Análise II - Notas de Aula
Primeiro Semestre de 2007

Alexandre N. Carvalho

22 de novembro de 2007

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Preliminares ↓

1.1 Teoria de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio. Uma relação de ordem parcial em X é uma relação $\leq$ com as seguintes propriedades:

i) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;

ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

iii) $x \leq x$ para todo $x \in X$.

Se além disso

iv) quando $x, y \in X$ então ou $x \leq y$ ou $y \leq x$,

então $\leq$ é dita uma relação de ordem total e X é dito totalmente ordenado.

Se X é parcialmente ordenado por $\leq$ um elemento $x \in X$ é dito maximal (minimal) se e só se $x \leq y$ ($y \leq x$) implica $x = y$. Se $A \subset X$ um elemento $x \in X$ é dito limitante superior (inferior) para A se, e somente se, $a \leq x$ ($x \leq a$), $\forall\ a \in A$.

Se X é totalmente ordenado por $\leq$ diremos que X é bem ordenado se todo subconjunto não vazio de X tem um (necessariamente único) elemento minimal.

Princípio Maximal de Hausdorff *Todo conjunto parcialmente ordenado tem um subconjunto totalmente ordenado maximal.*

Lema de Zorn *Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.*

O Princípio da Boa Ordenação *Todo conjunto não vazio X possui uma boa ordenação.*

O Axioma da Escolha *Se $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma coleção de conjuntos não vazios então $\Pi_{\alpha\in A}X_\alpha = \{f : A \to \cup_{\alpha\in A}X_\alpha : \ f(\alpha) \in X_\alpha\}$ é não vazio.*

Corolário *Se $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma coleção disjunta de conjuntos não vazios, existe $Y \subset \cup_{\alpha\in A}X_\alpha$ tal que $Y \cap X_\alpha$ contém precisamente um elemento para cada $\alpha \in A$.*

1.2 Espaços Métricos

Uma métrica em um conjunto X é uma função $\rho : X \times X \to [0,\infty)$ tal que

- $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall\ x,y \in X$,
- $\rho(x,y) + \rho(y,z) \leq \rho(x,z)$, $\forall\ x,y,z \in X$.

Um conjunto X equipado com uma métrica ρ é chamado um espaço métrico (X,ρ).

Seja (X,ρ) um espaço métrico

- *A bola aberta de centro em $x \in X$ e raio $r > 0$ é o conjunto $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.*
- *A bola fechada de centro em $x \in X$ e raio $r > 0$ é o conjunto $\bar{B}_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.*
- *$A \subset X$ é aberto se para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset A$.*
- *$A \subset X$ é fechado se A^c é aberto.*
- *A união qualquer e a interseção finita de conjuntos abertos são abertos.*

- *A interseção qualquer e a união finita de conjuntos fechados são fechados.*
- *A união de todos os abertos contidos em A é chamada interior de A e é denotado por A^{o}.*
- *A interseção de todos os fechados contendo A é o fecho de A e é denotado por A^{-}.*
- *$A \subset X$ édenso em X se $A^{-} = X$ e nunca denso se $A^{-\mathrm{o}} = \emptyset$.*
- *X é separável se tem um subconjunto contável e denso.*
- *$\{x_n\} \subset X$ é convergente com limite $x \in X$ (escrevemos $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) se $d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Proposição 1.2.1. *Se X é um espaço métrico, $E \subset X$ e $x \in X$, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) $x \in E^{-}$;

b) $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ *para todo* $r > 0$;

c) Existe $\{x_n\} \subset E$ *tal que* $x_n \to x$.

Prova:
$\boxed{\not b \Rightarrow \not a}$ Se $B_r(x) \cap E = \emptyset \Rightarrow B_r(x)^c$ é fechado e contém E mas não contém x, logo $x \notin E^{-}$.
$\boxed{\not a \Rightarrow \not b}$ Se $x \notin E^{-}$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c} \Rightarrow B_r(x) \cap E = \emptyset$.
$\boxed{b \Rightarrow c}$ Se b) vale, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E \cap B_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow 0 \leq \rho(x_n, x) < 1/n \Rightarrow x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
$\boxed{\not b \Rightarrow \not c}$ Se $B_r(x) \cap E = \emptyset \Rightarrow \rho(x, y) \geq r, \forall y \in E \Rightarrow \nexists$ seqüência em E que converge para x.

$\square$

Se $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ são espaços métricos, uma função $f : X_1 \to X_2$ é contínua em $x \in X_1$ dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho_2(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $\rho_1(x, y) < \delta$ (em outras palavras $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \supset B_\delta(x))$. A função f é dita contínua se é contínua em todo $x \in X_1$ e uniformemente contínua se δ na definição de continuidade puder ser escolhido independentemente de x.

Proposição 1.2.2. *$f : X_1 \to X_2$ é contínua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto de X_1 sempre que U é um subconjunto aberto de X_2.*

Prova: *Se f é contínua e $U \subset X_2$ é aberto então para cada $x \in f^{-1}(U)$ temos que existe $\epsilon > 0$ com $B_\epsilon(f(x)) \subset U$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \subset f^{-1}(U)$. Logo $f^{-1}(U)$ é aberto. Se $f^{-1}(U)$ é aberto sempre que U é aberto, $\epsilon > 0$ e $x \in X$ seja $U = B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(U) \ni X$ é aberto $\Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ portanto f é contínua.* □

Uma seqüência $\{x_n\}$ em um espaço métrico (X, ρ) é dita de Cauchy se $\rho(x_n, x_m) \to 0$ quando $n, m \to \infty$. Um subconjunto E de X é dito completo se toda seqüência de Cauchy em E converge em E.

Proposição 1.2.3. *Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.*

Prova: *Se X é completo, $E \subset X$ é fechado e $\{x_n\}$ é de Cauchy em E $\{x_n\}$ tem um limite $x \in X$. Segue da Proposição 1.2.1 que $x \in E^-$ e como E é fechado $x \in E$. Se $E \subset X$ é completo e $x \in E^-$ existe uma seqüência $E \ni x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ logo $\{x_n\}$ é de Cauchy em $E \Rightarrow x \in E$ e $E = E^-$.* □

1.2.1. Distância de um ponto a um conjunto e entre conjuntos

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E, F \subset X$. Definimos a distância de um ponto $x \in X$ a E e a distâcia entre E e F por

$$\begin{aligned}&\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\}\\ &\rho(E, F) = \inf\{\rho(x, y) : x \in E, y \in F\} = \inf\{\rho(x, F) : x \in E\}.\end{aligned}$$

Note que $\rho(x, E) = 0 \Leftrightarrow x \in E^-$. Definimos o diâmetro de um conjunto por

$$diam E = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$$

e E é limitado $\Leftrightarrow$ $diam E < \infty$.

1.2.2. Coberturas e Conjuntos Totalmente Limitados

Se $E \subset X$ e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família de conjuntos tal que $E \subset \cup_{\alpha\in A} V_\alpha$ então, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é dita uma cobertura de E. Um conjunto E é dito totalmente limitado se, para todo $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. *Todo conjunto totalmente limitado é limitado mas a recíproca em geral é falsa. Se* E *é totalmente limitado* E^- *também o é.*

Teorema 1.2.4. *Se* E *é um subconjunto de um espaço métrico* (X,ρ)*, são equivalentes:*

a) E *é completo e totalmente limitado*

b) (Bolzano-Weierstrass) Toda seqüência em E *tem uma subseqüência convergente em* E.

c) (Heine-Borel) Se $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *é uma cobertura aberta de* E *existe um conjunto finito* $F \subset A$ *tal que* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ *cobre* E.

Prova: *A prova seguirá o seguinte roteiro*

$$\boxed{\begin{array}{c} a \Leftrightarrow b \\ a, b \Rightarrow c \\ c \Rightarrow b \end{array}}$$

$\boxed{a \Rightarrow b}$ Se $\{x_n\} \subset E$ é uma seqüência, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $1/2$ e pelo menos uma delas deve conter x_n para um número infinito de índices n. Digamos que $N_1 \subset \mathbb{N}$ é um conjunto infinito e que B_1 é uma bola de raio $1/2$ tal que $x_n \in B_1$, $\forall n \in N_1$. $E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\dfrac{1}{2^2}$ e pelo menos uma dessas bolas contém x_n para um número infinito de índices $n \in N_1$. Digamos que $N_2 \subset N_1$ é um conjunto infinito e que B_2 é uma bola de raio $\dfrac{1}{2^2}$ tal que $x_n \in B_2$ para $n \in N_2$. Continuando indutivamente temos uma seqüência de bolas abertas B_j com raio 2^{-j} conténdo x_n, $n \in N_j$, onde $N_j \subset \mathbb{N}$ é infinito $N_{j+1} \subset N_j$. Se $\{n_j\}$ é uma seqüencia de números naturais tais que $n_j \in N_j$, $n_{j+1} > n_j$, a seqüência $\{x_{n_j}\}$ é tal que (se $k > j$)

$$\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq \sum_{\ell=0}^{k-j-1} \rho(x_{n_{j+\ell}}, x_{n_{j+\ell+1}}) \leq 2^{-j} + 2^{-j-1} + \cdots + 2^{-k+1} \leq 2^{-j+1} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, $\{x_{n_j}\}$ é de Cauchy. Segue do fato que E é completo que $\{x_{n_j}\}$ é convergente em E.

$\boxed{\not{d} \Rightarrow \not{b}}$ Se E não é completo $\exists$ uma seqüência de Cauchy $\{x_n\}$ que não converge em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir para um ponto de E pois caso contrário $\{x_n\}$ convergiria.

Se E não é totalmente limitado seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $\{x_n\} \subset E$ da seguinte forma. Escolha $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \ldots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \setminus \cup_{j=1} B(\epsilon, x_j)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todo m, n e $\{x_n\}$ não tem qualquer subseqüência convergente.

$\boxed{a, b \Rightarrow c}$ É suficiente mostar que se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de E existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intercepta E está contido em algum V_α pois E está contido em um número finito dessas bolas de (a).

Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio 2^{-n} tal que B $B_n \cap E \neq \emptyset$ e $B_n \not\subset V_\alpha$ para qualquer α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$ passando para uma subseqüência podemos supor que $\{x_n\}$ converge para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum α e como V_α é aberto $x \in B_r(x) \subset V_\alpha$ para algum $r > 0$ mas se n é grande o suficiente $B_n \subset B(\epsilon, x) \subset V_\alpha$ contradizendo a hipótese que $B_n \not\subset V_\alpha$ para qualquer α.

$\boxed{\not{b} \Rightarrow \not{c}}$ Se $\{x_n\}$ é uma seqüência em E que não tem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existe uma bola B_x centrada em x que contém x_n para um número finito índices $n \in \mathbb{N}$. Então $\{B_x\}_{x \in E}$ cobre E e não tem subcobertura finita. $\square$

Um conjunto E que possui as propriedades a, b e c é chamado compacto. Todo compacto é fechado e limitado, a recíproca é falsa em geral, mas verdadeira em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.5. *Todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ é compacto.*

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados como qualquer subconjunto limitado está contido em algum cubo

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq R\}$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado. Dado $\epsilon > 0$ tomamos $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expressamos Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo *o intervalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais. O comprimento do lado destes cubos é $2R/k$ e o diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$. Logo eles estão contidos nas bolas de raio ϵ em torno dos seus centros.* $\square$

Duas métricas ρ_1, ρ_2 em um conjunto X são ditas equivalentes se existem constantes positivas $c, \bar{c}$ tais que $c\rho_1 \leq \rho_2 \leq \bar{c}\rho_1$. Métricas equivalentes dão origem aos mesmos abertos, mesmos fechados, mesmos compactos, mesmas seqüencias convergentes (de Cauchy), assim a maioria dos resultados relativos a espaços métricos não dependem de uma métrica específica e sim de sua classe de equivalência.

1.3 Análise Funcional Elementar

1.3.1. Espaços Vetoriais Normados

Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se M, N são subespaços vetoriais de X (escrevemos $M, N \underset{\text{SEV}}{\subset} X$) definimos a soma de M e N por

$$M + N := \{x + y : x \in M,\ y \in N\}.$$

Definição 1.3.1. *Uma seminorma é uma função $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que*

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X \\ \|\lambda x\| &\leq |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

É claro que $\|0\| = 0$, e se

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

diremos que $\|\cdot\|$ é uma norma e que X é um espaço vetorial normado.

Se X é um espaço vetorial normado, então $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, definida por $\rho(x, y) = \|x - y\|$, é uma métrica em X. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um espaço de Banach. Todo espaço vetorial normado pode ser imerso em um espaço de Banach (o seu completamento). Este fato foi provado no curso de Análise I.

Duas normas em X, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se existem c_1 e c_2 tal que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall \;\; x \in X.$$

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita convergente em X se $\sum_1^N x_n \to x$ quando $N \to \infty$ e absolutamente convergente se $\sum_1^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Teorema 1.3.2. *Um espaço vetorial normado é completo $\Leftrightarrow$ toda série absolutamente convergente é convergente.*

Prova: *Se X é um espaço de Banach e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ é fácil ver que $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente.*

Por outro lado, se X é um espaço vetorial normado X onde toda série absolutamente convergente é convergente e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy, então existem $n_1 < n_2 < \cdots$ em $\mathbb{N}$ tais que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-j} \quad n, m \geq n_j$$

escolhemos $y_1 = x_{n_1}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$, $j \geq 2$. Logo

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k}$$

e

$$\sum_{j=1}^{k} \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_{1}^{k} 2^{-j} < \|y_1\| + 1 < \infty.$$

Isto implica que $\{x_{n_k}\}$ é convergente e portanto $\{x_n\}$ é convergente. □

Proposição 1.3.3. *Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.*

Proof: *Se (X, ρ) é um espaço métrico completo, $E \subset X$ é fechado e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em E temos que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in X$. Segue do fato que E é fechado que $x \in E$ e E é completo.*

Se por outro lado E é um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer (X, ρ) e $x \in E^-$ logo existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E que converge para x. Segue do fato que toda seqüência convergente é de Cauchy que $x \in E$. Isto mostra que E é fechado. □

Definição 1.3.4. *$T : X \to Y$ linear entre dois espaços vetoriais normados é limitada se $\exists\ c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X,\ \forall\ X$.*

Proposição 1.3.5. *Se X, Y são espaços vetoriais normados $T : X \to Y$ é linear, são equivalentes:*

1. *T é contínua,*
2. *T é contínua em 0,*
3. *T é limitada.*

Prova:

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ *É evidente.*

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ *Dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que $T([B_\delta(0)]^-) \subset T(B_{2\delta}(0)) \subset \{y \in Y : \|y\| < 1\}$. Como $\|Tx\| \leq 1$ quando $\|x\| \leq \delta$ temos que $\|T\frac{\delta x}{\|x\|}\| \leq 1$ para $0 \neq x \in X$. Segue que $\|Tx\| \leq \delta^{-1}\|x\|$ para todo $x \in X$.*

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ *Se existe $c > 0$ tal que, $\forall\ x, y \in X$, $\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\|$ e $\epsilon > 0$ é dado, escolhemos $\delta = \frac{\epsilon}{c}$. Então $\|x - y\| < \delta$ implica $\|Tx - Ty\| < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon$.* $\square$

$L(X, Y)$ denota o conjunto das transformações lineares e contínuas de X em Y. $L(X, Y)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in X\} \\ &= \sup_{\substack{\|x\| \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposição 1.3.6. *Se Y é completo então $L(X, Y)$ é completo.*

Prova: *Seja $\{T_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $L(X, Y)$. Então $\{T_n x\}$ é de Cauchy em Y. Defina $Tx = \lim\limits_{n \to \infty} T_n x$.*

É claro que T é linear e que

$$\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leq \limsup_{n \geq 1} \|T_n\| \cdot \|x\|.$$

Logo $T \in L(X, Y)$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para todo $m, n > N$ e

$$\|T_n x - T_m x\| = \|T_n - T_m\|\, \|x\| < \epsilon\|x\|\ \forall\ m, n \geq N \text{ e } \forall\ x \in X$$

Logo

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon \|x\| \ \forall \ n \geq N \text{ e } \forall \ x \in X.$$

Portanto $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ *para todo* $n \geq N$ *e* $T_n \to T$. $\square$

Também é verdade que se $L(X, Y)$ *é completo então* Y *é completo. Veja [4]*

Se $T \in L(X, Y)$ *e* $S \in L(Y, Z)$ *então* $S \circ T \in L(X, Z)$ *e* $\|S \circ T\| \leq \|S\| \ \|T\|$.

$T \in L(X, Y)$ *é inversível ou um isomorfismo se* T *é bijetora e* $T^{-1} \in L(Y, X)$*, isto é,* $\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X$ *para algum* $c > 0$*.* T *é uma isometria se* $\|Tx\|_Y = \|x\|_X \ \forall \ x \in X$ *.*

1.3.2. O Teorema de Hahn-Banach Analítico

- *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*.*
  Uma transformação linear $f : X \to \mathbb{K}$ *é chamada um funcional linear.*

- *Se* X *é um espaço vetorial normado,* $L(X, \mathbb{K})$ *é um espaço de Banach (veja Proposição 1.3.6) chamado espaço dual de* X *e denotado por* X^**.*

- *Se* X *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$ *ele também é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Assim, podemos considerar funcionais lineares reais* $f : X \to \mathbb{R}$ *ou complexos* $f : X \to \mathbb{C}$*.*

Proposição 1.3.7. *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$ *. Se* $f : X \to \mathbb{C}$ *é um funcional linear e* $u = \mathrm{Re}\, f$ *então* u *é um funcional linear real e* $f(x) = u(x) - iu(ix)$ *para todo* $x \in X$*. Reciprocamente se* $u : X \to \mathbb{R}$ *é um funcional linear real e* $f : X \to \mathbb{C}$ *é definido por* $f(x) = u(x) - iu(ix)$*, então* f *é um funcional linear complexo. Se* X *é normado,* f *é limitado se, e somente se,* u *é limitado e neste caso* $\|f\| = \|u\|$*.*

Prova: *Se* $f : X \to \mathbb{C}$ *é linear então* $u = \mathrm{Re}\, f$ *é linear e Im* $f(x) = -\mathrm{Re}\, if(x) = -\mathrm{Re}\, f(ix) = -u(ix)$*. Por outro lado se* u *é um funcional linear real* $f(x) = u(x) - iu(ix)$ *é claramente linear.*

Se X *é normado e* f *é limitado* $|u(x)| = |\mathrm{Re}\ f(x)| \leq |f(x)|$*. Portanto,* u *é limitado e* $\|u\| \leq \|f\|$*. Por outro lado, se* u *é limitado,* $|f(x)| = \underbrace{e^{\mathrm{arg(f(x))}}}_{\alpha} f(x) =$

$f(\alpha x) = u(\alpha x) \in \mathbb{R}$, logo

$$|f(x)| \leq \|u\| \|\alpha x\| = \|u\| \|x\|$$

e f é limitado com $\|f\| \leq \|u\|$. Em ambos os casos $\|f\| = \|u\|$. $\square$

Definição 1.3.8. *Se X é normado, um funcional sublinear é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad e \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x, y \in X \quad e \quad \lambda \geq 0.$$

Teorema 1.3.9 (Hahn-Banach)**.** *Seja X um espaço vetorial real, p um funcional sublinear em X, $M \underset{\text{SEV}}{\subset} X$ e f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear F em X tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F_{|_M} = f$.*

Prova: *Começamos mostrando que se $x \in X \backslash M$, podemos estender f a um funcional linear g definido sobre $M + \mathbb{R}x$ e satisfazendo $g(y) \leq p(y)$ para todo $y \in M + \mathbb{R}x$. Se $y_1, y_2 \in M$ temos*

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x) + p(x + y_2)$$

ou

$$f(y_1) - p(y_1 - x) \leq p(x + y_2) - f(y_2).$$

Logo

$$r_1 = \sup\{f(y) - p(y - x) : y \in M\} \leq \inf\{p(x + y) - f(y), y \in M\} = r_2.$$

Seja α tal que $r_1 \leq \alpha \leq r_2$ e defina $g : M + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ por $g(y + \lambda x) = f(y) + \lambda\alpha$. É claro que g é linear e que $g_{|_M} = f$, o que implica $g(y) \leq p(y)$ para todo $y \in M$. Além disso, se $\lambda > 0$ e $y \in M$, temos que

$$g(y + \lambda x) = \lambda[f(y/\lambda) + \alpha] \leq \lambda[f(y/\lambda) + p(x + (y/\lambda)) - f(y/\lambda)] = p(y + \lambda x)$$

e se $\lambda = -\mu < 0$ temos que

$$g(y + \lambda x) = \mu[f(y/\mu) - \alpha] \leq \mu[f(y/\mu) - f(y/\mu) + p(y/\mu - x)] = p(y + \lambda x).$$

Portanto $g(z) \leq p(z)$ para todo $z \in M + \mathbb{R}x$.

