar $\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx)$ *com* $C = \left(\int \rho \right)^{-1}$

Proposição 4.3.6 *Seja* $f \in C(\mathbb{R}^N)$; *então* $\rho_n * f \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* $\mathbb{R}^N$*.*

Demonstração : Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto fixo. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de K e de ε) tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in B(0,\delta)$$

Tem-se

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy = \int_{B(0,\frac{1}{n})} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy$$

E então, para $n > \dfrac{1}{\delta}$ e $x \in K$,

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$$

Teorema 4.3.2 *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Então $\rho_n * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

*Demonstração : Seja $\varepsilon > 0$ e seja $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ fixa tal que $||f - f_1||_{L^p} < \varepsilon$ (veja o Teorema **??**.) De acordo com a Proposição **??** sabe-se que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente sobre todo compacto. Por outro lado, tem-se (veja a proposição **??**)*

$$Supp\ (\rho_n * f_1) \subset B(0,\frac{1}{n}) + Supp\ \subset K,\ K\ \ compacto\ fixo.$$

Por conseguinte, se deduz que

$$||\rho_n * f_1 - f_1||_{L^p} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalmente, escreve-se

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f];$$

donde resulta que

$$||\rho_n * f - f||_{L^p} \leq 2||f - f_1||_{L^p} + ||\rho_n * f_1 - f_1||_{L^p}.$$

*Graças ao Teorema **??**. Tem-se então :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup ||\rho_n * f - f||_{L^p} \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

i.e.
$$\lim_{n\to\infty} ||\rho_n * f - f||_{L^p} = 0$$

Corolário 4.3.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer. Então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^P(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração :Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e $f_1 \in C_c(\Omega)$ tais que

$$||f - f_1||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

Considera-se a função $\overline{f_1}$ definida por

$$\overline{f_1} = \begin{cases} f_1(x) & se \quad x \in \Omega \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

de modo que $\overline{f_1} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e do Teorema **??**

$$||\rho_n * \overline{f_1} - \overline{f_1}||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0.$$

Por outro lado

$$Supp\ (\rho_n * \overline{f_1}) \subset B(0, \frac{1}{n}) + Supp\ f_1 \subset \Omega \ \ para\ n\ suficientemente\ grande.$$

Seja $u_n = (\rho_n * \overline{f_1})_{|\Omega}$. Então, para n suficientemente grande, $u_n \in C_c(\Omega)$ e além do mais $||u_n - f_1||_{L^p(\Omega)} \to 0$. Assim, para n sufiientemente grande, $||u_n - f||_{L^p(\Omega)} < 2\varepsilon$.

4.4 Critério de Compacidade Forte em L^p

É importante saber reconhecer quando uma família de funções de L^p é relativamente compacta em L^p para a topologia forte. O teorema abaixo traz a resposta em $C(K)$, sendo K um espaço métrico compacto.

Teorema 4.4.1 (Ascoli) *Seja K um espaço métrico compacto e seja H um subconjunto limitado de $C(K)$.*

Suponhamos que H é uniformemente equicontínuo, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ tal\ que \ \ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \ \forall f \in H \quad (4.20)$$

Então H é relativamente compacto em $C(K)$.

O seguinte Teorema (e seu corolário) são versões em L^p do Teorema de Ascoli.

Notações :

1. escreve-se $\tau_h(f) = f(x+h)$ (translação de f por h).

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto; diz-se que um aberto ω está fortemente incluído em Ω, e escreve-se $\omega \subset\subset \Omega$ se $\overline{\omega} \subset \Omega$ e se $\overline{\omega}$ é compacto.

Teorema 4.4.2 (Fréchet-Komogorov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $\omega \subset\subset \Omega$. Seja F um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Suponhamos que*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \;\; \delta < dist(\omega, \complement\Omega) \tag{4.21}$$

tal que

$$||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad com \quad |h| < \delta \quad e \quad \forall f \in F$$

Então $F|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$.

Demonstração : Sempre se pode supor que Ω é limitado.Para $f \in F$ escreve-se

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in \Omega \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}$$

Escreve-se $\overline{F} = \{\bar{f}; f \in F\}$ de modo que $\overline{F}$ está limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$. O processo é dividido em três estapas:

1.

$$||\rho_n * \bar{f} - \bar{f}||_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall \bar{f} \in \overline{F} \quad e \quad \forall n > \frac{1}{\delta}$$

De fato, tem-se

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)| \rho_n(y) dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

e portanto

$$|(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p \rho_n(y) dy$$

Então

$$\int_\omega |(\rho_n * \bar{f})(x) - \bar{f}(x)|^p dx \leq \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) dy \int_\omega |\bar{f}(x-y) - \bar{f}(x)|^p dx < \varepsilon^p$$

*para $n > \frac{1}{\delta}$(Por(**??**)).*

2. *A famílía* $H = (\rho_n * F)|\bar{\omega}$ *verifica, para cada* n*, as hipóteses do Teorema de Ascoli. De fato em primeiro lugar tem-se*

$$||\rho_n * \bar{f}||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ||\rho_n||_{L^\infty}||\bar{f}||_{L^1} \leq C_n \quad \forall \bar{f} \in F$$

   E por outro lado, tem-se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$, $\forall \bar{f} \in F$

$$|(\rho_n * \bar{f})(x_1) - (\rho_n * \bar{f})(x_2)| \leq |x_1 - x_2|||\rho_n||_{Lip}||\bar{f}||_{L^1} \leq C_n|x_1 - x_2|$$

   onde $||\rho_n||_{Lip} = \sup\limits_{z_1 \neq z_2} \dfrac{|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)|}{|z_1 - z_2|}$. *Donde resulta que* H *é relativamente compacto em* $C(\bar{\omega})$ *e também em* $L^p(\omega)$.

3. *Finalmente. Dado* $\varepsilon > 0$ *fixemos*
   $n > \dfrac{1}{\delta}$ *de forma que*

$$||(\rho_n * \bar{f}) - f||_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in F$$

   Como H *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$*, pode-se recobrir* H *com um número finito de bolas de raio* ε *(em* $L^p(\omega)$*). As bolas correspondentes de raio* 2ε *recobrem então* $F|\omega$*. por conseguinte* $F|\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$.

Corolário 4.4.1 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, e seja* F *um subconjunto limitado de* $L^p(\Omega)$ *em* $1 \leq p < \infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \quad \exists \delta > 0 \quad \delta < dist(\omega, \complement\omega) \quad tal \;\; que \tag{4.22}$$

$$||\tau f - f||_{L^p(\omega)} \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad com \quad |h| < \delta \quad e \quad \forall f \in F$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \omega \subset\subset \Omega \quad tal \;\; que \quad ||f||_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in F \tag{4.23}$$

Então F *é relativamente compacto em* $L^p(\Omega)$.
Demontração: Dado $\varepsilon > 0$ *fixa-se* $\omega \subset\subset \Omega$ *tal que*

$$||f||_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon \quad \forall f \in F$$

Pelo Teorema **??** *sabe-se que* $F|_\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$*. Se pode então recobrir* $F|_\omega$ *com um número finito de bolas de raio* ε *em* $L^p(\omega)$*. Seja* $F|_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \varepsilon)$ *com* $g_i \in L^p(\omega)$ *(estas bolas estão em* $L^p(\omega)$*). Toma-se*

$$\tilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \backslash \omega \end{cases}$$

Tem-se en ão que $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\tilde{g}_i, 2\varepsilon)$ *(estas bolas estão em* $L^p(\Omega)$*.)*

Observação 4.4.1 *A recíproca do Corolário* **??** *é verdadeira.*

Observação 4.4.2 *Seja* F *um subconjunto limitado de* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *que verifica*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad ||\tau_h f - f||_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \quad \forall h \;\; \textit{com} \;\; |h| < \delta \quad e \quad \forall f \in F$$

Em geral não podemos concluir que F é relativamente compacto em $L^p(\mathbb{R}^N)$*; só se pode dizer que* $F|_\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$ *para todo* ω *aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$*.*

Finalizemos com a seguinte aplicação do Teorema **??**.

Corolário 4.4.2 *Seja* $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *uma função fixa e seja*

$$F = G * ß$$

onde ß designa um limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$ *com* $1 \leq p < \infty$*. Então* $F|_\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$*para todo aberto limitado* ω *de* $\mathbb{R}^N$*.*

Capítulo 5

5.1 O Teorema de Stampachia e o Corolário de Lax-Milgram

Em tudo que segue H designa um espaço de Hilbert. Para a demonstração de ambos serão usados os seguintes resultados.

Teorema 5.1.1 (projeção sobre um convexo fechado)
Seja $K \subset H$ um convexo fechado não-vazio.Então para todo $f \in H$, existe $u \in K$ único tal que

$$||f - u|| = \min_{v \in K} ||f - v|| \tag{5.1}$$

Observação 5.1.1 *O produto interno num espaço de Hilbert H que já foi definido é aqui denotado por $(u, v) \quad u, v \in H$.*

Além disso u é caracterizado por

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Denotamos $u = P_K f$ dita projeção de f sobre K.

Proposição 5.1.1 *Com as hipóteses do teorema* **??** *verifica-se*

$$||P_K f_1 - P_K f_2|| \leq ||f_1 - f_2|| \quad f_1, f_2 \in H$$

Logo P_K é lipschtiziana e como é linear então é limitada . Portanto $P_K \in H'$.

Corolário 5.1.1 *Seja $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Seja $f \in H$. Então $u = P_M f$ é caracterizado por*

$$\begin{cases} u \in M \\ (f-u,v) = 0 \end{cases}$$

Além disso P_M é um operador linear.

Teorema 5.1.2 (Teorema de Representação de Riesz-Frechét) *dado $\varphi \in H^{'}$, existe $f \in H$ único tal que*

$$< \varphi, v >= (f,v) \quad \forall v \in H.$$

Além disso verifica-se

$$|f| = ||\varphi||_{H'}$$

Teorema 5.1.3 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja X um espaço métrico completo e seja $F: \ X \longrightarrow X$ um aplicação tal que*

$$d(Fv_1, Fv_2) \leq \alpha \, d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \;\; com \;\; \alpha < 1$$

Então F tem um ponto fixo único $u = Fu$.

