C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 1165-1169, 1994

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Some remarks on C^1 versus H^1 minimizers

Stanley ALAMA and Gabriella TARANTELLO

Abstract – In a recent paper, Brezis and Nirenberg [2] considered an elliptic Dirichlet problem with at most critical growth as the Euler-Lagrange equation of a well-defined "action functional" in H_0^1. They show that any local minimizer for this functional in the C^1-topology must correspond to a local minimizer in the H_0^1-topology. The aim of this Note is to show how, according to the nonlinearity, this might or might not be the case for elliptic problems with a well-defined variational structure in H_0^1, but admitting supercritical growth.

Quelques remarques sur les minima locaux relatifs à C^1 et H^1

Résumé – *Récemment, Brezis et Nirenberg* [2] *ont étudié des problèmes variationnels dans H_0^1 associées aux équations elliptiques avec non-linéarités à croissance critique ou souscritique. Ils observent que les minima locaux de cette fonctionnelle dans la topologie de C^1 sont aussi des minima locaux dans la topologie de H_0^1. Dans cette Note, nous présentons des problèmes elliptiques avec non-linéarités surcritiques qui ont une structure variationnelle dans H_0^1. Selon le modèle considéré, nous montrons que des minima dans C^1 pour la fonctionnelle associée sont ou ne sont pas des minima dans H_0^1.*

Version française abrégée – Récemment, Brezis et Nirenberg [2] ont observé que les minima pour la topologie C^1 de problèmes variationnels associés aux équations elliptiques avec non-linéarités à croissance critique ou sous-critique sont aussi des minima pour la topologie de H_0^1. Dans cette Note, nous étudions le rapport entre les minima dans C^1 et dans H_0^1 pour certains problèmes avec non-linéarités à croissance surcritique. Nous étudions le modèle suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^q - h(x)\, u^p, \\ \qquad u > 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ est un ensemble borné avec frontière lisse, $h \geqq 0$, $h \in L^\infty(\Omega)$, et $2^* < q+1 < p+1$, avec $N \geqq 3$ et $2^* = 2N/(N-2)$.

Nous cherchons des solutions faibles pour (1) ou, ce qui revient au même, des points critiques (dans un espace convenablement choisi) de la fonctionnelle

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\,u^2 - \frac{1}{q+1}\,|u|^{q+1} + \frac{1}{p+1}\,h(x)\,|u|^{p+1}\right] dx.$$

Si la condition d'intégrabilité

$$(2) \qquad \int_\Omega \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{(q+1)/(p-q)} dx < +\infty,$$

est satisfaite par h, et si nous posons $I_\lambda(u) = +\infty$ quand $h(x)\,|u|^{p+1} \notin L^1(\Omega)$, alors I_λ est coercive, bornée inférieurement, et semicontinue inférieurement sur $H_0^1(\Omega)$.

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/94/03191165 $ 2.00 © Académie des Sciences

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME. – *Soit* λ_1 *la première valeur propre de* $-\Delta$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Si* $\lambda < \lambda_1$ *et*

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{[(q-1)/(p-q)](N/2)} dx < +\infty, \tag{3}$$

alors $u \equiv 0$ *est un minimum local de* I_λ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

En revanche, si h *satisfait* (2) *mais il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que*

$$\frac{h(x)}{|x-x_0|^r} \leqq A, \qquad \textit{avec} \quad r > \frac{2(p-q)}{q-1}, \tag{4}$$

dans un voisinage de x_0, *alors* (3) *n'est pas vérifiée et* $u \equiv 0$ *est un minimum pour* I_λ *dans* C^1, *mais pas dans* H_0^1.

Remarque 1. – Plus généralement, sous l'hypothèse (3) nous obtenons que tout minimum de I_λ dans C^1 est aussi un minimum dans H_0^1. Nous prouvons ce résultat à l'aide d'une estimation *a priori* des solutions de (1), en conjonction avec l'argument de Brezis et Nirenberg [2].

Remarque 2. – Dans le cas limite $r = 2(p-q)/(q-1)$, les deux conclusions sont possibles, selon la valeur de la constante A. En effet, si A est suffisamment petit, $u \equiv 0$ est un minimum dans H_0^1, mais si A est suffisamment grand $u \equiv 0$ est un minimum dans C^1 mais pas dans H_0^1.