Isto mostra que o domínio de uma extensão linear maximal de f satisfazendo $f \leq p$ deve ser o espaço todo.

Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as extensões lineares de f satisfazendo $f \leq p$ e parcialmente ordenado pela inclusão dos gráficos. Como um conjunto linearmente ordenado de extensões tem a união como limitante superior segue do lema de Zorn que $\mathcal{F}$ tem um elemento maximal e o resultado segue. $\square$

Se p é uma seminorma e $f : X \to \mathbb{R}$, a desigualdade $f \leq p$ é equivalente a $|f| \leq p$ pois $|f(x)| = \pm f(x) = f(\pm x) < p(\pm x) = p(x)$.

Teorema 1.3.10 (Hahn-Banach Complexo)**.** *Seja X um espaço vetorial complexo, p uma seminorma em X , $M \underset{\text{SEV}}{\subset} X$ e $f : M \to \mathbb{C}$ linear com $|f(x)| \leq p(x)$ para $x \in M$. Então existe $F : X \to \mathbb{C}$ linear tal que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F_{|_M} = f$.*

Prova: *Seja $u = \mathrm{Re}\ f$. Pelo Teorema anterior existe uma extensão linear U de u a X tal que $|U(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Seja $F(x) = U(x) - iU(ix)$. Então F é uma extensão linear complexa de f. Para cada $x \in X$, se $\alpha = e^{-i\mathrm{arg}(F(x))}$, temos que $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x)$.* $\square$

Corolário 1.3.11. *Seja X um espaço vetorial sobre K, M um subespaço vetorial de X $f : M \to \mathbb{K}$ um funcional linear com*

$$\|f\|_{M^*} := \sup\{|f(x)| : x \in M \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Então existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}\big|_M = f$ e $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

Prova: *Basta aplicar o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.3.10) com $p(x) = \|f\|_{M^*}\|x\|$.*

Teorema 1.3.12. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$.*

a. Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} X$ é fechado e $x \in X \setminus M$ existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$, $f_{|_M} = 0$. De fato, se $\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, f pode ser tomada tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \delta$.

b. Se $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.

c. Os funcionais lineares limitados em X separam pontos.

d. Se $x \in X$ defina $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ por

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in X^*.$$

Então a transformação $x \xrightarrow{T} \hat{x}$ é uma isometria linear de X em X^{**}.

Prova:

a) Defina f em $M + \mathbb{C}x$ por $f(y + \lambda x) = \lambda\delta$, ($y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{C}$). Então $f(x) = \delta$, $f_{|_M} = 0$ e, para $\lambda \neq 0$,

$$|f(y + \lambda x)| = |\lambda|\delta \leq |\lambda| \; \|\lambda^{-1}y + x\| = \|y + \lambda x\|.$$

Do Teorema de Hahn Banach com $p(x) = \|x\|$ e M substituído por $M + \mathbb{C}x$ obtemos a extensão F de f a X. É fácil ver que $\|F\| = 1$ e que $F(x) = \delta$.

b) É um caso especial de a) com $M = 0$.

c) Se $x \neq y$ existe $f \in X^*$ com $f(x - y) \neq 0$ isto é $f(x) \neq f(y)$.

d) $\hat{x}$ é claramemente linear de X^* em $\mathbb{K}$. A transformação $x \xrightarrow{T} \hat{x}$ é linear, pois $T(\alpha x + \beta y)(f) = (\widehat{\alpha x + \rho y})(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \rho f(y) = \alpha\hat{x}(f) + \rho\hat{x}(f) = \alpha T(x)(f) + \rho T(y)(f)$, para toda $f \in X^*$. Note que

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \; \|x\| \Rightarrow \|\hat{x}\| \leq \|x\|.$$

Por outro lado de b) existe $f \in x^*$ tal que $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$ e isto implica que $|\hat{x}(f)| = f(x) = \|x\|$ e $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$. $\square$

Seja $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$. Como X^{**} é um espaço de Banach $[\hat{X}]^-$ também é Banach e $x \ni X \to \hat{x} \in \hat{X}$ é uma imersão densa de X em $[\hat{X}]^-$. $[\hat{X}]^-$ é chamado completamento de X. Em particular se X é Banach $[\hat{X}]^- = \hat{X}$.

Se $\dim X$ é finita então $\hat{X} = X^{**}$ pois estes espaços tem a mesma dimensão.

Para dimensão infinita nem sempre $\hat{X} = X^{**}$ e quando este é o caso X é dito reflexivo.

Geralmente identificamos X com $\hat{X}$ e consideramos X como um subespaço de X^{**}. Com isto, reflexividade passa então a ser entendida como $X = X^{**}$.

1.3.3. Conseqüências do Teorema de Categoria

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Diremos que T é uma aplicação aberta se $T(U)$ é um subconjunto aberto de Y sempre que U é um subconjunto aberto de X.

Se Z é um espaço vetorial normado denotaremos o conjunto $\{z \in Z : \|z - z_0\| < r\}$ por $B_r^Z(z_0)$ (ou simplesmente $B_r(z_0)$ quando não houver possibilidade de confusão) .

Teorema 1.3.13. *[Aplicação Aberta] Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in L(X, Y)$ é sobrejetora, então T é aberta.*

Para provar o Teorema da Aplicação Aberta precisamos dos dois lemas seguintes:

Lemma 1.3.14. *Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:*

a) T é uma aplicação aberta;

b) Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.

Prova: *É claro que $a \Rightarrow b$. Mostremos que $b \Rightarrow a$. Basta mostrar que Tx é interior a $T(U)$ para todo $x \in U$. Se $x \in U$, como U é aberto, existe $p > 0$ tal que $B_p^X(x) \subset U$ e*

$$\begin{aligned} T(U) \supset T(B_p^X(x)) &= T(x + pB_1^X(0)) = Tx + pT(B_1^X(0)) \\ &\supset Tx + B_r^Y(0) = B_r^Y(Tx) \end{aligned}$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. □

Lemma 1.3.15. *Se X, Y são espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$ é tal que, para algum $r > 0$,*

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: *Como T comuta com homotetias segue que se $\|y\| < r2^{-n}$ então $y \in [T(B^X_{2^{-n}}(0))]^-$. Suponha que $\|y\| < \frac{r}{2}$; podemos encontrar $x_1 \in B^X_{\frac{1}{2}}(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$ e procedendo indutivamente podemos encontrar $x_n \in B^X_{2^{-n}}(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como X é completo a série $\sum x_n$ converge, digamos para x, mas então $\|x\| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Em outras palavras $T(B^X_1(0)) \ni y$, para todo $\|y\| < \frac{r}{2}$.*

Prova do Teorema da Aplicação Aberta: *Como $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty B^X_n(0)$ e T é sobre temos que $Y = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty T(B^X_n(0))$ mas Y é completo e $y \to ny$ é um homeomorfismo de Y nele mesmo que leva $B^X_1(0)$ em $B^X_n(0)$. Do Teorema de Baire $T(B^X_1(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é, existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B^Y_{4r}(y_0)$ está contido em $[T(B^X_1(0))]^-$. Tome $y_1 = Tx_1 \in T(B^X_1(0))$ tal que $\|y_1 - y_0\| < 2r$. Então $B^Y_{2r}(y_1) \subset B^Y_{4r}(y_0) \subset [T(B^X_1(0))]^-$, logo se $\|y\| < 2r$*

$$y = Tx_1 + y - y_1 \in T(B^X_1(0)) + [T(B^X_1(0))]^- \subset 2[T(B^X_2(0))]^-.$$

Dividindo ambos os lados por 2 concluímos que $\exists\ r > 0$ tal que se $\|y\| < r$ então $y \in [T(B^X_1(0))]^-$. O resultado agora segue dos Lemas anteriores. $\square$

Corolário 1.3.16. *Se X e Y são espaços de Banach e $T \in L(X,Y)$ é bijetora, então T é um isomorfismo; isto é, $T^{-1} \in L(Y,X)$.*

Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ uma transformação linear (é claro que $D(T) \underset{\text{SEV}}{\subset} X$). Definimos o gráfico de T por

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y$$

Uma transformação linear $T : D(T) \subset X \to Y$ é fechada se $[G(T)]^- = G(T)$. Toda transformação linear contínua T é fechada.