Definição 5.1.1 *Seja $a: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Dizemos que*

1. *a é contínua se $\exists C > 0$ tal que*

$$||a(u,v)|| \leq C||u|| \, ||v|| \quad \forall u, v \in H$$

2. *a é coersiva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2$$

Teorema 5.1.4 (Stampacchia) *Seja $a: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Seja K um convexo, fechado e não vazio. Então dado $\varphi \in H^{'}$ existe $u \in K$ único tal que*

$$a(u, v-u) \geq < \varphi, v-u > \quad v \in K. \tag{5.2}$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizado pela propriedade

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u,u)- < \varphi, u >= \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)- < \varphi, v >\right\} \end{cases} \tag{5.3}$$

Demonstração : Pelo Teorema de Riesz-Frechét existe $f \in H$ único tal que

$$< \varphi, v >= (f, v) \quad \forall v \in H.$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rccc} a: & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & a(u,v) \end{array}$$

é bilinear e contínua. Logo $\forall u$ fixo definimos a aplicação :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_u: & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longrightarrow & a(u,v) \end{array}$$

Ou seja, $< \varphi_u, v >= a(u,v)$. Pela bilinearidade de a temos que $< \varphi_u, v >$ é linear, ou seja,

$$< \varphi_u, qv_1+v_2 >= a(u, qv_1+v_2) = qa(u,v_1)+a(u,v_2) = q < \varphi_u, v_1 > + < \varphi_u, v_2 >$$

e contínua, ou seja,

$$| < \varphi_u, v >= |a(u,v)| \leq C\ ||u||\ ||v||$$

Tome $C_1 = C\ ||u||$ de modo que

$$| < \varphi_u, v >= |a(u,v)| \leq C_1\ ||v||$$

E portanto $\varphi_u \in H^{'}$. Assim, novamente pelo Teorema de Riesz-Frechét, existe um único $Au \in H$ tal que

$$(Au, v) =< \varphi_u, v >= a(u,v) \quad \forall v \in H$$

Note que

$$\begin{array}{rccc} A: & H & \longrightarrow & H \\ & u & \longrightarrow & Au \end{array}$$

é linear e contínua. De fato, suponha que $(Au, v)au, v$; $(Aw, v)aw, v$ Mostremos que $A(u+w) = Au + Aw$. De fato

$$\begin{aligned} < \varphi_{u+w}, v > &= a(u+w, v) \\ &= a(u,v) + a(w,v) \\ &= (Au, v) + (Aw, v) \\ &= (Au + Aw, v) \end{aligned}$$

Assim

$$(Au + Aw - A[u + w], v) = 0 \quad v \in H.$$

Portanto,

$$Au + Aw - A[u + w] = 0 \Rightarrow A[u + w] = Au + Aw$$

De maneira análoga temos que $A(\alpha\ u, v) = \alpha\ A(u, v)$. *Provemos a continuidade de* A *usando também o teorema e Riesz-Frechét, ou seja,*

$$|Au| = ||\varphi_u||_{H'} = \sup_{|v|=1} || < \varphi_u, v > || = \sup_{|v|=1} ||a(u, v)|| \leq C\ |u|\ |v| = C\ |u|$$

Logo

$$|A\ u| \leq C\ |u| \tag{5.4}$$

Outro fato importante é que

$$(Au, u) = a(u, u) \geq \alpha |u|^2$$

Logo

$$(Au, u) \geq \alpha |u|^2 \quad \forall u \in H \tag{5.5}$$

*O problema (**??**) consiste então em encontrar* $u \in K$ *tal que*

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \quad v \in H. \tag{5.6}$$

*Isto é, o problema (**??**) se resolve automaticamente através de (**??**) pois com (**??**) trabalha-se apenas com o produto escalar. A função* f *está bem definida pois vem dada graças a primeira apicação do teorema de Resz-Frechét.*

Seja uma contante $\rho > 0$*que fixaremos mais adiante. A desigualdade (**??**) é equivalente a :*

$$\begin{aligned} \rho(Au, v - u) &\geq \rho(f, v - u) \quad v \in K \\ 0 &\geq (\rho f - \rho Au, v - u) \\ 0 &\geq (\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \end{aligned} \tag{5.7}$$

*Assim do teorema (**??**) garantimos a existência de* u *com* $u = P_k(\rho f - \rho Au + u)$. *Como* K *é subespaço métrico e fechado em* H *tem-se que* K *é completo. E assim aplicando o teorema (**??**) definamos para todo* $v \in K$ *uma função*

$S\ v = P_k(\rho f - \rho Av + v)$. Agora serão necessárias por algumas condições sobre ρ para que S seja uma contração,isto é, existe $k < 1$ tal que

$$|Sv_1 - Sv_2| \leq k\ |v_1 - v_2|$$

*De fato, pela proposição **??** temos.*

$$\begin{aligned}
|Sv_1 - Sv_2|^2 &= |P_k(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_k(\rho f - \rho Av_2 + v_2)|^2 \\
&\leq |\rho f - \rho Av_1 + v_1 - \rho f - \rho Av_2 + v_2|^2 \\
&= |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|^2 \\
&= < v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2), v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2) > \\
&= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho < Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 > +\rho^2|Av_1 - Av_2|^2 \\
&= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho < A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 > +\rho^2|A(v_1 - v_2)|^2 \\
&\leq |v_1 - v_2||^2 - 2\rho\alpha|v_1 - v_2|^2 + \rho^2 c^2|v_1 - v_2|^2 \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)||v_1 - v_2|^2
\end{aligned}$$

Logo $|Sv_1 - Sv_2|^2 \leq k^2|v_1 - v_2|^2$ com $k^2 = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) < 1$ para isso $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{C^2}$. Portanto tomando ρ dessa forma S admite um único ponto fixo tal que

$$u = Su = P_k(\rho f - \rho Au + u) \quad u \in K.$$

*Provemos agora a equivalência de (**??**) e (**??**). Suponhamos agora que a é simétrico. Então $a(u,v)$ define um novo produto interno sobre H tal que $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ é equivalente a norma $|.|$ usual de H. De fato:*

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\leq C|u|^2 \\
a(u,u)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{C}|u|
\end{aligned}$$

Também tem-se

$$\alpha|u|^2 \leq a(u,u) \ \Rightarrow |u|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\ a(u,u) \ \Rightarrow |u| \leq \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\ a(u,u)^{\frac{1}{2}}$$

E então

$$\sqrt{\alpha}|u| \leq a(u,u)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{C}|u|.$$

Tome $\sqrt{\alpha}|u| = C_2$, $\sqrt{C}|u| = C_1$

H é Hilbert para este novo produto interno. Denotemos agora a norma $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ por $|.|_2$.

De fato, seja (v_n) uma sequência de Cauchy em $(H,|.|_2)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m,n > N$ tem-se que

$$\begin{aligned}
|v_m - v_n|_2 &< \frac{C_2\varepsilon}{C_1} \\
C_2|v_m - v_n| &< \frac{C_2\varepsilon}{C_1} \\
|v_{m-v_n}| &< \frac{\varepsilon}{C_1}
\end{aligned}$$

Assim $\exists v \in H$ tal que $|v_n - v| < \frac{\varepsilon}{C_1}$ $\forall n \geq N$. E usando a equivalência das normas temos

$$\frac{|v_m - v_n|_2}{C_1} < \frac{\varepsilon}{C_1}.$$

Portanto, $|v_n - v| < \varepsilon$. Desse modo obtem-se a completude de $(H,|.|_2)$.

Aplicando novamente o teorema de Riesz-Frechét, obtemos $g \in H$ na norma $a(u,u)^{\frac{1}{2}}$ tal que :

$$< \varphi, v >= a(g,v) \quad v \in H$$

Logo, como $< \varphi, v - u >= a(g, v-u)$ tem-se

$$\begin{aligned}
a(u, v-u) &\geq < \varphi, v-u > \\
a(u, v-u) &\geq a(g, v-u) \\
a(g-u, v-u) &\leq 0 \quad v \in K
\end{aligned}$$

isto é, $u = P_k g$ na norma associada a a. Pelo teorema da projeção sobre um convexo fechado

$$a(g-u, g-u)^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}}$$

logo :

$$\begin{aligned}
a(g-u, g-u)^{\frac{1}{2}} &\leq a(g-v, g-v)^{\frac{1}{2}} \quad v \in K \\
a(g-u, g-u) &\leq a(g-v, g-v) \quad v \in K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(g,g) - 2a(g,u) + a(u,u) &\leq a(g,g) - 2a(g,v) + a(v,v) \\
\frac{1}{2}a(u,u) - a(g,u) &\leq \frac{1}{2}a(v,v) - a(g,v) \quad v \in K \\
\frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u > &= \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v > \right\}
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $u \in K$ tal que

$$\frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u > = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - < \varphi, v > \right\}$$

Então,

$$a(u, v-u) \geq < \varphi, v-u > \quad \forall v \in K$$

Aplicando o teorema **??** e usando o raciocínio do corolário **??** obtemos o próximo resultado, que é uma ferramenta mais simples do que o teorema de Stampacchia, porém, muito útil para demonstrar a existência e unicidade de soluções para certas equações.

Corolário 5.1.2 (Lax-Milgran) *Seja a uma forma bilinear, contínua e coersiva, então para todo $\varphi \in H'$ existe $u \in H$ único tal que*

$$a(u,v) = < \varphi, v > \quad v \in H \tag{5.8}$$

Além disso se a é simétrico então u está caracterizado pela propriedade

$$u \in H \;\; e \;\; \frac{1}{2}a(u,u) - < \varphi, u > = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) < \varphi, v > \right\} \tag{5.9}$$

Capítulo 6

Operadores Compactos, Decomposição Espectral de Operadores Compactos Autoadjunos

6.1 Definições. Propriedades Elementares. Adjunto

Os operadores lineares compactos tem ampla aplicação tanto em dimensão finita como infinita. Neste capítulo trabalharemos com espaços de quaisquer dimensão. Para um operador linear compacto, a teoria espectral pode ser tratada no sentido de que a fomosa teoria de Fredholm das equações integráveis poderem ser extendidas para equações funcionais lineares.

Sejam E e F espaços de Banach.

Definição 6.1.1 *Diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é compacto se $T(B_E)$ é relativamente compacta na topologia forte.Designa-se por $\mathcal{H}(E,F)$ o conjunto dos operadores compactos e escreve-se $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(E,E)$*

Teorema 6.1.1 *O comjunto $\mathcal{H}(E,F)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(E,F)$ (para a norma $||.||_{\mathcal{L}(E,F)}$)*

Demonstração : Tem-se que a soma de operadores compactos é um operador compacto. Suponhamos que $(T_n) \in \mathcal{H}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$, demonstremos que $T \in H(E,F)$.

Como F é completo, é suficiente provar que para todo $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ pode ser recoberta com um número finito de bolas $B(f_i, \varepsilon)$ em F. Fixa-se n tal que $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Como $T_n(B_E)$ *é relativamente compacta,* $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ *com* I *finito. Então* $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B\left(f_i, \varepsilon\right)$

Serão vistos a seguir alguns resultados dos operadores compactos utilizados ao longo desta seção.

Definição 6.1.2 *Diz-se que um operador* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *tem imagem finita se* $\dim R(T) < \infty$.

Todo operador contínuo de imagem finita é compacto.

Corolário 6.1.1 *Seja* (T_n) *uma sucessão de operadores contínuos de imagem finita de* E *em* F *e seja* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *tal que* $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$. *Então* $T \in \mathcal{L}(E,F)$

Proposição 6.1.1 *Sejam* E*,* F *e* G *três espaços de Banach. Se* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathcal{H}(F,G)$ *[respectivamente* $T \in \mathcal{H}(E,F)$ *e* $S \in \mathcal{L}(F,G)$*,] então* $S \circ T \in \mathcal{H}(E,G)$.