Ce résultat provient de l'étude des solutions positives de l'équation (1). En particulier, il implique que si $q > (N+2)/(N-2)$ et (3) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que les conditions (2) et (4) sont satisfaites, alors (1) possède une solution positive faible $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ pour *chaque* $\lambda \in \mathbf{R}$. De plus, $\|u_\lambda\|_{H_0^1} \to 0$ et $0 > I_\lambda(u_\lambda) \to 0$ pour $\lambda \to -\infty$. Ces résultats suggèrent qu'il peut être très difficile d'obtenir une régularité plus forte pour les solutions u_λ, et qu'il n'est pas possible d'estimer une norme plus forte avec la norme $H_0^1(\Omega)$ de u_λ.

Par contre, si (3) est satisfaite, alors il existe une valeur *finie* $\lambda_* < \lambda_1$ telle que (1) possède une solution positive si et seulement si $\lambda \geqq \lambda_*$. Dans ce dernier cas, les solutions de (1) sont toutes des solutions classiques.

Des résultats se rapportant à la multiplicité des solutions de (1) avec des conditions diverses sur h sont présentés dans [1].

In a recent paper, Brezis and Nirenberg [2] observe that in variational problems associated to elliptic equations with at most critical nonlinearities, every C^1 minimizer must also be an H^1 minimizer. In this Note we discuss the relationship between C^1 minimizers and H^1 minimizers for some problems with supercritical nonlinearities. We consider the following model problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^q - h(x)\,u^p, \\ u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ is a bounded open set with smooth boundary, $h \geqq 0$, $h \in L^\infty(\Omega)$, and $2^* < q+1 < p+1$, with $N \geqq 3$ and $2^* = 2N/(N-2)$.

We seek weak solutions for (1), or equivalently critical points (in a suitable space) of the functional

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)|u|^{p+1}\right]dx.$$

If h satisfies the integrability condition

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{(q+1)/(p-q)} dx < +\infty, \tag{2}$$

and we set $I_\lambda(u) = +\infty$ whenever $h(x)|u|^{p+1} \notin L^1(\Omega)$, then I_λ defines a coercive, bounded from below, lower semicontinuous functional on $H_0^1(\Omega)$.

We have:

THEOREM. – *Let λ_1 be the first eigenvalue of $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$. If $\lambda < \lambda_1$ and h satisfies the (stronger) integrability condition,*

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{[(q-1)/(p-q)](N/2)} dx < +\infty, \tag{3}$$

then $u \equiv 0$ defines a local minimum for I_λ in $H_0^1(\Omega)$.

On the contrary, if h satisfies (2) *but there exists $x_0 \in \Omega$ such that*

$$\frac{h(x)}{|x-x_0|^r} \leqq A, \qquad \textit{with} \quad r > \frac{2(p-q)}{q-1}, \tag{4}$$

in some neighborhood of x_0, then (3) *fails, and $u \equiv 0$ defines a C^1-minimum but not an H_0^1-minimum for I_λ.*

Remark 1. – More generally, when (3) holds we obtain that *any* C^1-minimizer is also an H_0^1-minimizer. This result follows from an *a priori* bound on solutions to (1) together with the argument of Brezis and Nirenberg [2].

Remark 2. – In the limiting case where $r = 2(p-q)/(q-1)$ both phenomena can be observed, and $u \equiv 0$ might or might not be an H_0^1-minimizer, depending on whether A is a small or a large positive constant.

Our result can be illustrated more clearly by taking $h(x) = A|x-x_0|^r$ for some $x_0 \in \Omega$. In this situation, (2) is equivalent to requiring that $r < N(p-q)/(q+1)$, while (3) holds if and only if $r < 2(p-q)/(q-1)$. Then the above result may be summarized as follows:

(i) *If*

$$0 < r < \frac{2(p-q)}{q-1} \quad \textit{or} \quad r = \frac{2(p-q)}{q-1} \quad \textit{and } A \textit{ is small},$$

then $u \equiv 0$ is an H_0^1-minimum.

(ii) *If*

$$\frac{2(p-q)}{q-1} < r < \frac{N(p-q)}{q+1} \quad \textit{or} \quad r = \frac{2(p-q)}{q-1} \quad \textit{and } A \textit{ is large},$$

then $u \equiv 0$ is a C^1 but not an H_0^1-minimizer for I_λ.