Teorema 1.3.17. *[Gráfico Fechado] Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \to Y$ é fechada então T é limitada.*

Prova: *Sejam π_1 e π_2 as projeções de $G(T)$ em X e Y, isto é, $\pi_1(x, T_x) = x$ e $\pi_2(x, T_x) = Tx$. Obviamente $\pi_1 \in L(G(T), X)$ e $\pi_2 \in L(G(T), Y)$. Como X e Y são completos $X \times Y$ é completo e portanto $G(T)$ é completo (pois é fechado, veja Proposição 1.3.3). π_1 é uma bijeção de $G(T)$ em X e portanto π_1^{-1} é limitado. Então $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ é limitado.* $\square$

Teorema 1.3.18 (Princípio da Limitação Uniforme)**.** *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A \subset L(X,Y)$*

a) *Se* $\sup\limits_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ *para x em subconjunto de segunda categoria, então* $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.

b) *Se X é um espaço de Banach e $\sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in X$, então $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.*

Prova: *Basta provar a) que b) segue do Teorema de Categoria de Baire. Seja*

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T\in A} \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T\in A} \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}.$$

Então, os E_n's são fechados e como a união $\bigcup\limits_{n\geq 1} E_n$ contém um conjunto de segunda categoria devemos ter que algum E_n contém uma bola não trivial $[B_r(x_0)]^-$, $r > 0$. Então $E_{2n} \supset [B_r(0)]^-$ pois sempre que $\|x\| \leq r$ temos que $-x + x_0 \in [B_r(x_0)]^- \subset E_n$ e

$$\|Tx\| = \|T(x - x_0)\| + \|Tx_0\| \leq n + n = 2n\,, \quad \forall \;\; T \in A.$$

Logo $\|Tx\| \leq 2n$ sempre que $\|x\| \leq r$ e para todo $T \in A$ de onde segue que

$$\|T\| \leq \frac{2n}{r} \;\; \forall \;\; T \in A.$$

$\square$

Corolário 1.3.19. *Se X, Y são espaços vetoriais normados e $\{T_n\} \subset L(X,Y)$ é tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in X$ e $T : X \to Y$ é definida por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então $T \in L(X,Y)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

Corolário 1.3.20. *Se X é um espaço de Banach e $B \subset X$, suponha que $\forall \; f \in X^* \; f(B) = \bigcup_{b\in B} f(b)$ é limitado. Então B é limitado*

Prova: *Defina $\hat{b} : X^* \to \mathbb{K}$ por*

$$\hat{b}(f) = f(b).$$

Então para cada $f \in X^*$

$$\sup_{b\in B} |\hat{b}(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty$$

segue do Princípio da Limitação Uniforme e do Teorema 1.3.12 d) que

$$\sup_{b\in B}\|\hat{b}\| = \sup_{b\in B}\|b\| < \infty.$$

$\square$

Corolário 1.3.21. *Seja X um espaço de Banach e $B^* \subset X^*$. Suponhamos que $\forall x \in X$ o conjunto $B^*(x) = \bigcup_{b^*\in B^*} f(x)$ é limitado. Então B^* é limitado.*

Prova: *Por hipótese $|b^*(x)| \leq c_x$ para todo $b^* \in B^*$. Segue do Princípio da Limitação Uniforme que $\sup_{b^*\in B^*}\|b^*\| < \infty$.* $\square$

1.4 Exercícios

1. *Mostre que todo conjunto limitado é totalmente limitado e encontre um exemplo de conjunto limitado que não é totalmente limitado.*

2. *Mostre que, se $T \in L(X,Y)$ então,*

$$\inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in X\} = \sup_{\substack{\|x\|\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

3. *Mostre que se $L(X,Y)$ é completo então Y é completo.*

Preliminares $\uparrow$

Capítulo 2

Análise Funcional

Primeira Aula (100 minutos) $\downarrow$

2.1 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Seja X um espaço vetorial normado real.

Definição 2.1.1. *Um hiperplano (afim) é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

onde $f : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que H é o hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Definição 2.1.2. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que $C \subset X$ é convexo se $tx + (1-t)y \in C$ sempre que $t \in [0,1]$ e $x, y \in C$.*

Proposição 2.1.3. *O hiperplano de equação $[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é contínua.*

Prova: É claro que se f é contínua H é fechado. Por outro lado, se H é fechado, seja $x_0 \in H^c$ e suponha que $f(x_0) < \alpha$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset H^c$. Então $f(B_r(x_0))$ é convexo e não intercepta $\{\alpha\}$. Logo $f(B_r(x_0)) \subset \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$. Disto seque que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \quad \forall \;\; z \in B_1(0)$$

e

$$f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r}$$

e portanto

$$\|f\| \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{r}\,.$$

$\square$

Definição 2.1.4. *Se $A, B \subset X$ diremos que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido fraco se*

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha \ \ \forall \ \ x \in A \quad e \\ f(x) &\geq \alpha \ \ \forall \ \ x \in B\,. \end{aligned}$$

Diremos que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido forte se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha - \epsilon \ \ \forall \ \ x \in A \quad e \\ f(x) &\geq \alpha + \epsilon \ \ \forall \ \ x \in B\,. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.5. *[Hahn-Banach (Primeira Forma Geométrica)] Seja X um espaço vetorial normado real e sejam $A, B \subset X$ dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se A é aberto existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido fraco.*

Para provar este resultado precisamos dos lemas seguintes:

Lema 2.1.6. *[O Funcional de Minkowski de um convexo] Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset X$ um aberto convexo com $0 \in C$. Para todo $x \in X$ defina*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \ ; \ \alpha^{-1}x \in C\}$$

(p é o funcional de Minkowski de C). Então, p é um funcional sub-linear (veja Definição 1.3.8) e existe M tal que

$$\begin{aligned} &0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \ \ \forall \ \ x \in X\,, \\ &C = \{x \in X : p(x) < 1\}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Prova: *Seja $r > 0$ Tal que $B_{2r}(0) \subset C$. Note que, para todo $x \in X$, $r\dfrac{x}{\|x\|} \in B_{2r}(0) \subset C$ e portanto*

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\,\|x\|$$

e a primeira parte de (2.1) segue fazendo $M = \dfrac{1}{r}$. *Se* $x \in C$, *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $(1+\epsilon)x \in C$. *Assim* $p(x) \leq \dfrac{1}{1+\epsilon} < 1$. *Reciprocamente se* $p(x) < 1$ *existe* $0 < \alpha < 1$ *tal que* $\alpha^{-1}x \in C$ *e assim* $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

Vamos agora verificar que p *é um funcional sub-linear. É claro que* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda > 0$. *Se* $x, y \in X$ *seja* $\epsilon > 0$. *Então* $\dfrac{x}{p(x)+\epsilon} \in C$ *e* $\dfrac{y}{p(y)+\epsilon} \in C \Rightarrow \dfrac{tx}{p(x)+\epsilon} + \dfrac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon} \in C$ *para todo* $t \in [0,1]$. *Em particular se* $t = \dfrac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}$ *obtemos* $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in C$. *Disto obtemos que* $p(x+y) \leq p(x)+p(y)+2\epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ *e o resultado segue.* □

Lema 2.1.7. *Seja* $C \subset X$ *uma aberto convexo não vazio e* $x_0 \in X \setminus C$. *Então existe* $f \in X^*$ *tal que* $f(x) < f(x_0)$ *para todo* $x \in C$. *Em particular o hiperplano fechado de equação* $[f = f(x_0)]$ *separa* C *de* x_0 *no sentido fraco.*

Prova: *Por translação sempre podemos supor que* $0 \in C$. *Sejam* p *o funcional de Minkowski de* C *e* $G = \mathbb{R}x_0$ *e* $g : G \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(tx_0) = t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

É claro que

$$g(x) = g(tx_0) = \begin{cases} t \leq t \cdot p(x_0) = p(tx_0)\ , & t > 0 \\ t \leq 0 \leq p(tx_0)\ , & t \leq 0. \end{cases}$$

Logo, do Teorema de Hahn-Banach real, existe $f : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $f|_G = g$ *e*

$$f(x) \leq p(x) \ \ \forall \ \ x \in X\ .$$

Em particular $f(x_0) = 1$ *e* f *é contínua pois* $p(x) \leq M\|x\|$. *Além disso* $f(x) < 1$ *para todo* $x \in C$ *e o resultado está provado.* □

Demonstração do Teorema

Seja $C = A - B$. *Então* C *é convexo e aberto e* $0 \notin C$ *(pois* $A \cap B = \emptyset$*). Segue do lema acima que existe* $f \in X^*$ *tal que*

$$f(z) < 0 \ \ \forall \ \ z \in C$$

e portanto

$$f(a) < f(b) \;\; \forall \;\; a \in A \;\; \text{e} \;\; b \in B \;.$$

Seja α tal que $\sup_{a\in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{b\in B} f(b)$. Então, o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido fraco. □

Teorema 2.1.8 (Hahn-Banach (Segunda Forma Geométrica))**.** *Seja X um espaço vetorial normado real, A e B convexos, não vazios e disjuntos em X. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte.*

Prova: *Seja $A_\epsilon = A + B_\epsilon(0)$, $B_\epsilon = B + B_\epsilon(0)$, $\epsilon > 0$, então A_ϵ e B_ϵ são abertos, convexos e não vazios. Para $\epsilon > 0$ pequeno A_ϵ e B_ϵ são disjuntos (como A é fechado $d(b, A) > 0 \;\; \forall \;\; b \in B$ e como B é compacto $\inf_{b\in B} d(b, A) = d(B, A) > 0$). Segue da primeira versão que existe um hiperplano fechado que separa A_ϵ e B_ϵ no sentido fraco. Logo*

$$f(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \epsilon z) \;\; \forall \;\; x \in A, \; y \in B, \; z \in B_1(0) \;.$$

Logo

$$f(x) - \epsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) + \epsilon\|f\| \;\; \forall \;\; x \in A, \; y \in B$$

e o resultado segue do fato que $f \neq 0$. □

Corolário 2.1.9. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $F \subset X$ um subespaço vetorial próprio de X ($\bar{F} \subsetneq X$). Então, existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que*

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in F$$

Prova: *Sabemos que X é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Dado $x_0 \notin \bar{F}$, existe $f \in X \to \mathbb{R}$ linear contínua tal que*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in F.$$

Segue que, $f(x) = 0$, $\forall x \in F$.

Seja $g : X \to \mathbb{C}$ dado por $g(x) = f(x) - if(ix)$ no caso em que X é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{C}$. □

Obs.: *É freqüente utilizar o corolário acima para mostrar que F é denso mostrando que*

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in F \Rightarrow f = 0.$$

Primeira Aula (100 minutos) ↑

Segunda Aula (100 minutos) $\downarrow$

2.2 Funções Convexas Conjugadas

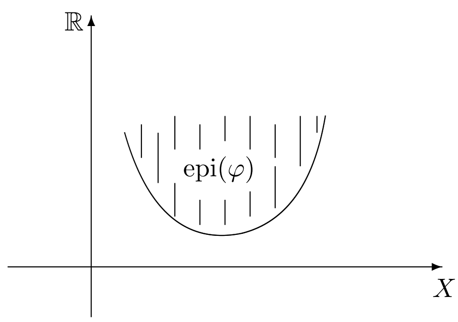
Seja X um espaço métrico e $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$. Definimos o domínio $D(\varphi)$ de φ por

$$D(\varphi) := \{x \in X : \varphi(x) < \infty\}.$$

Diremos que φ é própria se $D(\varphi) \neq \emptyset$.