Teorema 6.1.2 (Schauder). *Se* $T \in \mathcal{H}(E,F)$*, então* $T^* \in \mathcal{H}(F^{'},E^{'})$*. E reciprocamente.*

Demonstração : Demonstremos que $T^*(B_{F'})$ *é relativamente compacta em* $E^{'}$*. Seja* (v_n) *uma sucessão em* $B_{F'}$*; monstremos que podemos extrair uma subsucessão tal que* $T^*(v_{n_k})$ *converge. Seja* $K = \overline{T(B_E)}$ *(métrico compacto) e seja* $\mathcal{H} \subset C(K)$ *definido por*

$$\mathcal{H} = \{\varphi_n \; ; \; x \in K \longmapsto < v_n, x > \; ; \; n = 1,2,3,\ldots\}$$

Verificam-se as hipóteses do teorema de Ascoli e pode-se então extrair uma subsucessão designada por φ_{n_k} *que converge, em* $C(K)$*, para uma função* $\varphi \in C(K)$*. Em particular*

$$\sup_{u \in B_E} | < v_{n_k}, Tu > - \varphi(Tu)| \quad \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

Portanto

$$\sup_{u \in B_E} | < v_{n_k}, Tu > - < v_{n_l}, Tu > | \quad \underset{k,l \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

i.e.

$$||T^*v_{n_k} - T^*v_n||_{E'} \underset{k,l \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Por consequência $T^*v_{n_k}$ *converge em* $E^{'}$.

Reciprocamente, suponhamos que $T^* \in \mathcal{H}(F^{'}, E^{'})$. *Pelo anterior* $T^{**} \in \mathcal{H}(E^{''}, F^{''})$ *e em particular* $T^{**}(B_E)$ *é relativamente compacto em* $E^{''}$. *Assim ,* $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ *e* E *é fechado em* $E^{''}$.

Como consequência $T(B_E)$ *é relativamente compacto em* E.

6.2 A teoria de Riesz-Fredholm

Vejamos alguns resutados preliminares.

Lema 6.2.1 (Lema de Riesz) *Seja* E *um espaço vetorial normado e seja* $M \subset E$ *um subconjunto fechado tal que* $M \neq E$. *Então*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \quad tal\ que \quad ||u|| = 1 \quad e \quad dist(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Demonstração : Seja $v \in E$, *com* $v \notin M$. *Como* M *é fechado, então* $d = dist(v, M) > 0$. *Escolha* $m_0 \in M$ *tal que*

$$d \leq ||v - m_0|| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Então

$$u = \frac{v - m_0}{||v - m_0||}$$

resolve esse problema. De fato, se $m \in M$ *tem-se*

$$||u - m|| = \left|\left|\frac{v - m_0}{||v - m_0||} - m\right|\right| \geq 1 - \varepsilon$$

já que

$$m_0 + ||v - m_0||\, m \in M.$$

Teorema 6.2.1 (Riesz) *Seja* E *um espaço vetorial normado tal que* B_E *é compacta. Então* E *é de dimensão finita.*

Demonstração : Raciocinemos por absurdo. Se E *é de dimensão infinita, existe uma sucessão* (E_n) *de subespaços de dimensão finita tais que*

$E_{n-1} \subsetneqq E_n$. De acordo com o Lema **??** *pode-se construir uma sucessão (u_n) com $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$ e $dist(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Em particular $||u_n - u_m|| \geq \frac{1}{2}$ para $m < n$. Portanto a sucessão (u_n) não possui nenhuma subsucessão convergente — e isto contraria as hipóteses. Logo B_E é compacta.*

Teorema 6.2.2 (Alternativa de Fredholm) *Seja $T \in \mathcal{H}(E)$. Então*

1. *$N(I - T)$ é de dimensão finita,*
2. *$R(I - T)$ é fechado, e mais exatamente $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$*
3. *$N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$*
4. *$dim\ N(I - T) = dim\ N(I - T^*)$.*

Observação 6.2.1 *A alternativa de Fredholm faz referência a resolução da equação $u - Tu = f$. Expressa que:*

Ou para todo $f \in E$ a equação $u - Tu = f$ possui solução única;

Ou a equação homogênea $u - Tu = 0$ adimite n soluções linearmente independentes e, nesse caso, a equação não homogênea $u - Tu = f$ tem solução se, e somente se f verifica n condições de ortogonalidade (i.e., $f \in N(I - T^*)^\perp$).

Observação 6.2.2 *A propriedade (**??**)é familiar em dimensão finita. Se $dim\ E < \infty$, um operador linear de E em si mesmo é injetivo se, e somente se é sobrejetivo. Quando se trata de dimensão infinita um operador limitado pode ser injetivo sem ser sobrejetivo e vice-versa.*

Demonstração :

*(**??**) Seja $E_1 = N(I - T)$. Então $B_{E_1} \subset T(B_E)$, logo B_{E_1} é compacta. Segundo o Teorema* **??** *E_1 é de dimensão finita.*

*(**??**) Seja $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Tem-se que demonstrar que $f \in R(I - T)$. Tome $d_n = dist\ (u_n, N(I - T))$. Como $N(I - T)$ é de dimensão finita, existe $v_n \in N(I - T)$ tal que $d_n||u_n - v_n||$. Daí*

$$f_n \quad = \quad (u_n - v_n) - T(u_n - v_n) \tag{6.1}$$

Demonstremos que $||u_n - v_n||$ *está limitada. Raciocinando por absurdo supondo que existe uma subsucessão tal que* $||u_{n_k} - v_{n_k}|| \to \infty$. *Pondo* $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{||u_n - v_n||}$ *teria-se graças a (**??**)* $w_{n_k} - Tw_{n_k} \to 0$.
Extraindo uma subsucessão (também denotada por (w_{n_k})*) pode-se supor que* $Tw_{n_k} \to z$. *Assim* $w_{n_k} \to z$ *e* $z \in N(I-T)$. *Por outro lado*

$$dist\ (w_n, N(I-T)) = \frac{dist\ (u_n,\ N(I-T))}{||u_n - v_n||} = 1$$

(já que $v_n \in N(I-T)$.*) Aplicando o limite obtem-se* $dist\ (z, N(I-T)) = 1$ *— o que é um absurdo. Como conseqência* $||u_n - v_n||$ *está limitada e como* T *é compacto, podemos extrair uma subsucessão tal que* $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \to l$.

*Deduz-se de (**??**) que* $u_{n_k} - v_{n_k} \to f + l$; *escolhendo* $g = f + l$ *tem-se* $g - Tg = f$, *i.e.,* $f \in R(I-T)$. *Dessa forma foi demonstrado que* $I - T$ *tem imagem fechada. Para a conclusão desta demonstração será necessário o seguinte resultado :*

Teorema 6.2.3 *Seja* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *um operador não limitado, fechado, com* $\overline{D(A)} = E$.

As seguintes propriedades são equivalentes:

(a) $R(A)$ *é fechado;*

(b) $R(A^*)$ *é fechado;*

(c) $R(A) = N(A^*)^{\perp}$;

(d) $R(A^*) = N(A)^{\perp}$.

*Então aplicando o Teorema **??** obtemos*

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp} \ \text{ e } \ R(I-T^*) = N(I-T)^{\perp}.$$

*(**??**) Demonstremos que* $N(I-T) = \{0\} \Rightarrow R(I-T) = E$ *Raciocinando por absurdo suponha que*

$$E_1 = R(I-T) \neq E$$

E_1 é um espaço de Banach e $T(E_1) \subset E_1$. Então $T\mid_{E_1} \in \mathcal{H}(E_1)$ e $E_2 = (I-T)(E_1)$ é um subespaço fechado de E_1. Além disso $E_2 \neq E_1$ (por $(I-T)$ ser injetivo.) Tomando $E_n = (I-T)^n(E)$ obtem-se uma sucesão estritramente decrescente de subespaços fechados. De acordo com o lema de Riesz existe uma sucessão (u_n) tal que $u_n \in E_n$, $||u_n|| = 1$ e dist $(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$, e assim temos

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n + Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Observemos que se $n > m$, $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ e como consequência

$$-(u_n + Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}$$

Então $||Tu_n - Tu_m|| \geq \frac{1}{2}$, o que é um absurdo já que T é compacto.
Portanto $R(I-T) = E$.
Mostremos agora que $R(I-T) = E \Rightarrow N(I-T) = \{0\}$.
Suponhamos que $R(I-T) = E$. Para continuar com a demonstração usaremos o seguinte resultado :

Corolário 6.2.1 *Seja $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador não limitado, fechado, com $\overline{D(A)} = E$. Então verifica-se:*

i. $N(A) = R(A^*)^{\perp}$;
ii. $N(A^*) = R(A)^{\perp}$;
iii. $N(A)^{\perp} \supset \overline{R(A^*)}$;
iv. $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$

*Então pelo corolário **??**, $N(I-T^*) = R(I-T)^{\perp} = \{0\}$. Como $T^* \in \mathcal{H}(E')$, podemos aplicar o caso anterior a T^* e concluir que $R(I-T^*) = E'$. Então, ainda pelo corolário **??**, $N(I-T) = R(I-T^*)^{\perp} = \{0\}$.*

*(**??**) Seja $d = \dim\ N(I-T)$, $d^* = \dim\ N(I-T^*)$. Demonstremos inicialmente que $d^* \leq d$. Raciocinemos por absurdo supondo que $d < d^*$. Como $N(I-T)$ é de dimensão finita, adimite um complementar topológico em E, existe então um projetor contínuo P de E sobre $N(I-T)$.*

Por outro lado $R(I-T) = N(I-T^*)^\perp$ *é de codimensão finita* d^* *e como consequência* $R(I-T)$ *adimite (em* E*) um complementar topológico denotado por* F *de dimensão* d^**. Como* $d^* \leq d$*, existe uma aplicação linear* $\wedge : N(I-T) \longrightarrow F$ *que é injetiva e não é sobrejetiva. Ponhamos* $S = T + (\wedge \circ P)$*; então* $S \in \mathcal{H}(E)$ *já que* $\wedge \circ P$ *é de imagem finita.*

Mostremos agora que $N(I-T) = \{0\}$*; de fato se*

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\wedge \circ Pu)$$

então

$$u - Tu = 0 \;\; e \;\; \wedge \circ Pu = 0,$$

i.e., $u \in N(I-T)$ *e* $\wedge u = 0$*; portanto* $u = 0$*. Aplicando* (**??**) *ao operador* S *tem-se que* $R(I-S) = E$*. Isso é absurdo porque* $f \in F$, $f \notin R(\wedge)$*; a equação* $u - Su = f$ *não adimite soluções. Potanto conclui-se que* $d^* \leq d$*. Aplicando este resultado a* T^* *obtem-se*

$$dim\ N(I-T^{**}) \leq dim\ N(I-T^*) \leq dim\ N(I-T).$$

Mas $N(I-T^{**}) \supset N(I-T)$ *— e isto permite concluir que* $d = d^*$.

6.3 Espectro de um Operador Compacto

A teoria espectral é um dos princiais ramos da Análise Funcional Moderna. Podemos dizer que ela estuda certos operadores inversos, suas propriedades gerais e suas relaçõs com os operadores originais.