Sketch of the proof. – As $q > 1$, it is clear that $u \equiv 0$ is a C^1-minimizer for I_λ. Suppose first that (3) holds. For any given $\varepsilon > 0$, choose $\delta > 0$ such that

$$\left(\int_{\{x: h(x)<\delta\}} \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{[(q-1)/(p-q)](N/2)} dx\right)^{2/N} \leqq \varepsilon.$$

We may estimate the nonlinearity from above as follows:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{u^{q+1}}{q+1} - h\frac{u^{p+1}}{p+1}\,dx \\
&= \int_{\{x: h(x)<\delta\}} \frac{u^2}{h^{(q-1)/(p-q)}}\left[\frac{(h^{1/(p-q)}\,u)^{q-1}}{q+1} - \frac{(h^{1/(p-q)}\,u)^{p-1}}{p+1}\right] dx \\
&\quad + \int_{\{x: h(x)\geq\delta\}} \frac{u^{2^*}}{h^{(q+1-2^*)/(p-q)}}\left[\frac{(h^{1/(p-q)}\,u)^{q+1-2^*}}{q+1} - \frac{(h^{1/(p-q)}\,u)^{p+1-2^*}}{p+1}\right] dx \\
&\leqq C\left(\int_{\{x: h(x)<\delta\}} \left[\frac{1}{h(x)}\right]^{[(q-1)/(p-q)](N/2)} dx\right)^{2/N} \|u\|_{2^*}^2 + C_\delta \|u\|_{2^*}^{2^*} \\
&\leqq C'\,\varepsilon\,\|\nabla u\|_2^2 + C'_\delta\,\|\nabla u\|_2^{2^*}.
\end{aligned}$$

For $\varepsilon > 0$ sufficiently small we conclude:

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 - \lambda u^2) - \frac{u^{q+1}}{q+1} + h\frac{u^{p+1}}{p+1}\,dx \\
&\geqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_2^2 - C'_\delta\,\|\nabla u\|_2^{2^*},
\end{aligned}$$

which yields that $u \equiv 0$ is a local minimum for I_λ.

We now assume that (4) holds, and without loss of generality take $x_0 = 0$. Choose a neighborhood B of $x_0 = 0$ with $\bar{B} \subset \Omega$ and fix $\varphi_1 \in C_0^\infty(B)$. Define $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\sigma}\varphi_1(x/\varepsilon)$, where $\varepsilon > 0$ and $2/(q-1) < \sigma < r/(p-q)$. A simple calculation shows that:

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon^{q+1}\,dx = O(\varepsilon^{N-\sigma(q+1)}), \qquad \int_\Omega h\,\varphi_\varepsilon^{p+1}\,dx \leqq O(\varepsilon^{r+N-\sigma(p+1)}),$$

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon^2\,dx = O(\varepsilon^{N-2\sigma}), \qquad \int_\Omega |\nabla\varphi_\varepsilon|^2\,dx = O(\varepsilon^{N-2-2\sigma}).$$

It is easily verified that each exponent in the above estimates is positive, and in particular $\varphi_\varepsilon \to 0$ in $H_0^1(\Omega)$ as $\varepsilon \to 0$. Furthermore, the term $\int_\Omega \varphi_\varepsilon^{q+1}\,dx$ dominates the others for small ε, thus $I_\lambda(\varphi_\varepsilon) = c\,\varepsilon^{N-\sigma(q+1)}(-1 + o(1)) < 0$ as $\varepsilon \to 0^+$.

This result was motivated by the study of positive solutions for (1). It implies that if $q > (N+2)/(N-2)$ and (3) fails, in the sense that h satisfies (2) and (4), then for *all* $\lambda \in \mathbf{R}$ problem (1) admits a positive weak solution $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$. Furthermore, $\|u_\lambda\|_{H_0^1} \to 0$ and $0 > I_\lambda(u_\lambda) \to 0$ as $\lambda \to -\infty$. Thus it may be difficult to derive any further regularity for u_λ, and in any case it is not possible to estimate any stronger norm of u_λ in terms of its H_0^1 norm.

On the contrary, if h satisfies (3) with $1 < q < p$, then there is a *finite* number $\lambda_* < \lambda_1$ such that (1) admits a positive solution if and only if $\lambda \geqq \lambda_*$. Moreover, in this situation it is always possible to establish regularity for any H_0^1 solution of (1).

Complete multiplicity results for (1) under various assumptions on h are presented in [1].

Note remise le 10 juillet 1994, acceptée le 15 juillet 1994.

REFERENCES

[1] S. ALAMA and G. TRANTELLO, *An elliptic problem with nonlinearity indefinite in sign* (in preparation).
[2] H. BREZIS and L. NIRENBERG, Minima locaux relatifs à C^1 et H^1, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317, Series I, 1993, pp. 465-572.

S. A. : *McMaster Univ., Dept. of Math. and Stat., Hamilton Ont., L8S 3R4 Canada, alama@icarus.math.mcmaster.ca;*

G. T. : *Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", Dipartimento di Matematica, via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, tarantello@mat.utovrm.it*