O epi-gráfico de φ é o conjunto

$$epi(\varphi) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\}$$



Definição 2.2.1. *$\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é semicontínua inferiormente se para todo $x \in X$*

$$\liminf_{y \to x} \varphi(y) := \lim_{\delta \to 0} \inf_{\substack{y \in B_\delta(x) \\ y \neq x}} \varphi(y) \geq \varphi(x)$$

Propriedades: *Seja X um espaço métrico e $\phi : X \to (-\infty, \infty]$. Então,*

a) φ é semicontínua inferiormente se e somente se epi(φ) é fechado

Prova: *Suponha que φ é semicontínua inferiormente e que $(x, \lambda) \in$ epi$(\varphi)^-$ então, existe seqüência $(x_n, \lambda_n) \in$ epi(φ) tal que $(x_n, \lambda_n) \xrightarrow{X \times \mathbb{R}} (x, \lambda)$. Segue que*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda, \ \lambda_n \geq \varphi(x_n), \\ &\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) \geq \phi(x). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n \geq \liminf_{n \to \infty} \phi(x_n) \geq \phi(x).$$

O que mostra que $(x, \lambda) \in \operatorname{epi}(\varphi)$ *e que* $\operatorname{epi}(\varphi)$ *é fechado.*

Suponha que $\operatorname{epi}(\varphi)$ *é fechado. Para cada* $x \in X$ *e* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x_n \neq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se* $\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) = +\infty$ *concluímos. Se* $\mu > \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, $\{\varphi(x_n)\}$ *tem uma subseqüência* $\{\varphi(x_{n_k})\}$ *que satisfaz* $\varphi(x_{n_k}) < \mu$ *e* $(x_{n_k}, \mu) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. *Segue do fato que* $\operatorname{epi}(\varphi)$ *é fechado que* $(x, \mu) \in \operatorname{epi}(\varphi)$. *Isto mostra que* $\phi(x) \leq \mu$ *for all* $\mu > \liminf_{n\to\infty} \phi(x_n)$ *e* $\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) \geq \phi(x)$. $\square$

b) φ *é semicontínua inferiormente se, e somente se, o conjunto* $[\varphi \leq \lambda] = \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ *é fechado* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Prova: *Suponha que* φ *é semicontínua inferiormente e que* $x \in \{\varphi \leq \lambda\}^-$. *Então, existe* $x_n \in [\varphi \leq \lambda]$ *tal que* $x_n \to x$. *Como* $\varphi(x_n) \leq \lambda$ *para todo* n, *segue que* $\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \lambda$. *Isto implica que* $x \in [\varphi \leq \lambda]$ *e o resultado segue. Por outro lado, se* $[\varphi \leq \lambda]$ *é fechado* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x_n \to x$ *podemos ter:*

- $\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) = +\infty$ *e a prova está concluída,*
- *para todo* $\mu > \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, $x_n \in [\varphi \leq \mu]$ *para um número infinito de índices. Neste caso, do fato que* $[\varphi \leq \mu]$ *é fechado, segue que* $x \in [\varphi \leq \mu]$, *mostrando que* $\liminf_{n\to\infty} \phi(x_n) \geq \phi(x)$ *e a prova está concluída.* $\square$

c) Se X *é compacto e* φ *é semicontínua inferiormente, então* φ *alcança seu mínimo.*

Prova: *Primeiramente mostremos que* φ *é limitada inferiormente. Suponha que não. Então, existe seqüência* $\{x_n\}$ *em* X *tal que* $\varphi(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. *Como* X *é compacto, podemos supor que* $\{x_n\}$ *é convergente com limite* $x \in X$. *Segue da semicontinuidade inferior que* $\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x) > -\infty$ *o que é uma contradição. Seja* $\{x_n\}$ *tal que* $\varphi(x_n) \to \lambda := \inf_{x\in X} \varphi(x)$. *Do fato que* X *é compacto, podemos supor que* $\{x_n\}$ *é convergente com limite* $x \in X$. *Segue que*

$$\inf_{z\in X} \varphi(z) = \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \phi(x)$$

e o resultado está provado. $\square$

Definição 2.2.2. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ é convexa se*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall \quad x, y \in X, \quad t \in [0,1]$$

Propriedades: *Se X é um espaço vetorial normado e $\phi : X \to (-\infty, \infty]$ é uma função, temos que:*

a) *φ é convexa se, e somente se, $\mathrm{epi}(\varphi)$ é convexo.*

Prova: *Suponha que $\mathrm{epi}(\varphi)$ é convexo e que $(x, \lambda), (y, \mu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$. Então, para $t \in [0,1]$,*

$$t(x, \lambda) + (1-t)(y, \mu) = (tx + (1-t)y, t\lambda + (1-t)\mu) \in \mathrm{epi}(\varphi).$$

Disto segue que $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\lambda + (1-t)\mu$. O resultado segue, tomando-se $\lambda = \varphi(x)$ e $\mu = \varphi(y)$.

Por outro lado, se φ é convexa e $(x, \lambda), (y, \mu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$ temos,

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y) \leq t\lambda + (1-t)\mu, \quad [0,1].$$

Disto segue que $(tx + (1-t)y, t\lambda + (1-t)\mu) \in \mathrm{epi}(\varphi)$. □

b) *Se φ é convexa, então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $[\varphi \leq \lambda]$ é convexo. Não vale a volta.*

Prova: *Se φ é convexa e $x, y \in [\varphi \leq \lambda]$, temos que*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda.$$

Segue que $tx + (1-t)y \in [\varphi \leq \lambda]$.

Definição 2.2.3. *Seja X é um espaço vetorial normado real e $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ uma função própria. Definimos a função conjungada de φ por $\varphi^* : X^* \to (-\infty, \infty]$*

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in X} \{f(x) - \varphi(x)\}, \quad f \in X^*.$$

Proposição 2.2.4. *Seja X é um espaço vetorial normado real e $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ uma função própria. Então, $\varphi^* : X^* \to \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferiormente.*

Prova: *Para cada* $x \in X$,

$$f \mapsto \varphi_x(f) = f(x) - \varphi(x)$$

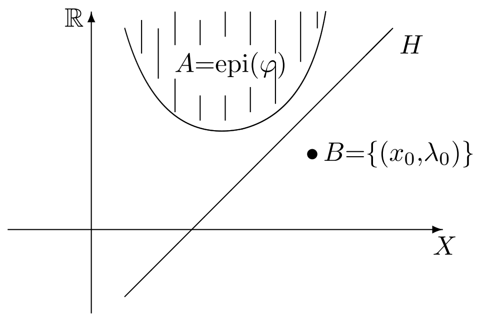
é convexa e contínua (portanto semicontínua inferiormente). Segue que

$$f \mapsto \varphi^*(f) = \sup_{x \in X} \varphi_x(f)$$

é convexa e semicontínua inferiormente (veja Exercícios 12 e 16). □

Proposição 2.2.5. *Se* X *é um espaço vetorial normado real,* φ *uma função convexa, semicontínua inferiormente e própria, então* φ^* *é própria.*

Prova: *Seja* $x_0 \in D(\varphi)$ *e* $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. *Aplicando a Segunda Forma Geométrica do Teorema Hahn-Banach com* $A = \text{epi}(\varphi)$ *e* $B = \{(x_0, \lambda_0)\}$ *em* $X \times \mathbb{R}$,



obtemos a existência de hiperplano $[\Phi = \alpha]$, *em* $X \times \mathbb{R}$, *que separa fortemente* A *e* B. *Observe que a aplicação*

$$x \in X \longmapsto \Phi((x, 0))$$

é um funcional linear contínuo sobre X *e assim* $\Phi((x, 0)) = f(x)$ *com* $f \in X^*$. *Tomando* $K = \Phi((0, 1))$ *temos que*

$$\Phi((x, \lambda)) = f(x) + K\lambda, \text{ para todo } (x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}.$$

Assumindo, sem perda de generalidade, que $\Phi > \alpha$ *sobre* A *e* $\Phi < \alpha$ *sobre* B *obtemos*

$$f(x) + K\lambda > \alpha \quad \forall \quad (x, \lambda) \in epi(\varphi)$$

e

$$f(x_0) + K\lambda_0 < \alpha.$$

Em particular (como $(x,\varphi(x)) \in \mathrm{epi}(\varphi)$*)*

$$f(x) + K\varphi(x) > \alpha \ \ \forall \ \ x \in D(\varphi) \tag{2.2}$$

e então

$$f(x_0) + K\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + K\lambda_0.$$

De onde

$$K(\lambda_0 - \varphi(x_0)) < 0 \Rightarrow K > 0$$

e de (2.2)

$$-\frac{1}{K}f(x) - \varphi(x) < -\alpha/K, \ \forall x \in D(\varphi)$$

e portanto

$$\varphi^*\left(-\frac{1}{K}f\right) < \infty.$$

□

Definição 2.2.6. *Para* $\varphi^* \not\equiv \infty$ *definimos a função* $\varphi^{**} : X \to (-\infty,\infty]$ *por* $\varphi^{**}(x) = \sup\limits_{f\in X^*}\{f(x) - \varphi^*(f)\}$.