Definição 6.3.1 *Seja* $T \in \mathcal{L}(E)$*. O conjunto resolvente é*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ (T - \lambda I) \text{ é bijetiva de } E \text{ em } E\}$$

O espectro $\sigma(T)$ *é o complementar do conjunto resolvente,* $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$*.*

Dizemos que λ *é valor próprio e escreve-se* $\lambda \in VP(T)$ *se*

$$N(T - \lambda I) \neq 0;$$

$N(T-\lambda I)$ *é chamado de espaço próprio associado a* λ*. Vejamos o seguinte resultado:*

Corolário 6.3.1 *Sejam* E *e* F *dois espaços de Banach e seja* T *um operador linear contínuo e bijetivo de* E *sobre* F*. Então* T^{-1} *é contínuo de* F *sobre* E*.*

De acordo com o corolário **??** *conclui-se que se* $\lambda \in \rho(T)$ *então* $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Observação 6.3.1 *Tem-se que* $VP(T) \subset \sigma(T)$. *Em geral a inclusão é estrita, (exceto se dim* $E < \infty$. *Neste último caso verifica-se* $VP(T) = \sigma(T)$.*) Pode existir* λ *tal que*

$$N(T - \lambda I) = \{0\} \ \text{ e } \ R(T - \lambda I) \neq E$$

(tal λ *pertence ao espectro, mas não é um valor próprio). Por exemplo tomemos* $E = l^2$. *E*

$$\begin{array}{rcl} T : \ l^2 & \longrightarrow & l^2 \\ u = (u_1, u_2, u_3, \ldots) & \longmapsto & Tu = (0, u_1, u_2, u_3, \ldots) \end{array}$$

(i.e. T *é um deslocamento a direita). Então* $0 \in \sigma(T)$ *e* $0 \neq VP(T)$.

Proposição 6.3.1 *O espectro* $\sigma(T)$ *é um conjunto compacto e*

$$\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||].$$

Demonstração : Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $|\lambda| > ||T||$; *mostremos que* $T - \lambda I$ *é bijetiva — e isto provará que* $\sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$. *Dado* $f \in E$ *a equação* $Tu - \lambda u = f$ *adimite solução única pois a equação escreve-se como* $u = \dfrac{1}{\lambda}(Tu - f)$ *e aplica-se então o Teorema do Ponto Fixo de Banach.Mostremos agora que* $\rho(T)$ *é aberto. Seja* $\lambda_0 \in \rho(T)$. *Dados* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(próximo a* λ_0*) e* $f \in E$ *trata-se de resolver*

$$Tu - \lambda u = f \tag{6.2}$$

*Mas (***??***) escreve-se* $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, *i.e.,*

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]. \tag{6.3}$$

*Aplicando novamente o Teorema do Ponto Fixo de Banch conclui-se que (***??***) possui solução única se*

$$|\lambda - \lambda_0| \ ||(T - \lambda_0 I)^{-1}|| < 1$$

Teorema 6.3.1 *Seja* $T \in \mathcal{H}(E)$, *com dim* $E = \infty$. *Então verifica-se*

1. $0 \in \sigma(T)$,

2. $\rho(T)\backslash\{0\} = VP(T)\backslash\{0\}$,

3. uma das seguintes situações:

- $\sigma(T) = \{0\}$,
- $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é finito,*
- $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é uma sucessão que tende a zero.*

Demonstração :

*(**??**) Suponhamos que* $0 \notin \sigma(T)$. *Então* T *é bijetiva e* $I = T \circ T^{-1}$ *é compacto. Portanto* B_E *é compacta e pelo teorema **??*** *dim* $E < \infty$.

*(**??**) Seja* $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. *Mosremos que* $\lambda \in VP(T)$. *Raciocinando por absurdo suponhamos que* $N(T - \lambda I) = \{0\}$. *Então, pelo teorema **??**(**??**) tem-se que* $R(T - \lambda I) = E$ *e, portanto,* $\lambda \in \rho(T)$ — *o que é absurdo. Para as demais demonstrações necesitamos do seguinte resultado :*

Lema 6.3.1 *Seja* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *uma sucessão de números reais ditintos tal que*

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda$$

e

$$\lambda_n \in \sigma(T)\backslash\{0\} \quad \forall n.$$

então $\lambda = 0$.

Em outras palavras, todos os pontos de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *são isolados.*

*Demonstração do Teorema **??**(**??**) : Para todo* $n \geq 1$ *o conjunto*

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \; ; \; |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

é vazio ou finito (se tivesse uma quantidade infinita de pontos distintos tenderia a um ponto de acunmulação — já que $\sigma(T)$ *é compacto — e chegaria-se a uma contradição com o lema **??**). Quando* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *tem uma quantidade infinita de pontos distintos, pode-se ordená-los em uma sucessão que tende a zero.*

6.4 Decomposição Espectral dos Operadores Compactos Autoadjuntos

No que segue suponhe-se que $E = H$ é um espaço de Hilbert e que $T \in \mathcal{L}(H)$. Identificando $H^{'}$ e H pode-se considerar que $T^{*} \in \mathcal{L}(H)$.

Definição 6.4.1 *Diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ é autoadjunto se $T^{*} = T$, ou seja,*

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H$$

Proposição 6.4.1 *Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto.Ponhamos*

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u) \ \ e \ \ M = \sup_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u)$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$

Demonstração :Seja $\lambda > M$; mostremos que $\lambda \in \rho(T)$. Tem-se

$$(Tu, u) \leq M|u|^2 \quad \forall u \in H,$$

e como consequência

$$(\lambda u - Tu, u) \geq (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \quad \forall u \in H, \ \ com \ \ \alpha > 0$$

Aplicando o Lema de Lax-Milgran vê-se que $\lambda I - T$ é bijetivo. Mostremos que $M \in \sigma(T)$. A forma $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ é bilinear, simétrica e

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz a forma $a(u, v)$ resulta

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}}(Mv - Tv, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H$$

Donde se obtém em particular que

$$|Mu - Tu| \ \ \leq \ \ C(Mu - Tu, u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H \qquad (6.4)$$

*Seja (u_n) uma sucessão tal que $|u_n| = 1$ e $(Tu_n, u_n) \to M$. Graças a (**??**) temos que $|Mu_n - Tu_n| \to 0$, e então $M \in \sigma(T)$ (pois se $M \in \rho(T)$ então $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$.) As propriedades de m são obtidas substituindo T por $-T$.*

Corolário 6.4.1 *Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.*

Demonstração : Da proposição anterior sabe-se que

$$(Tu, u) = 0 \quad \forall u \in H$$

Donde resulta que

$$2(Tu, v) = (T(u + v), (u + v)) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \quad \forall u, v \in H.$$

E então $T = 0$.

Este próximo resultado é fundamental: mostra que todo operador compacto autoadjunto é diagonalizável numa base convenientemente escolhida.

Teorema 6.4.1 *Suponhamos que H é separável. Seja T um operador compacto e autoadjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por vetores próprios de T.*

Observação 6.4.1 *Seja T um operador autoadjunto compacto. Pelo anterior pode-se escrever todo $u \in H$ da forma*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ \ com \ \ u_n \in E_n$$

de modo que $Tu = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. Definimos

$$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n$$

Tem-se ainda que T_k é de imagem finita e que

$$||T_k - T|| \ \leq \ \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \to 0 \quad quando \quad k \to \infty$$

Vem-se encontrar assim o fato de que T é limite de uma sucessão (T_k) de operadores de imagem finita. Lembremos que num espaço de Hilbert, todo operador compacto – não necessariamente autoadjunto – é limite de uma sucessão de operadores de imagem finita.

Capítulo 7

Espaços de Sobolev e Formulação Variacional dos Problemas de Contorno Unidimensionais

7.1 Motivação

Consideremos o seguinte problema. Dada uma $f \in C([a,b])$ existe uma função $u(x)$ que verifica

$$\begin{cases} -u^{''} + u = f & em \;\; [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Uma solução clássica do problema (**??**) é uma função de classe C^2 em $[a,b]$ que verifica (**??**) no sentido usual. Ignoraremos aqui o fato de (**??**) poder ser resolvida explicitamente com um cálculo bem simples. Faremos isto com o propósito de ilustrar o método a partir deste exemplo elementar:

Multiplica-se (**??**) por $\varphi \in C^1[a,b]$ e integra-se por partes; assim temos

$$\int_a^b u^{'} \varphi^{'} + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \tag{7.2}$$

E (**??**) tem sentido se $u \in C^1([a,b])$ (contrariamente a (**??**), que suponhe u derivável duas vezes); de fato, seria suficiente ter $u, u^{'} \in L^1(a,b)$, $u^{'}$ num sentido a determinar. Digamos que uma função u de classe C^1 que verifica (**??**) é uma solução fraca de (**??**).

O progama seguinte descreve as linhas do enfoque variacional da teoria das equações em derivadas parciais.

1. Precisa-se da noção de solução fraca, isto ocorre com os Espaços de Sobolev, que são a ferramenta básica.

2. Estabelecem-se a existência e a unicidade de uma solução fraca com o método variacional, via o Teorema de Lax-Milgran.

3. Mostra-se que a solução fraca é de classe C^2 (por exemplo); um resultado de regularidade.

4. Recuperação da solução clássica. Mostra-se que toda solução fraca de classe C^2 é solução clássica.

   A etapa (**??**) é muito simples. De fato, suponhamos que $u \in C^2([a,b])$, $u(a) = u(b) = 0$ e que u verifica (**??**). Fazendo uma integração por partes em (**??**) obtemos

$$\int_a^b (-u'' + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]),\ \ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

e assim

$$\int_a^b (-u'' + u + f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\,]a,b[\,)$$

Como $C_c^1(]a,b[)$ é denso em $L^2(a,b)$ (corolário **??**), $-u'' + u = f \quad q.t.p$ (de fato em todo ponto já que $u \in C^2$).

7.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Seja $I =]a,b[$ limitado ou não e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 7.2.1 *O espaço de sobolev $W^{1,p}(I)$ se define por*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I)\ ;\ \exists g \in L^p(I)\ \ tal\ que\ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

escreve-se $H^1(I) = W^{1,2}(I)$

Para cada $u \in W^{1,p}(I)$ denota-se $u' = g$. Isto tem sentido já que g é única pelo lema **??**.

Observação 7.2.1 *Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e se $u' \in L^p(I)$ (aqui u' é a derivada usual de u,) então $u \in W^{1,p}(I)$. Além disso a derivada usual de u coincide com a derivada de u no sentido de $W^{1,p}$. Em particular se I está limitado, então $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Exemplo 7.2.1 *Seja $I = (-1, 1)$. Temos que*

1. *A função $u(x) = \dfrac{1}{2}(|x| + x)$ pertence a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e que $u' = H$ donde*

$$H(x) = \begin{cases} +1 & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & se \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

   Mais geralmente, toda função contínua sobre $\overline{I}$ e derivável com continuidade por partes em $\overline{I}$ pertence a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.

2. *A função H não pertence a $W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p \leq \infty$.*

Observação 7.2.2 *O espaço $W^{1,p}$ está dotado da norma*

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p}$$

ou ás vezes da norma equivalente $[||u||^p_{L^p} + ||u'||^p_{L^p}]^{\frac{1}{p}}$. O espaço H^1está dotado do porduto escalar

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}.$$

A norma associada

$$||u||_{H^1} = [||u||^2_{L^2} + ||u'||^2_{L^2}]^{\frac{1}{2}}$$

é equivalente a norma em $W^{1,2}$.

Proposição 7.2.1 *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

Demonstração :

1. *Seja (u_n) uma sucessão de Cauchy em $W^{1,p}$; então (u_n) e (u'_n) são sucessões de Cauchy em L^p. Por conseguinte $u_n \to u$ em L^p e $u'_n \to g$ em L^p. Tem-se*

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I)$$

aplicando o limite temos

$$\left|\int_I u_n \varphi^{'} = -\int_I u\varphi^{'}\right| = \left|\int_I \varphi^{'}[u_n - u]\right| \leq ||\varphi^{'}||_{L^{p'}} ||u_n - u||_{L^p} \longrightarrow 0$$

$$\left|\int_I u_n^{'}\varphi - \int_I g\varphi\right| = \left|\int_I \varphi[u_n^{'} - g]\right| \leq ||\varphi||_{L^{p'}} ||u_n^{'} - g||_{L^p} \longrightarrow 0$$

Então

$$\int_I u\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

Portano $u \in W^{1,p}$, $u^{'} = g$ *e*

$$||u_n - u||_{W^{1,p}} = ||u_n - u||_{L^p} + ||u_n^{'} - g||_{L^p} \longrightarrow 0$$

Assim $||u_n - u||_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$.

2. $W^{1,p}$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$.

   De fato, o espaço produto $E = L^p \times L^p$ *é reflexivo. O operador* $T : W^{1,p} \longrightarrow E$ *definida por* $Tu = [u, u^{'}]$ *é uma isometria de* $W^{1,p}$ *em* E; *portanto* $T(W^{1,p})$ *é um subespaço fechado de* E. *Utilizemos agora o seguinte resultado :*

   Proposição 7.2.2 *Seja* F *um espaço Banach e* $M \subset F$ *um subespaço vetorial fechado. Então* M *— munido da norma induzida por* F *— é reflexivo.*

   Resulta então que $T(W^{1,p})$ *é reflexivo — e por consequência também o é* $W^{1,p}$.

3. $W^{1,p}$ *é separável para* $1 \leq p < \infty$.

   De fato, o espaço produto $E = L^p \times L^p$ *é separável, portanto* $T(W^{1,p})$ *também é separável. Consequentemente* $W^{1,p}$ *é separável.*

Observação 7.2.3 *As funções de* $W^{1,p}$ *são "a grosso modo" primitivas de funções de* L^p. *Assim verifica-se o seguinte teorema:*

Teorema 7.2.1 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$; então existe uma função $\overline{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \overline{u} \quad \text{q.t.p em } I$$

e

$$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u^{'}(t)\, dt \quad \forall x, y \in \overline{I}$$

Observação 7.2.4 *O teorema acima afirma que se uma função $u \in W^{1,p}$, então toda função v tal que $u = v$ q.t.p. em I também pertence a $W^{1,p}$. Em outras palavras , toda função $u \in W^{1,p}$ adimite um representante contínuo e é único, i.e., existe uma função contínua pertencente a classe de equivalência de u para a relação $u \sim v$ se $u = v$ q.t.p. Quando isso for útil u será substituído automaticamente por seu representante contínuo.*

Observação 7.2.5 *Se $u \in W^{1,p}$ e se $u^{'} \in C(\overline{I})$ então $\overline{u} \in C^1(\overline{I})$, porém como visto anteriormente não faremos distinção entre u e $\overline{u}$.*

Serão necessário para a demonstração do teorema **??***:*

Lema 7.2.1 *Seja $f \in L^1_{Loc}(I)$ tal que*

$$\int_I f\, \varphi^{'} = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I) \tag{7.3}$$

então existe uma constante C tal que $f = C$ q.t.p.

Demonstração : Fixemos uma função $\psi \in C_c(I)$ tal que $\displaystyle\int \psi = 1$. Pra toda função $w \in C_c(I)$ existe $\varphi \in C^1_c(I)$ tal que

$$\varphi^{'} = w - \left(\int_I w\right)\psi$$

De fato, a função $h = w - \left(\displaystyle\int_I w\right)\psi$ é contínua com suporte compacto em I, e

$$\begin{aligned} \int_I h &= \int_I \left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] \\ &= \int_I w - \int_I \left(\int_I w\right)\psi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_I w - \int_I \psi \int_I w \\
&= \int_I w - \int_I w = 0
\end{aligned}
$$

Como $\displaystyle\int_I h = 0$, *h tem uma primitiva (única) com suporte compacto. Deduzimos de (**??**)*

$$
\begin{aligned}
\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] &= 0 \quad \forall w \in C_c(I) \\
\int_I \left[f\, w - f\left(\int_I w\right)\psi\right] &= 0 \\
\int_I f\, w - \int_I f\left(\int_I w\right)\psi &= 0 \\
\int_I f\, w - \int_I w \int_I f\, \psi &= 0 \\
\int_I f\, w - \int_I \left[\int_I f\, \psi\right] w &= 0 \\
\int_I \left(f - \int_I f\, \psi\right) w &= 0
\end{aligned}
$$

Pelo lema **??** *obtemos*

$$
f - \left(\int_I f\psi\right) = 0 \ \ q.t.p,
$$

i.e., $f = C$ *com* $C = \displaystyle\int_I f\psi$.

Lema 7.2.2 *Seja* $g \in L^1_{Loc}(I)$ *; para* y_0 *fixo em* I *escreve-se*

$$
v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt \quad x \in I
$$

Então $v \in C(I)$ *e*

$$
\int_I v\varphi^{'} = -\int_I g\varphi \quad \varphi \in C_c^1(I).
$$

Demonstração : Temos

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)dx = \\ &= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx \\ &= \int_I g(t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

Demonstração do teorema **??** *: Fixemos* $y_0 \in I$ *e ponhamos* $\tilde{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$*. De acordo com o lema* **??** *temos*

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi = \int_I u\varphi'.$$

Daí

$$\int_I (\bar{u} - u)\varphi' = 0 \quad \varphi \in C_c^1(I).$$

Resulta do lema **??** *que*

$$u - \bar{u} = C \ \ q.t.p.$$

A função $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ *tem as propriedades desejadas, i.e.,*

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= \bar{u}(x) + C \\ \tilde{u}(y) &= \bar{u}(y) + C \\ \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) &= \int_{y_0}^x u'(t)dt - \int_{y_0}^y u'(t)dt + C - C \\ &= \int_x^y u'(t)dt\end{aligned}$$

Observação 7.2.6 *O lema* **??** *demonstra que a primitiva* v *de uma função de* L^p *pertence a* $W^{1,p}$ *sempre que* $v \in L^p$ *— e isso sempre ocorre quando* I *é limitado.*

Proposição 7.2.3 *Seja $u \in L^p$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalêntes:*

1. $u \in W^{1,p}$.

2. *Existe uma constante C tal que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C||\varphi'||_{L^{p'}(I)} \quad \varphi \in C_c^\infty(I).$$

3. *Existe uma constante C tal que para todo aberto $\omega \subset\subset I$ e todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < dist\ (\omega, \complement I)$ verifica-se*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

*Além disso, pode-se escolher $C = ||u'||_{L^p}$ em (**??**) e (**??**.)*

Nesta proposição afirma-se que existem outras formas de se definir o espação $W^{1,p}$. equivalente a definição inicial.

Corolário 7.2.1 *Uma função u de $L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se e somente se existe uma constante C tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \ \ q.t.\ \ x, y \in I$$

Demonstração : É uma aplicação da proposição **??** [(**??**.) $\Leftrightarrow$ (**??**.)] *com* $p = \infty$.

Algumas operações fundamentais da Análise tem sentido unicamente para as funções definidas em todo $\mathbb{R}$. Desse modo é útil poder prolongar uma função $u \in W^{1,p}(I)$ para uma função $\bar{u} \in W^{1,p}$ $(\mathbb{R})$. O teorema seguinte responde a essa questão.

Teorema 7.2.2 Operador de Prolongamento *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Existe um operador de prolongamento $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que*

1. $Pu_{|_I} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

2. $||Pu||_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.

3. $||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$.
   (donde C só depende de $|I| \leq \infty$.)

Demonstração : *Comecemos pelo caso* $I =]0, +\infty[$ *e demonstremos que a prolongação por reflexão definida por*

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \geq 0 \\ u(-x) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Resolve a questão. Primeiramente tem-se que

$$||u^*||_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2||u||_{L^p(I)}$$

Ponhamos

$$v(x) = \begin{cases} u^{'}(x) & se \quad x > 0 \\ -u^{'}(-x) & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Comprova-se que $v \in L^p(\mathbb{R})$*. De fato, pois* $u \in W^{1,p}(I)$ *implica em* $u, u^{'} \in L^p(I)$ *e* $\displaystyle\int_0^x v(t)dt = \int_0^x u^{'}(t)dt$*. E ainda que*

$$u^*(x) - u(0) = \int_0^x v(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consequentemente $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *e* $||u^*||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2||u||_{W^{1,p}(I)}$.

Consideremos agora o caso de um intervalo limitado I*; sempre se pode reduzir ao caso* $]0, 1[$ *via homeomorfismo. Fixemos uma função* $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta \leq 1$, *tal que*

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x < \frac{1}{4} \\ \\ 0 & se \quad x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Dada uma função f *definida em* $]0, 1[$, *ponhamos*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Será necessário o seguinte Lema:

Lema 7.2.3 *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$, *então*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0, \infty) \qquad e \qquad (\eta\tilde{u})^{'} = \eta^{'}\tilde{u} + \eta\tilde{u}^{'}$$

Demonstração : *Seja* $\varphi \in C_c^1(]0, \infty[)$ *; tem-se*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' &= \int_0^1 u[(\eta\varphi') - \eta'\varphi] \\ &= \int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi] \quad \textit{já que } \eta\varphi \in C_c^1(]0,\infty[) \\ &= -\int_0^\infty (\tilde{u}'\eta + \tilde{u}\eta')\varphi\end{aligned}$$

Fim da demonstração do Teorema **??***: Dada* $u \in W^{1,p}(I)$ *escreve-se*

$$u = \eta u + (1-\eta)u$$

A função ηu *prolonga-se primeiramente a* $]0,\infty[$ *por* $\eta\tilde{u}$ *(graças ao lema* **??***) e depois prolonga-se a* $\mathbb{R}$ *por reflexão.Obtemos assim uma função* $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *que prolonga* ηu *tal que*

$$||v_1||_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2||u||_{L^p(I)} \quad , \quad ||v_1||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{W^{1,p}(I)}$$

(donde C *depende de* $||\eta'||_{L^\infty}$*.)*

O procedimento é análogo para $(1-\eta)u$*, ou seja, prolonga-se primeiro* $(1-\eta)u$ *a* $]-\infty,1[$ *por* 0 *em* $]-\infty,0[$ *e depois prolonga-se a* $\mathbb{R}$ *por uma reflexão (em torno do ponto* 1*.) Obtemos assim uma função* $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$*que prolonga* $(1-\eta)u$ *e tal que*

$$||v_2||_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2||u||_{L^p(I)} \quad , \quad ||v_2||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\ ||u||_{W^{1,p}(I)}$$

Então $Pu = v_1 + v_2$ *resolve a questão.*

Algumas propriedades das funções de classe C^1 são válidas para as funções de $W^{1,p}$. É mais fácil estabelecer estas propriedades "**por densidade** "com a ajuda do seguinte teorema.