Teorema 2.2.7 (Fenchel-Moreau)**.** *Suponha que* φ *é convexa, semicontínua inferiormente e própria. Então* $\varphi^{**} = \varphi$*.*

Prova: *A prova será feita em duas etapas:*
1ª etapa: $\varphi \geq 0$

Da definição de φ^* *temos*

$$f(x) - \varphi(x) \leq \varphi^*(f), \ \forall x \in X \text{ e } f \in X^*.$$

Disto e da definição de φ^{**} *segue facilmente que* $\varphi^{**} \leq \varphi$*.*

Para provar que $\varphi^{**} = \varphi$ *argumentamos por redução ao absurdo suponho que existe* $x_0 \in X$ *tal que*

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0).$$

Possivelmente $\varphi(x_0) = +\infty$ *mas sempre* $\varphi^{**}(x_0) < +\infty$*. Aplicamos a Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach em* $X \times \mathbb{R}$ *com* $A = \mathrm{epi}(\varphi)$ *e* $B = (x_0, \varphi^{**}(x_0))$*. Então existe* $f \in X^*$*,* $K \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$f(x) + K\lambda > \alpha, \ \forall (x,\lambda) \in \mathrm{epi}(\varphi) \tag{2.3}$$

$$f(x_0) + K\varphi^{**}(x_0) < \alpha. \tag{2.4}$$

Tomando $x \in D(\varphi)$ e fazendo $\lambda \to \infty$ resulta de (2.3) que $K \geq 0$ (note que não temos $\varphi(x_0) < \infty$ e não podemos concluir, como antes, que $K > 0$). Seja $\epsilon > 0$, como $\varphi \geq 0$, temos de (2.3) que

$$f(x) + (K+\epsilon)\varphi(x) > \alpha, \quad \forall x \in D(\varphi).$$

Disto segue que

$$\varphi^*\left(\frac{-f}{K+\epsilon}\right) \leq \frac{-\alpha}{K+\epsilon}$$

e pela definição de $\varphi^{**}(x_0)$ segue que

$$\varphi^{**}(x_0) \geq \frac{-f}{K+\epsilon}(x_0) - \varphi^*\left(\frac{-f}{K+\epsilon}\right) \geq \frac{-f}{K+\epsilon}(x_0) + \frac{\alpha}{K+\epsilon}$$

Logo

$$f(x_0) + (K+\epsilon)\varphi^{**}(x_0) \geq \alpha, \quad \forall \epsilon > 0$$

o que contradiz (2.4).

2ª etapa: *Caso geral*

Seja $f_0 \in D(\varphi^*)$, ($D(\varphi^*) \neq \emptyset$ da Proposição 2.2.5). Para recairmos no caso anterior introduzimos a função

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)$$

de forma que $\bar{\varphi}$ é convexa própria semicontínua inferiormente e $\bar{\varphi} \geq 0$. Da primeira parte $\bar{\varphi}^{**} = \bar{\varphi}$. A seguir calculamos $\bar{\varphi}^*$ e $\bar{\varphi}^{**}$. Segue facilmente da definição de $\bar{\varphi}^*$ que

$$\bar{\varphi}^*(f) = \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0)$$

e da definição de $\bar{\varphi}^{**}$ que

$$\bar{\varphi}^{**}(x) = \varphi^{**}(x) - f_0(x) + \varphi^*(f_0)$$

logo

$$\varphi^{**}(x) = \varphi(x).$$

$\square$

Segunda Aula (100 minutos) ↑

Exemplo 2.2.1. *Seja X um espaço vetorial normado real e $\varphi(x) = \|x\|$. Vamos calcular φ^* e φ^{**}.*

É claro que φ is convex and continuous. Note que $f(x) - \|x\| \leq 0\ \forall f \in X^*$ com $\|f\| \leq 1$. Disto segue que $\sup_{x\in X}\{f(x) - \|x\|\} \leq 0$. A igualdade segue tomando $x = 0$. Por outro lado, para $\|f\| > 1$ temos que

$$\sup_{x\in X}\{f(x) - \|x\|\} \geq \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=n}} n\{f(\frac{x}{\|x\|}) - 1\} = n(\|f\| - 1).$$

Disto segue que $\sup_{x\in X}\{f(x) - \|x\|\} = +\infty$ para todo $f \in X^*$ com $\|f\| > 1$. Logo,

$$\varphi^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{for } \|f\| \leq 1 \\ \infty & \text{for } \|f\| > 1. \end{cases}$$

Logo

$$\varphi^{**}(x) = \sup_{f\in X^*}\{f(x) - \varphi^*(f)\} = \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\leq 1}} f(x) = \|x\| = \varphi(x)$$

Lema 2.2.8. *Seja $C \subset X$ um convexo; então C^{o} é convexo. Se $C^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$ então $C^- = C^{\mathrm{o}-}$.*

Prova: *Se $x, y \in C^{\mathrm{o}}$, então $B_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(y) \subset C$ para algum $\varepsilon > 0$. Isto implica que $B_\varepsilon(tx + (1-t)y) \subset C$ e consequentemente $tx + (1-t)y \in C^{\mathrm{o}}$.*
Se $C^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$, fixe $x_0 \in C^{\mathrm{o}}$ e $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset C^{\mathrm{o}}$. Se $x \in C^-$ existe uma seqüência $\{x_n\}$ em C com $x_n \to x$. Segue que $tx + (1-t)x_n \in C$, para todo $x \in B_\varepsilon(x_0)$ e portanto $B_{t\varepsilon}(tx_0 + (1-t)x_n) \subset C$ tomando $t = \dfrac{1}{n}$ e temos que $y_n = \frac{1}{n}x_0 + (1 - \frac{1}{n})x_n \in C^{\mathrm{o}}$ e $y_n \to x$. Isto mostra que $C^- \subset C^{\mathrm{o}-}$. A outra inclusão é óbvia. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sejam X um espaço vetorial normado real, φ e ψ funções convexas em X. Suponha que existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) < \infty$, $\psi(x_0) < \infty$ e φ é contínua em x_0. Então*

$$\inf_{x\in X}\{\varphi(x) + \psi(x)\} = \sup_{f\in X^*}\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\} = \max_{f\in X^*}\{-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\}$$

Prova: Fazemos

$$\text{a} = \inf_{x\in X}\{\varphi(x)+\psi(x)\}$$

$$\begin{aligned}
\text{b} &= \sup_{f\in X^*}\{-\varphi^*(-f)-\psi^*(f)\}\\
&= \sup_{f\in X^*}\left\{-\sup_{x\in X}\{-f(x)-\varphi(x)\}-\sup_{x\in X}\{f(x)-\psi(x)\}\right\}\\
&= \sup_{f\in X^*}\left\{\inf_{x\in X}\{\varphi(x)+f(x)\}+\inf_{x\in X}\{\psi(x)-f(x)\}\right\}\\
&\leq \sup_{f\in X^*}\left\{\inf_{x\in X}\{\varphi(x)+\psi(x)\}\right\} = \inf_{x\in X}\{\varphi(x)+\psi(x)\} = a.
\end{aligned}$$

Por outro lado ou $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$. Se $a=-\infty$ segue da desigualdade acima que $b=-\infty$ e temos a igualdade. Se $a\in\mathbb{R}$ seja $C=\text{epi }\varphi$. Claramente $C^{\text{o}}\neq\emptyset$ (como φ é contínua em x_0, dado $\lambda>\phi(x_0)$ existe $\epsilon>0$ tal que $\varphi(B_\epsilon(x_0))\subset(-\infty,\lambda-\epsilon)$ e isto garante que $B_\epsilon(x_0)\times(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)\subset\text{epi}(\varphi)$).

Sejam $A=C^{\text{o}}$ e $B=\{(x,\lambda)\in X\times\mathbb{R}:\lambda\leq a-\psi(x)\}$. Segue do fato que φ e ψ são convexas e do Lema 2.2.8 que A e B são convexos. Já vimos que $A\neq\emptyset$ e, do fato que $\psi(x_0)<\infty$, segue que $B\neq\emptyset$. Para ver que $A\cap B=\emptyset$ note que, se $(x,\lambda)\in A$, então

$$\lambda>\varphi(x)\geq a-\psi(x).$$

De onde obtemos que $(x,\lambda)\notin B$.

Segue, da primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, que existe um hiperplano fechado H que separa A e B no sentido fraco. Logo H separa $\bar{A}$ e B no sentido fraco. Mas $\bar{A}=C^{\text{o}-}=C^-$ pelo lema anterior. Portanto existem $f\in X^*$, $K\in\mathbb{R}$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ tais que $[\Phi=\alpha]$. Separa B e C no sentido fraco em $X\times\mathbb{R}$ onde

$$\Phi(x,\lambda)=f(x)+K\lambda.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\text{i) } f(x)+K\lambda\geq\alpha \;\; \forall \;\; (x,\lambda)\in C\\
&\text{ii) } f(x)+K\lambda\leq\alpha \;\; \forall \;\; (x,\lambda)\in B.
\end{aligned}$$

Fazendo $x=x_0$ e $\lambda\to\infty$ em i) temos que $K\geq 0$. Provemos que $K>0$. Primeiro note que $\Phi\neq 0$ o que se escreve como $\|f\|+|K|>0$. Suponha, por absurdo, que $K = 0$. De i) e ii) temos que $f(x) \geq \alpha$, $\forall x \in D(\varphi)$ e $f(x) \leq \alpha$ $\forall x \in D(\psi)$.

Agora $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset D(\varphi)$ para algum $\varepsilon_0 > 0$ e então

$$f(x_0 + \varepsilon_0 z) \geq \alpha \quad \forall \;\; z \in B_1(0)$$

e $f(x_0) \geq \alpha + \varepsilon_0 \|f\|$. Além disso temos $f(x_0) \leq \alpha$, visto que $x_0 \in D(\psi)$.

Assim, concluímos que $f = 0$, consequentemente $\Phi = 0$ e isto é um absurdo. Logo $K > 0$.