Teorema 7.2.3 Densidade *SEja* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p < \infty$*. Então existe uma sucessão* (u_n) *em* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $u_{n|I} \to u$ *em* $W^{1,p}(I)$*.*

Demonstração : Sempre podemos supor $I = \mathbb{R}$*; caso contrário começamos prolongando u a uma função de* $W^{1,p}(\mathbb{R})$ *segundo o teorema* **??***. Utiliza-se uma tecnica muito importante da convolução (que fornece as funções* C^∞*) e de truncamento (que fornece as funções com suporte compacto).*

1. **Convolução**

Será necessário o seguinte lema.

Lema 7.2.4 *Seja $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e seja $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \ \ , \ \ (\rho * v)^{'} = \rho * v^{'}$$

*Demonstração : Suponhamos primeiro que ρ é de suporte compacto. Sabe-se que $\rho * v \in L^p$. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$; pelas proposições **??** e **??** temos*

$$\int (\rho * v)\varphi^{'} = \int v(\check{\rho} * \varphi^{'}) = \int v(\check{\rho} * \varphi)^{'} = -\int v^{'}(\check{\rho} * \varphi) = -\int (\rho * v^{'})\varphi$$

De onde

$$\rho * v \in W^{1,p} \quad e \quad (\rho * v)^{'} = \rho * v^{'}$$

Se ρ não é de suporte compacto intoduzimo uma sucessão (ρ_n) de $C_c(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ em L^1. Pelo anterior tem-se

$$\rho_n * v \in W^{1,p} \quad e \quad (\rho_n * v)^{'} = \rho_n * v^{'}.$$

*Agora, $\rho_n * v \to \rho * v$ em L^p e $\rho_n * v^{'} \to \rho * v^{'}$ em L^p.(ver teorema **??**). Concluimos com a ajuda da observação **??**, que*

$$\rho * v \in W^{1,p} \quad \text{e que} \quad (\rho * v)^{'} = \rho * v^{'}$$

2. **Truncamento**

Fixemos uma função $\xi \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ e

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & se \quad |x| \leq 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

Define-se a sucessão

$$\xi_n(x) \quad = \quad \xi\left(\frac{x}{n}\right) \quad para \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Comprova-se fácilmente, graças ao teorema da convergência dominada, que se uma função $f \in L^p$ com $1 \leq p < \infty$ então $\xi_n f \to f$ em L^p.

3. **Conclusão** *Escolhe-se uma sucessão regularizante* (ρ_n). *Demonstremos que a sucessão* $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$ *converge a* u *em* $W^{1,p}$. *Primeiramente tem-se* $||u_n - u||_{L^p} \to 0$. *De fato, escreve-se*

$$u_n - u = \xi_n[(\rho_n * u) - u] + [\xi_n u - u]$$

E então

$$||u_n - u||_{L^p} \leq ||\rho_n * u) - u||_{L^p} + ||\xi_n u - u||_{L^p} \to 0$$

Continuando, em virtude do lema **??**, *tem-se*

$$u_n^{'} = \xi_n^{'}(\rho_n * u) + \xi_n(\rho_n * u^{'})$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} ||u_n^{'} - u^{'}||_{L^p} &\leq ||\xi_n^{'}(\rho_n * u)||_{L^p} + ||\xi_n(\rho_n * u^{'})||_{L^p} \\ &\leq \frac{C}{n}||u||_{L^p} + ||(\rho_n * u^{'}) - u^{'}||_{L^p} + ||\xi_n u^{'} - u^{'}||_{L^p} \to 0 \end{aligned}$$

Donde $C = ||\xi^{'}||_{L^\infty}$

Observação 7.2.7 *Em geral não se pode escolher, no teorema* **??**, *uma sucessão* (u_n) *de* $C_c^\infty(I)$. *Em outras palavras,* $C_c^\infty(I)$ *não é denso em* $W^{1,p}(I)$ *(exceto se* $I = \mathbb{R}$.*)*

Teorema 7.2.4 *Existe uma constante* C *(dependente só de* $|I| \leq \infty$*) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty \tag{7.4}$$

Dito de outro modo $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ *com imersão contínua para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, quando I *é limitado se verifica a imersão*

1. *A imerção* $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ *é compacta para* $1 < p \leq \infty$.
2. *A imerção* $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ *é compacta para* $1 \leq q < \infty$.

*Demonstração : Comecemos demonstrando (**??**) para $I = \mathbb{R}$; o caso geral se deduz deste graças ao teorema de prolongamento (teorema **??**). Seja $v \in C_c^\infty$ se $1 \leq p < \infty$ escreve-se $G(s) = |s|^{p-1}s$. A função $w = G(v) \in C_c^1(\mathbb{R})$ e*

$$w^{'} = G^{'}(v)v^{'} = p|v|^{p-1}v^{'}$$

Portanto, para $x \in \mathbb{R}$ temos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v^{'}(t)dt$$

e utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|v(x)|^p \leq p||v||_{L^p}^{p-1}||v^{'}||_{L^p}.$$

Donde se deduz graças a desigualdade de Young que

$$||v||_{L^\infty} \quad \leq \quad C\ ||v||_{W^{1,p}} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}) \tag{7.5}$$

Donde C é uma constante universal.

*Raciocinemos agora por densidade. Seja $u \in W^{1,p}$, existe uma sucessão $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Aplicando (**??**) tem-se que (u_n) é de Cauchy em L^∞. DEssa forma $u_n \to u$ em L^∞ e obtem-se (**??**.)*

Demonstração de (??). *Seja F a bola unitária de $W^{1,p}$ com $1 < p \leq \infty$. Para $u \in \mathcal{F}$ temos*

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u^{'}(t)dt \right| \leq ||u^{'}||_{L^p}|x-y|^{\frac{1}{p}} \leq |x-y|^{\frac{1}{p}} \quad \forall x, y \in I$$

E resulta então do teorema de Ascoli que F é relativamente compacta em $C(\bar{I})$

Demonstração de (??) *Seja $\mathcal{F}$ a bola unitária da $W^{1,1}(I)$. Para mostrar que F é relativamente compacta em $L^q(I)$ com $1 \leq q < \infty$ se aplica o corolário **??**. comprovemos a condição (**??**). Seja $\omega \subset\subset I$,*
*$u \in \mathcal{F}$ e $|h| <$ dist $(\omega, \complement I)$. De acordo com a proposição **??**(**??**) temos*

$$||\tau_h u - u||_{L^1(\omega)} \leq |h|\ ||u^{'}||_{L^1(I)} \leq |h|$$

E então

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq (2||u||_{L^\infty(I)})^{q-1} \int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq C\ |h|$$

E como consequência

$$\left(\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C^{\frac{1}{q}}\ |h|^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \ \ se \ \ |h|<\delta$$

Comprovemos a condição (??). Para $u \in \mathcal{F}$ temos

$$||u||_{L^q(I\backslash\omega)} \leq ||u||_{L^\infty}|I\backslash\omega|^{\frac{1}{q}} \leq C\ |I\backslash\omega|^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$$

smpre que $|I\backslash\omega$ for suficientemente pequeno; escolhe-se ω para que isso se verifique.

Observação 7.2.8 *A imerção $W^{1,p}I \subset C(\bar{I})$ é contínua, mas nunca é compacta, inclusive se I é um intervalo limitado. Contudo se (u_n) está limitada em $W^{1,1}(I)$ (com I limitado ou não) existe uma subsucessão (u_{n_k}) tal que $u_{n_k}(x)$ converge para todo $x \in I$. Quando I não é limitado e $1 < p \leq \infty$, a imerção $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ é contínua, mas não é compacta. Ainda que, se (u_n) está limitada em $W^{1,p}(I)$ com $1 < p \leq \infty$, existe uma subsucessão (u_{n_k}) e existe $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em $L^\infty(J)$ para todo J limitado, $J \subset I$.*

Observação 7.2.9 *Seja I um intervalo limitado e $1 \leq q \leq \infty$. Graças a (??) temos que a norma*

$$|||u||| = ||u^{'}||_{L^p} + ||u||_{L^q}$$

é equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$.

Observação 7.2.10 *Seja I um intervalo não limitado. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in L^q(I)$ para todo $q \in [p,\infty]$ já que*

$$\int |u|^q \leq ||u||_{L^\infty}^{q-p}||u||_{L^p}^p.$$

Porém, em geral $u \notin L^q(I)$ para $q \in [1,p[$.

Corolário 7.2.2 *Suponhamos que I não é limitado e seja $u \in W^{1,p}(I)$com $1 \leq p < \infty$. Então verifica-se*

$$\lim_{\substack{x\in I \\ |x|\to\infty}} u(x) = 0 \tag{7.6}$$

Demonstração : De acordo com o teorema **??** *, existe uma sucessão* $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ *tal que* $u_{n|I} \to u$ *vem* $W^{1,p}(I)$. *Deduz-se de* **??** *que* $||u_n - u||_{L^\infty} \to 0$; *e assim deduz-se (***??***). De fato, dado* $\varepsilon > 0$, *escolhemos n suficientemente grande para que* $||u_n - u||_{L^\infty(I)} < \varepsilon$; *e para* $|x|$ *suficientemente grande temos* $u_n(x) = 0$ *e portanto* $|u(x)| < \varepsilon$.

Corolário 7.2.3 (Derivação do Produto)

Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $uv \in W^{1,p}(I)$ *e*

$$(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'} \tag{7.7}$$

Além disso verifica-se a fórmula da integral por partes

$$\int_y^x u^{'}v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv^{'} \quad \forall x, y \in \bar{I} \tag{7.8}$$

Demonstração : Observemos que $u \in L^\infty$ *(teorema* **??***), logo* $uv \in L^p$. *Comecemos pelo caso* $1 \leq p < \infty$; *sejam* (u_n) *e* (v_n) *sucessões de* $C_c^1(\mathbb{R})$ *tais que* $u_{n|I} \to u$ *e* $v_{n|I} \to v$ *em* $W^{1,p}(I)$. *Então* $u_n \to u$ *e* $v_n \to v$ *em* $L^\infty(I)$; *como consequência* $u_n v_n \to uv$ *em* L^∞. *Temos assim*

$$(u_n v_n)^{'} = u_n^{'} v_n + u_n v_n^{'} \to u^{'}v + uv^{'} \ \text{ em } \ L^p(I)$$

Donde resulta que $uv \in W^{1,p}(I)$ *e que* $(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'}$. *Assim, integrando (***??***) obtemos (***??***). Suponhamops agora que* u , $v \in W^{1,\infty}(I)$. *Então*

$$uv \in L^\infty(I) \ \text{ e } \ u^{'}v + uv^{'} \in L^\infty(I)$$

Falta comprovar que

$$\int_I uv\varphi^{'} = -\int_I (u^{'}v + uv^{'})\varphi \quad \varphi \in C_c^1(I)$$

Para isso fixemos um intervalo aberto e limitado $J \subset I$ *tal que Supp* $\varphi \subset J$. *Então* $uv \in W^{1,p}(I)$ *para todo* $p < \infty$ *e como visto anteriormente sabemos que*

$$\int_J uv\varphi^{'} = -\int_J (u^{'}v + uv^{'})\varphi$$

Dessa forma

$$\int_I uv\varphi^{'} = -\int_I (u^{'}v + uv^{'})\varphi$$

Corolário 7.2.4 (Derivação de uma composição)
Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *(uma restrinção essencial quando* I *não é limitado e* $1 \leq p < \infty$*) e seja* $u \in W^{1,p}(I)$*. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)^{'} = (G^{'} \circ u)u^{'}$$

Demonstração : Seja $M = ||u||_{L^\infty}$*. Como* $G(0) = 0$*, existe uma constante* C *tal que* $|G(s)| \leq C\ |s|$ *para* $s \in [-M, +M]$*. Então* $G \circ u \in L^p(I)$ *já que* $|G \circ u| \leq C\ |u|$*. Da mesma maneira* $(G \circ u)^{'} = (G^{'} \circ u)u^{'} \in L^p(I)$*. Mostremos então que*

$$\int_I (G \circ u)\varphi^{'} = -\int_I (G^{'} \circ u)u^{'}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \tag{7.9}$$

Suponhamos primeiro que $1 \leq p < \infty$*. Então existe uma sucessão* (u_n)*de* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $u_n \to u$ *em* $W^{1,p}(I)$ *e em* $L^\infty(I)$*. Logo* $G \circ u_n \to G \circ u$ *em* $L^\infty(I)$ *e* $(G^{'} \circ u_n)u_n^{'} \to (G^{'} \circ u)u^{'}$ *em* $L^p(I)$*. Também se verifica*

$$\int (G \circ u_n)\varphi^{'} = -\int (G^{'} \circ u_n)u_n^{'}\varphi \qquad \varphi \in C_c^1(I)$$

*Donde deduzimos (**??**). Para o caso* $p = \infty$ *procedemos como no corolário* **??***.*

Definição 7.2.2 *Dado* $1 \leq p < \infty$*, designamos por* $W_0^{1,p}(I)$ *o fecho de* $C_c^1(I)$ *em* $W^{1,p}(I)$*. Observa-se que* $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$*.*

O espaço $W_0^{1,p}$ *está dotado da norma induzida por* $W^{1,p}$*, o espaço* H_0^1 *está dotado do produto escalar induzido por* H^1*.*

O espaço $W_0^{1,p}$ *é um espaço de Banach separável, é reflexivo para* $1 \leq p < \infty$*. O espaço* H_0^1 *é um espaço de Hilbert separável.*

Observação 7.2.11 *Quando* $I = \mathbb{R}$*, sabemos que* $C_c^1(\mathbb{R})$ *é denso em* $W^{1,p}(\mathbb{R})$ *e como consequência* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$*.*

Observação 7.2.12 *Utilizando uma sucessão regularizante* (ρ_n) *obtemos que*

1. $C_c^\infty(I)$ *é denso em* $W_0^{1,p}(I)$*;*
2. *Se* $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$*, então* $u \in W_0^{1,p}(I)$*.*

O próximo resultado mostra uma caracterização essencial das funções de $W_0^{1,p}(I)$*.*

Teorema 7.2.5 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e somente se $u = 0$ sobre ∂I*

Observação 7.2.13 *O teorema* **??** *explica o importante papel desempenha o espaço $W_0^{1,p}$. Com efeito as equações diferenciais (ou en derivadas parciais) estão ligadas a condições de contorno, ou seja, o valor de u sobre ∂I vem fixado.*

Demonstração : Se $u \in W_0^{1,p}$, existe uma sucessão (u_n) de $C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Então $u_n \to u$ uniformemente sobre $\bar{I}$ e por consequência $u = 0$ sobre ∂I.

Reciprocamente, seja $u \in W^{1,p}$ tal que $u = 0$ sobre ∂I. Fixemos uma função $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & se \quad |t| \leq 1 \\ 1 & se \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

$$|G(t)| \leq |t| \ \ para\, todo \ \ t \in \mathbb{R}$$

tomemos $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ de forma que $u_n \in W^{1,p}(I)$ (corolário **??***). Por outro lado*

$$Supp\ u_n \subset \{x \in I\ ;\ |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$$

e então usando o fato de que $u = 0$ sobre ∂I e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty, x \in I$ obtemos que $Supp\ u_n$ é um compacto incluído em I. Por consequência $u \in W_0^{1,p}$. Por fim, de acordo com o teorema da convergência dominada temos que $u_n \to u$ em $W^{1,p}$.

Observação 7.2.14 *Vejamos outras dus caracterizações das funções de $W_0^{1,p}$.*

- *Sejam $1 < p < \infty$ e $u \in L^p(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se existe uma constante C tal que*

$$\left| \int_I u\varphi^{'} \right| \leq C\ ||\varphi||_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

- *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p(I)$; definimos $\bar{u}$ por*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in I \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}\backslash I \end{cases}$$

Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$

Proposição 7.2.4 (Desigualdade de Poincaré)

Suoanhamos que I é limitado. Então existe uma constante C (dependendo de $|I|$ tal que)

$$||u||_{W^{1,p}} \leq C||u^{'}||_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I) \tag{7.10}$$

Dito de outro modo, em $W_0^{1,p}(I)$ a quantidade $||u^{'}||_{L^p}$ é uma norma equivalente a norma de $W^{1,p}(I)$

Demonstração : Para $u \in W_0^{1,p}(I)$ tem-se

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_x^a u^{'}(t)dt \right| \leq ||u^{'}||_{L^1}$$

*E então $||u||_{L^\infty} \leq ||u^{'}||_{L^1}$; donde deduzimos (**??**) graças a desigualdade de Hölder.*

O espaço Dual de $W_0^{1,p}$

Notação : Dezignamos por $W^{-1,p^{'}}(I)$ o espaço dual de $W_0^{1,p}(I)$ (com $1 \leq p < \infty$) e por $H^{-1}(I)$ o espaço dual de $H_0^1(I)$

Sabe-se que podemos identificar L^2 e seu dual mas não podemos identificar H_0^1 e seu dual. Obtemos assim as inclusões

$$H_0^1 \subset L^{L^2} \subset H^{-1}$$

com imerções contínuas e densas. Caso I seja limitado temos

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p^{'}} \quad \textit{para todo } 1 \leq p < \infty$$

com imerções contínuas e densas. Se I não é limitado, tem-se somente

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p^{'}} \quad \textit{para todo } 1 \leq p \leq 2$$

com imerções contínuas e densas.

Os elementos de $W^{-1,p^{'}}$ podem ser representados por meio de funções de $L^{p^{'}}$; exatamente verifica-se a saeguinte proposição.

Proposição 7.2.5 *Seja $F \in W^{1,p^{'}}$. Então existem f_0 , $f_1 \in L^{p^{'}}$ tais que*

$$< F, v >= \int f_0 v + \int f_1 v^{'} \quad \forall v \in W_0^{1,p}$$

e

$$||F|| = \max\{||f_0||_{L^{p'}}, ||f_1||_{L^{p'}}\}$$

Demonstração : Escrevamos o espaço $E = L^p \times L^p$ *com a seguinte norma:*

$$||h|| = ||h_0||_{L^p} + ||h_1||_{L^p} \;\; donde \;\; h = [h_0, h_1].$$

A aplicação

$$\begin{array}{llll} T: & W_0^{1,p} & \longrightarrow & E \\ & u & \longmapsto & [u, u^{'}] \end{array}$$

é uma isometria de $W_0^{1,p}$ *em* E. *Tomemos* $G = T(W_0^{1,p})$, *com a norma induzida por* E, *e* $S = T^{-1} : G \longrightarrow W_0^{1,p}$. *A aplicação* $h \in G \longmapsto < F, Sh >$ *é uma forma linear e contínua sobre* G. *De acordo com o teorema de Hahn-Banach podemos estendê-la a uma forma linear e contínua sobre* E *a qual denotaremos por* ϕ, *com* $||\phi||_{E'} = ||F||$. *Pelo teorema da representação de Riesz sabe-se que existem* $f_0, f_1 \in L^{p^{'}}$ *tais que*

$$< \phi, h >= \int f_0 h_0 + \int f_1 h_1 \quad \forall h \in E.$$

Assim tem-se que $||\phi||_{E'} = \max\{||f_0||_{L^{p'}} \; , \; ||f_1||_{L^{p'}}\}$

Vejamos agora alguns exemplos de problemas de contorno :

Resolver o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u^{''} + u = f & em \quad I =]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 & \end{array} \right. \tag{7.11}$$

donde f é uma função dada (por exemplo de $C(\bar{I})$, ou de $L^2(I)$). As condições de contorno $u(0) = u(1) = 0$ se chamam **condições de Dirichlet**(homogêneas.)

Definição 7.2.3 *Uma solução clássica de (**??**) é uma fun¸cão* $u \in C^2(\bar{I})$ *que verifica (**??**) (no sentido usual.) Uma solução fraca de (**??**) é uma função* $u \in H_0^1(I)$ *que verifica*

$$\int_I u^{'} v^{'} + \int_I uv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I) \tag{7.12}$$

*Será desenvolvido de agora em diante o programa descrito em (**??**.)*

1. **Etapa A** Toda solução clássica é solução fracaIsso se verifica graças ao corolário **??**.

2. **Etapa B** Existência e unicidade de uma solução fraca.

   Proposição 7.2.6 *Para toda $f \in L^2$, existe $u \in H_0^1$ solução única de (**??**). Além disso u vem dada por*

   $$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\};$$

   É o chamado princípio de Dirichlet.

   Demonstração : Apliquemos o teorema de Lax-Milgram (ou simplesmente o teorema de representação de Riesz-Fréchet) no espaço de Hilbert $H = H_0^1$ com a forma bilinear

   $$a(u, v) = \int u'v' + \int uv = (u, v)_{H^1}$$

   e com a forma linear $\varphi : \ v \longmapsto \displaystyle\int fv$.

   Observação 7.2.15 *Dada $F \in H^{-1}$, sabemos pelo teorema de Riesz-Fréchet que existe $u \in H_0^1$ tal que*

   $$(u, v)_{H^1} =< F, v >_{H^{-1}, H_0^1} \quad \forall v \in H_0^1$$

   O operador $F \longmapsto u$ é um isomorfismo de Riesz-Fréchet de H^{-1} sobre H_0^1. Pode-se considerar u como solução generalizada da equação $-u'' + u = F$.

3. **Etapa C e D** Regularidade e recuperação da solução clássica.

   Observemos primeiramente que se $f \in L^2$ e se $u \in H_0^1$ é solução fraca, então $u \in H^2$. De fato, temos

   $$\int u'v' = \int (f - u)v \quad \forall v \in C_c^1$$

   e assim $u \in H^1$ (já que $f - u \in L^2$), i. e., $u \in H^2$. Se além disso $f \in C(\bar{I})$ ent´ a solução fraca $u \in C^2(\bar{I})$. De fato $(u')' \in C(\bar{I})$ e então $u' \in C^1(\bar{I})$. portanto $u \in C^2(\bar{I})$. Passar de uma solução fraca $u \in C^2(\bar{I})$ para uma solução clássica se verifica como em (**??**.)