Segue de i) que, para todo $(x, \lambda) \in \text{epi}(\varphi)$,

$$\frac{-f}{K}(x) - \lambda \leq \frac{-\alpha}{K}.$$

Para $x \in D(\varphi)$, fazendo $\lambda = \varphi(x)$, temos que $(x, \varphi(x)) \in \text{epi}(\varphi)$ e

$$\frac{-f}{K}(x) - \varphi(x) \leq \frac{-\alpha}{K}, \; \forall x \in D(\varphi).$$

Da definição de φ^* temos que

$$\varphi^* \left(\frac{-f}{K} \right) \leq \frac{-\alpha}{K}.$$

Para $x \in D(\psi)$ e $\lambda = -\psi(x) + a$, segue de ii)

$$\frac{f}{K}(x) - \psi(x) \leq \frac{\alpha}{K} - a.$$

e da definição de ψ^* que

$$\psi^* \left(\frac{f}{K} \right) \leq \frac{\alpha}{K} - a$$

Disto obtemos que

$$b \geq -\varphi^* \left(\frac{-f}{K} \right) - \psi^* \left(\frac{f}{K} \right) \geq a$$

e segue que $b = a = -\varphi^* \left(\frac{-f}{K} \right) - \psi^* \left(\frac{f}{K} \right)$. Em particular o supremo em b é atingido em $\frac{f}{K}$ e o teorema está provado. $\square$

Exemplo 2.2.2. *Seja X um espaço vetorial normado real e $K \subset X$ um conjunto convexo, fechado e não vazio e*

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; x \in K, \\ +\infty & se \;\; x \notin K. \end{cases}$$

I_K é chamada função indicatriz. Observe-se que I_K é convexa, semicontínua inferiormente e própria.
Demonstraremos que para todo $x_0 \in X_0$ tem-se

$$dist\ (x_0, K) = \inf_{x \in K} \|x - x_0\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} \{f(x_0) - I_K^*(f)\}$$

Para verificar isto, note que

$$\inf_{x \in K} \|x - x_0\| = \inf_{x \in K} \{\varphi(x) + \psi(x)\}$$

com $\varphi(x) = \|x - x_0\|$ e $\psi(x) = I_K(x)$. Vamos aplicar o Teorema 2.2.9. Para tanto, basta mostrar que

$$-\varphi^*(-f) = \begin{cases} f(x_0) & se \;\; \|f\| \leq 1 \\ -\infty & se \;\; \|f\| > 1 \end{cases}$$

e isto segue da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varphi^*(f) &= \sup_{x \in X} \{f(x) - \|x - x_0\|\} = f(x_0) + \sup_{x \in X} \{f(x - x_0) - \|x - x_0\|\} \\ &= f(x_0) + \sup_{z \in X} \{f(z) - \|z\|\} \\ &= \begin{cases} f(x_0) & se \;\; \|f\| \leq 1 \\ \infty & se \;\; \|f\| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Onde utilizamos o Example 2.2.1.

2.3 Complemento Topológico

Antes de enunciar o nosso próximo resultado vamos tecer algumas considerações a cerca do Teorema da Aplicação Aberta. Sejam V e W espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear contínua sobrejetora. Então T é uma aplicação aberta e isto significa que existe $c^{-1} > 0$ tal que

$T(\overline{B_1(0)}) \supset \overline{B_{c^{-1}}(0)}$. Consequentemente, para cada $w \in \overline{B_{c^{-1}}(0)}$ existe $v \in \overline{B_1(0)}$ tal que $Tv = w$. Se $y \in W$, seja $y' = \dfrac{y}{\|y\|} \cdot c^{-1}$ e portanto, existe $x' \in \overline{B_1(0)}$ tal que $Tx' = y' \Rightarrow$ se $x = x' \, \|y\| \, c$ temos que $Tx = y$ e $\|x\| \leq c\|y\|$.

Conclusão: Se V, W são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $T : V \to W$ é uma transformação linear contínua sobrejetora, então existe $c > 0$ tal que para cada $w \in W$ podemos encontrar $v \in V$ com $\|v\| \leq c\|w\|$ e $w = Tv$.

Teorema 2.3.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, Y e Z subespaços vetoriais fechados tais que $Y + Z$ é fechado. Então, existe $c \geq 0$ tal que*

$$\begin{cases} \textit{todo} \;\; x \in Y + Z \;\; \textit{admite uma decomposição da forma} \\ x = y + z \;\; \textit{com} \;\; y \in Y \;\; \textit{e} \;\; z \in Z\,, \;\; \|y\| \leq c\|x\| \;\; \textit{e} \;\; \|z\| \leq c\|x\| \end{cases}$$

Prova: A Prova do teorema segue das considerações que o precedem da seguinte forma: Seja $V = Y \times Z$ dotado da norma $\|(y,z)\| = \|y\| + \|z\|$ e $W = Y + Z$ com a norma herdada de X. Defina $T : V \to W$ por $T(y,z) = y + z$. Então T é linear, contínua e sobre. Logo, existe $c \geq 0$ tal que dado $w \in W$ podemos encontrar $v = (y,z) \in V$ tal que $w = y + z$ e

$$\|y\| + \|z\| = \|(y,z)\| \leq c\|w\|$$

de onde segue que $\|y\| \leq c\|w\|$ e $\|z\| \leq c\|w\|$, como queríamos. $\square$

Terceira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Quarta Aula (100 minutos) $\downarrow$

Corolário 2.3.2. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.1, existe $c \geq 0$ tal que*

$$dist(Y \cap Z) \leq c(dist(x,Y) + dist(x,Z)) \quad \forall \;\; x \in X$$

Prova: Se $x \in X$ e $\epsilon > 0$ existem $y \in Y$ e $z \in Z$ tais que

$$\|x - y\| \leq \text{dist}(x,Y) + \epsilon \;\text{ e }\; \|x - z\| \leq \text{dist}(x,Z) + \epsilon\,.$$

Se $x' = y - z \in Y + Z$ existe $c \geq 0$, $y' \in Y$ e $z' \in Z$ tais que $y - z = y' + z'$

$$\|y'\| \leq c\|y - z\| \;\text{ e }\; \|z'\| \leq c\|y - z\|$$

segue que

$$y - y' = z + z' \in Y \cap Z$$

e

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, Y \cap Z) &\leq \|x - (y - y')\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y'\| \leq \|x - y\| + c\|y - z\| \\ &\leq (1+c)\|x - y\| + c\|x - z\| \\ &\leq (1+c)[\text{dist}(x,Y) + \text{dist}(y,Z)] + (1+2c)\epsilon \end{aligned}$$

e fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ temos o resultado. $\square$

2.4 Relações de Ortogonalidade

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço vetorial de X e N um subespaço vetorial de X^*. Definimos

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \;\; \forall x \in M\}$$

e

$$N^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, \;\; \forall f \in N\}.$$

Diremos que $M^\perp$ (respectivamente $N^\perp$) é o ortogonal de M (respectivamente de N).

Proposição 2.4.1. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e M (respectivamente N) um subespaço vetorial de X (respectivamente X^*). Então, $M^\perp$ (respectivamente $N^\perp$) é um subespaço vetorial fechado de X^* (respectivamente de X).*

Prova: Note que

- Se $f \in (M^\perp)^-$ existe uma seqüência $\{f_n\}$ em $M^\perp$ com $f_n \to f$. Segue que $0 = f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in M$ e, consequentemente, $f \in M^\perp$.
- $\displaystyle\bigcap_{f\in N} f^{-1}(0) = N^\perp$ e segue que $N^\perp$ é fechado.

Isto conclui a demonstração. $\square$

Exemplo 2.4.1. *Seja X um espaço vetorial normado real e M um subespaço vetorial de X. Para $f \in X^*$ mostremos que*

$$d(f, M^\perp) = \inf_{g\in M^\perp} \|f - g\| = \sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|\le 1}} f(x).$$

Isto é dizer que a distância de f a $M^\perp$ é igual à norma da restrição de f à M.

Para mostrar este fato vamos utilizar o Teorema 2.2.9 com $\varphi(x) = I_{\overline{B_1(0)}}(x)$ $-f(x)$ e $\psi(x) = I_M(x)$. Primeiramente note que φ e ψ são funções convexas e se $x_0 = 0$ ambas são finitas em x_0 e φ é contínua em x_0. Comecemos calculando φ^*

$$\begin{aligned}\varphi^*(g) &= \sup_{x\in X}\Big\{g(x) - I_{\overline{B_1(0)}}(x) + f(x)\Big\}\\ &= \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \{g(x) + f(x)\} = \|f + g\|\end{aligned}$$

de onde segue que $-\varphi^*(-g) = -\|f - g\|$. Agora calculemos ψ^*

$$\begin{aligned}\psi^*(g) &= \sup_{x\in X}\{g(x) - I_M(x)\}\\ &= \sup_{x\in M} g(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; g \in M^\perp\\ \infty & se \;\; g \notin M^\perp.\end{cases}\end{aligned}$$

Disto segue que

$$\sup_{g\in X^*}\{-\varphi^*(-g) - \psi^*(g)\} = \sup_{g\in M^\perp}\{-\|f-g\|\} = -\inf_{g\in M^\perp}\|f-g\|$$

e

$$\inf_{x\in X}\{\varphi(x) + \psi(x)\} = \inf_{\substack{x\in M\\ \|x\|\le 1}} -f(x) = -\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|\le 1}} f(x).$$

O resultado agora segue imediatamente do Teorema 2.2.9.

Proposição 2.4.2. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$.*

1) *Se M é um subespaço vetorial de X então, $(M^\perp)^\perp = M^-$*

2) *Se N é um subespaço vetorial de X^* então, $(N^\perp)^\perp \supset N^-$*

Prova:

1) $(M^\perp)^\perp = \{x \in X : f(x) = 0 \ \ \forall \ \ f \in M^\perp\}$

   – Se $x \in M$ então, $f(x) = 0$ para todo $f \in M^\perp$. Segue que $x \in (M^\perp)^\perp$ o que mostra a inclusão $M \subset (M^\perp)^\perp$. Como $(M^\perp)^\perp$ é fechado $M^- \subset (M^\perp)^\perp$.