O método descrito anteriormente é extremamente flexível e adaptável a uma grande variedade de problemas. Vejamos alguns problemas que aparecem frequentemente.

Exemplo 7.2.2 *(Condição de Dirichlet não homogênea) Resolver o problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em} \quad I =]0,1[\\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases} \tag{7.13}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e f uma função dada.

Proposição 7.2.7 *Dados $f \in L^2(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe $u \in H^2(I)$ única que verifica (**??**.) Além disso u vem dada por*

$$\min_{\substack{v \in H^1 \\ v(0)=\alpha,\ v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}$$

Além diso se $f \in C(\bar{I})$, então $u \in C^2(\bar{I})$.

Demonstração : Vejamos dois métodos de resolução desse caso.

1. **Primeiro Método** *Fixemos uma função u_0 regular tal que $u_0(0) = \alpha$ e $u_0(1) = \beta$ e fazendo uma mudança de variável $\tilde{u} = u - u_0$; então $\tilde{u}$ verifica*

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = f + u_o'' - u_0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

E assim $\tilde{u}$ se encontra na situação anterior.

2. **Segundo Método** *No espaço H^1 introduzimos o convexo fechado*

$$K = \{v \in H^1(I) \ ; \ v(0) = \alpha, \ v(1) = \beta\}$$

*Se u é solção clássica de (**??**) temos*

$$\int_I u'(v - u') + \int_I u(v - u) = \int_I f(v - u) \quad \forall v \in K$$

E assim, em particular verifica-se

$$\int_I u'(v - u') + \int_I u(v - u) \geq \int_I f(v - u) \quad \forall v \in K \tag{7.14}$$

Utiliza-se então o teorema de Stampacchia: existe $u \in K$ única, que verifica (??); além disso u vem dada por

$$\min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}$$

Pra recuperar a solução clássica, escolhemos em (??)$v = u + w$ ou $v = u + w$ com $w \in H_0^1(I)$. e obtemos

$$\int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw \quad \forall w \in H_0^1$$

Isso implica $u \in H^2(I)$.

Exemplo 7.2.3 (Problema de Sturm-Liouville) *Resolver o problema*

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \quad em \quad I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{7.15}$$

donde $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ e $f \in L^2(i)$ são dados com

$$p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Se u é uma solução clássica de (??), então temos

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Tomemos como espaço funcional o espaço $H_0^1(I)$ e como forma linear, contínua, simétrica

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv.$$

Se $q \geq 0$, esta forma é coersiva graças a desigualdade de Poincaré. Então (teorema de Lax-Milgram) existe $u \in H_0^1$ única tal que

$$a(u,v) = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Além disso u vem dada por

$$\min_{v\in H_0^1}\left\{\frac{1}{2}\int_I (pv'^2+qv^2)-\int_I fv\right\}$$

Obtemos que $pu^{'} \in H^1$, *e assim* $u^{'} = \frac{1}{p} pu^{'} \in H^1$ *e portanto* $u \in H^2$. *Por último, se* $f \in C(\bar{I})$ *então* $u \in C^2(\bar{I})$ *e* u *é solução clássica de (??).*

consideremos agora uma problema mais geral

$$\begin{cases} -(pu^{'})^{'} + ru^{'} + qu = f \quad em \quad I =]0,1[\\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{7.16}$$

As hipóteses de p e q são as mesmas do caso anterior, e $r \in C(\bar{I})$. *Se u é solução clássica de (??), verifica-se*

$$\int_I pu^{'}v^{'} + \int ru^{'}v + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Tomemos como espaço funcional o espaço $H_0^1(I)$ *e como forma bilinear, contínua*

$$a(u,v) = \int_I pu^{'}v^{'} + \int_I ru^{'}v + \int_I quv.$$

Esta forma não é simétrica. em alguns casos é coersiva: por exemplo se $q \geq 1$ *e* $r^2 \leq \alpha$, *ou se* $q \geq 1$ *e* $r \in C^1(\bar{I})$ *com* $|r^{'}| \leq 2$ — *observemos que*

$$\int_I rv^{'}v = -\frac{1}{2}\int_I r^{'}v^2 \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Pode-se então aplicar o teorema de Lax-Milgram,porém não existe um problema de minimização associado.O artifício usado a seguir permite reduzir o problema ao caso de uma forma bilinear simétrica. Introduzimos uma primitiva R de $\frac{r}{p}$ *e toma-se* $\zeta = e^{-R}$. *Multipicando (??) por* ζ *obtemos*

$$-\zeta pu^{''} - \zeta p^{'}u^{'} + \zeta ru^{'} + \zeta qu = \zeta f$$

ou também (já que $\zeta^{'}p + \zeta r = 0$*). Introduzimos então em* H_0^1 *a forma bilinear, contínua, simétrica*

$$a(u,v) = \int \zeta pu^{'}v^{'} + \int \zeta quv.$$

Se $q \geq 0$, $a(u,v)$ *é coersiva e assim existe* $u \in H_0^1$ *única tal que*

$$a(u,v) = \int \zeta fv \quad \forall v \in H_0^1$$

Além disso, u é dada por

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (\zeta p v'^2 + \zeta q v^2) - \int_I \zeta f v \right\}$$

*Temos também que se $u \in H^2$ e que se $f \in C([0,1])$, então $u \in C^2([0,1])$ é uma solução clássica de (**??**).*

7.3 Conclusão

O trabalho desenvolvido neste projeto podemos dizer que foi a contento. Tanto do ponto de vista ciêntifico como também no item formação. O conteúdo programático atesta nossas afirmações e ofereceu caminhos para futuros estudos.

Queremos aproveitar o espaço para expor nossa satisfação em ter participado de tal programa PIBIC/UFBP/CNPq bem como ter nos beneficiado de todas as oportunidades que o grupo de pesquisa, Projeto Integrado de Pesquisa em Análise, promoveu, do qual fazemos parte.

Referências Bibliográficas

[1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionelle théorie et applications*, Masson, Paris (1987)

[2] Kreyzing E., *Introductory Functional Analysis with Applications*,wiley (1978).

[3] S.Kasenave, *Functional Analysis and Applications*, Bangalore-Índia(19829).

[4] Djairo de Figueiredo, *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília

[5] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*,second edition,Springer-Verlag (19983)

[6] Antônio Giglioli, *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, Notas do Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas 7/26 Julho (1975)

orientador bolsista

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO PARA O BOLSISTA

INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

PIBIC-CNPq-UFPB-2002

IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO

1. TÍTULO DO PROJETO:

   Iniciação ao Estudo das Equações Diferenciais Parciais

2. LOCAL DE EXECUÇÃO:

   Departamento de Matemática - CCEN - UFPB - Campus I

3. ÁREA DE PESQUISA:

   Análise

4. SUB-ÁREA DE PESQUISA:

   Equações Diferenciais Parciais

5. ORIENTADOR:

   Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

6. COORIENTADOR:

   Prof. Dr. Pedro Hinojosa Vera

6. ORIENTANDA:

   Nadia Pinheiro Nóbrega

7. PERÍODO DE REALIZAÇÃO:

   agosto de 2002 a julho de 2003

INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais tem sido a porta de entrada à pesquisa para muitos matemáticos devido sua aplicabilidade em diversos ramos da ciência, onde destacamos a Física, Engenharia, Biologia e Economia.

Neste projeto temos como ingrediente básico o estudo de vários métodos clássicos e modernos, nos quais daremos ênfase as técnicas relacionadas com Análise Funcional que vem atuando como uma das mais importantes ferramentas nas pesquisas atuais em Equações Diferenciais.

Estamos preocupados em orientar o aluno sob dois aspectos a "informação" e a "formação". Para a informação apresentaremos as técnicas gerais usadas nesta área. Para sua formação vamos estimular a busca de soluções mais didática dos problemas enfocados, que são adquiridas com leituras de vários textos, desenvolvendo assim habilidades peculiares aos pesquisadores em matemática.

Para isto forneceremos um estudo que permita obter uma boa noção de algumas das técnicas mais importantes utlilizadas no estudo de problemas elípticos e que sirvam para dar uma idéia desta importante sub-área da matemática.

OBJETIVO DO PLANO DE TRABALHO

O objetivo principal deste projeto é introduzir os conceitos básicos necessários para o estudo de problemas que surge em diversos ramos da matemática que são estudados através das Equações diferenciais Parciais. Dessa forma, pretendemos qualificar o aluno para continuar seus estudos futuros em curso de pós-graduação visando a formação e a informação.

Para atingir esta tão importante meta, o grupo que compõe o "Projeto de Pesquisa Integrado em Análise" (veja projeto de pesquisa em anexo) conta com o apoio do DM-UFPB e do Instituto do Milênio - AGIMB (milenio.impa.br). Este projeto vem abraçar os bolsistas - PIBIC integrado-os "lateralmente" e "verticalmente" no grupo, quebrando o "trabalho solitário" do bolsista-PIBIC, de forma a promover uma grande interação entre os componentes do grupo. "Lateralmente" todos os bolsistas do PIBIC, que estarão orientados pelos pesquisadores do grupo supra citado, além de suas pesquisas individuais, terão trabalhos paralelos em conjunto. "Verticalmente"estes futuros bolsista do PIBIC estarão em contato com doutorandos e mestrandos para que os mesmos sintam-se estimulados e direcionados para a continuidade de sua formação objetivando a carreira de pesquisador.

A **metodologia** será o usual, a qual tem sido feita com sucesso nas iniciações à pesquisa em matemática, isto é, realizações de seminários semanais com lista de exercícios para a fixação dos conceitos e leituras de textos para complementação.

PLANO DE TRABALHO DETALHADO

1. Espaços Métricos
   (a) Espaços Normados
   (b) Espaços de Banach
   (c) Espaços de Hilbert
2. Teoria da Medida
   (a) Funções Mensuráveis
   (b) Os Espaços L_p
   (c) Teoremas de Convergência
3. Analise funcional
   (a) Os Teoremas de Hahn-Banach
   (b) O Teorema de Baire e Aplicações
   (c) Topologia Fraca
   (d) O Teorema de Representação de Riesz
   (e) Operadores Compactos
   (f) Alternativa de Fredholm
4. Aplicações a Problemas Elptícos

(a) Espaços de Sobolev
(b) Solução Fraca
(c) Existência e unicidade de sulução fraca para o problema de Dirichlet em um domínio limitado.
(d) Espectro do Operador Laplaciano.

CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO DO PLANO

O conteúdo deste plano será executado em duas etapas descritas a seguir:

Primeira Etapa: de agosto a dezembro de 2002.

Introdução a Análise Funcional e Integral de Lebesgue.

Segunda Etapa: de janeiro a julho de 2003.

Aplicações a problemas elíticos semilineares.

Referências Bibliográficas

[1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*, Masson Paris, 1987

[2] Kreyszing E., *Introductory Funtional Analysis with Applications*, wiley 1978

[3] S. Kasenave, *Funtional Analysis and Appplications*, Bangalore-India, 1989

[4] Djairo de Figueiredo, *Teoria Clássica do Potencial - Editora Universidade de Brasília*

[5] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, second edition, Springer-Verlag, 1983.

[6] Antonio Giglioli, *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*, Notas do 10° Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas 7/26 Julho 1975