   – Se $x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus M^-$ então, do Corolário 2.1.9, existe $f \in X^*$ $f(x) = 0$ para todo $x \in M^-$ e $f(x_0) \neq 0$. Logo, $f \in M^\perp$ e, como $x_0 \in (M^\perp)^\perp$, $f(x_0) = 0$ o que é um absurdo. Logo $(M^\perp)^\perp \supset M^-$ e a igualdade segue. $\square$

2) $(N^\perp)^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \ \forall \ \ x \in N^\perp\}$

   – Se $f \in N$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in N^\perp$. Segue que $f \in (N^\perp)^\perp$ e que $N \subset (N^\perp)^\perp$. Do fato que $(N^\perp)^\perp$ é fechado, segue que $N^- \subset (N^\perp)^\perp$ $\square$

Lemma 2.4.3. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Se M_1, M_2 são subespaços vetoriais de X com $M_1 \subset M_2$ e N_1, N_2 são subespaços vetoriais de X^* com $N_1 \subset N_2$, então $M_2^\perp \subset M_1^\perp$ e $N_2^\perp \subset M_1^\perp$.*

Prova: Se $f \in M_2^\perp$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in M_2$. Como $M_1 \subset M_2$ segue que $f(x) = 0$ para todo $x \in M_1$ e portanto $f \in M_1^\perp$. O restante da prova é deixado como exercício. $\square$

Proposição 2.4.4. *Sejam Y e Z subespaços vetoriais fechados de um espaço vetorial normado X sobre $\mathbb{K}$, então*

$$\begin{array}{ll} 1) & Y \cap Z = (Y^\perp + Z^\perp)^\perp \\ 2) & Y^\perp \cap Z^\perp = (Y + Z)^\perp \end{array}$$

Prova: Comecemos mostrando 1).

Para $f \in Y^\perp + Z^\perp$ temos que $f = f_1 + f_2$ com $f_1 \in Y^\perp$ e $f_2 \in Z^\perp$. Segue que $f_1(y) = 0$ para todo $y \in Y$ e $f_2(z) = 0$ para todo $z \in Z$. Logo, se $x \in Y \cap Z$, temos que $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$ e $x \in (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$. Com isto temos que $Y \cap Z \subset (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$.

Segue do Lema 2.4.3 e Proposição 2.4.2 que

- $Y^\perp \subset Y^\perp + Z^\perp \Rightarrow Y^{\perp\perp} = Y \supset (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$
- $Z^\perp \subset Y^\perp + Z^\perp \Rightarrow Z^{\perp\perp} = Z \supset (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$

logo $Y \cap Z \supset (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$ e o resultado segue.

Agora mostraremos 2).

Seja $f \in Y^\perp \cap Z^\perp$. Se $x \in Y + Z$, x admite uma decomposição da forma $x = y + z$ com $y \in Y$ e $z \in Z$. Como $f \in Y^\perp \cap Z^\perp$ temos que $f(w) = 0$ $\forall w \in Y \cup Z$ logo, $f(x) = f(y) + f(z) = 0$. Com isto, mostramos que $f(x) = 0$ para todo $x \in Y + Z$; ou seja, $f \in (Y + Z)^\perp$. Desta forma $Y^\perp \cap Z^\perp \subset (Y + Z)^\perp$.

Como $Y + Z \supset Y$ e $Y + Z \supset Z$ temos, da Proposição 2.4.2 que $(Y + Z)^\perp \subset Y^\perp$ e $(Y + Z)^\perp \subset Z^\perp$. Consequentemente $(Y + Z)^\perp \subset Y^\perp \cap Z^\perp$. □

Segue facilmente da Proposição 2.4.2 e da Proposição 2.4.4 que

Corolário 2.4.5. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, Y, Z subespaços vetoriais fechados de X. Então,*

$$
\begin{aligned}
(Y \cap Z)^\perp &\supset \overline{Y^\perp + Z^\perp} \\
(Y^\perp \cap Z^\perp)^\perp &= \overline{Y + Z}
\end{aligned}
$$

Teorema 2.4.6. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ e Y, Z subespaços fechados de X. As seguintes propriedades são equivalentes:*

a) $Y + Z$ *é fechado em* X

b) $Y^\perp + Z^\perp$ *é fechado em* X^*

c) $Y + Z = (Y^\perp \cap Z^\perp)^\perp$

d) $Y^\perp + Z^\perp = (Y \cap Z)^\perp$

Prova: Note que **a**) $\Leftrightarrow$ **c**) do Corolário 2.4.5 e da Proposição 2.4.1. Ainda, **d**) $\Rightarrow$ **b**) segue da Proposição 2.4.1. Resta mostrar **a**) $\Rightarrow$ **d**) e **b**) $\Rightarrow$ **a**).

a) $\Rightarrow$ **d**) Segue, da Proposição 2.4.4, que $Y \cap Z = (Y^\perp + Z^\perp)^\perp$. Disto e da Proposição 2.4.2 segue que $\overline{Y^\perp + Z^\perp} \subset (Y \cap Z)^\perp$. Basta mostrar que $(Y \cap Z)^\perp \subset Y^\perp + Z^\perp$. Seja $f \in (Y \cap Z)^\perp$ e defina $\varphi : Y + Z \to \mathbb{R}$ da seguinte forma; dado $x \in Y + Z$, $x = y + z$ com $y \in Y$ e $z \in Z$ pomos

$$\varphi(x) = f(y)$$

observe que se $x = y' + z' = y + z$, então como $y' - y = z - z' \in Y \cap Z$, $f(y' - y) = 0$ e $f(y') = f(y)$.

Utilizando o Teorema 2.3.1, podemos escolher a decomposição de forma que $\|y\| \leq c\|x\|$, para algum $c \geq 0$ independente de x. Assim

$$|\varphi(x)| \leq c\|f\|\|x\|, \quad \forall x \in Y + Z.$$

Utilizando o Teorema 1.3.9 (com $p(x) = c\|f\|\|x\|$ e $M = Y + Z$) estendemos φ a $\tilde{\varphi} \in X^*$ de forma que $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|f\|$ e escrevemos

$$f = (f - \widetilde{\varphi}) + \widetilde{\varphi} \quad \text{com} \quad f - \widetilde{\varphi} \in Y^\perp \quad \text{e} \quad \widetilde{\varphi} \in Z^\perp.$$

Isto implica que $f \in Z^\perp + Y^\perp$.

b) $\Rightarrow$ **a**) Sabemos (Corolário 2.3.2) que existe c tal que

$$\operatorname{dist}(f, Y^\perp \cap Z^\perp) \leq c[\operatorname{dist}(f, Y^\perp) + \operatorname{dist}(f, Z^\perp)], \ \ \forall \ \ f \in X^* \tag{2.5}$$

Por outro lado, do Exemplo 2.4.1, tem-se

$$d(f, Y^\perp) = \sup_{\substack{x \in Y \\ \|x\| \leq 1}} f(x), \ \forall f \in X^*, \qquad \operatorname{dist}(f, Z^\perp) = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\| \leq 1}} f(x), \ \forall f \in X^* \tag{2.6}$$

e da Proposição 2.4.4, parte 2),

$$\operatorname{dist}(f, Y^\perp \cap Z^\perp) = \operatorname{dist}(f, (Y + Z)^\perp) = \sup_{\substack{x \in \overline{Y + Z} \\ \|x\| \leq 1}} f(x), \ \forall f \in X^*. \tag{2.7}$$

Logo, de (2.5), (2.6) e (2.7),

$$\sup_{\substack{x\in\overline{Y+Z}\\ \|x\|\le 1}} f(x) \le c\,[\sup_{\substack{x\in Y\\ \|x\|\le 1}} f(x) + \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|\le 1}} f(x)\,] \quad \forall\ f\in X^*. \tag{2.8}$$

Vamos mostrar que isso implica

$$\overline{B_1^Y(0)+B_1^Z(0)} \supset \frac{1}{c} B_1^{\overline{Y+Z}}(0). \tag{2.9}$$

Faremos a prova por redução ao absurdo. Suponha que existe $x_0 \in \overline{Y+Z}$ com $\|x_0\| < \dfrac{1}{c}$ e $x_0 \notin \overline{B_1^Y(0)+B_1^Z(0)}$.
Neste caso, podemos separar estritamente $\{x_0\}$ e $\overline{B_1^Y(0)+B_1^Z(0)}$ com um hiperplano fechado em X; isto é, existe $f\in X^*$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < \alpha < f(x_0),\ \forall x\in \overline{B_1^Y(0)+B_1^Z(0)}.$$

Consequentemente

$$\sup_{\substack{x\in Y\\ \|x\|\le 1}} f(x) + \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|\le 1}} f(x) \le \alpha < f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)\|x_0\| < \frac{1}{c} f\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right),$$

o que está em contradição com (2.8). Com isto a inclusão (2.9) está demonstrada.

Por fim, considere o espaço $V = Y\times Z$ dotado da norma

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\}$$

e o espaço $W=\overline{Y+Z}$ com a norma herdada de X. A aplicação $T:V\to W$ definida por $T(x,y)=x+y$ é linear contínua e por (2.9)

$$\overline{T(B_1^V(0))} = \overline{B_1^Y(0)+B_1^Z(0)} \supset B^W_{\frac{1}{c}}(0)$$

e portanto, do Lemma 1.3.15,

$$T(B_1^V(0)) = B_1^Y(0)+B_1^Z(0) \supset B^W_{\frac{1}{2c}}(0)$$

e T é sobre; isto é,

$$T(V) = Y+Z = \overline{Y+Z} = W.$$

$\square$

Quarta Aula (100 minutos) $\uparrow$

Quinta Aula (100 minutos) ↓

2.5 Transformações Lineares

Nesta seção vamos estudar alguns fatos elementares sobre os transformações lineares não limitadas. É claro, do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.17), que se X, Y são espaços de Banach e $A : X \to Y$ é uma transformação linear fechada então, A é limitada.

Em geral, estaremos apenas interessados em estudar transformações lineares fechadas definidas entre espaços de Banach X, Y. Assim, as únicas transformações lineares fechadas $A : D(A) \subset X \to Y$, que não são limitados estão definidos em um subespaço vetorial $D(A) \subsetneq X$. Se $D(A)$ é denso em X diremos que A é densamente definida.

Diremos que uma transformação linear $A : D(A) \subset X \to Y$ é limitada se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|Au\| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in D(A).$$

Se A é limitada e densamente definida, podemos estendê-la a uma transformação linear limitada definida em X e neste caso A não é fechada (a menos que $D(A) = X$).

Nesta seção, estaremos interessados principalmente em transformações lineares fechadas densamente definidas e ilimitadas $A : D(A) \subset X \to X$.

Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear. Então,

- $D(A)$ é o Domínio de A,
- $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y : u \in D(A)\} \subset X \times Y$ é o Gráfico de A,
- $\mathrm{Im}(A) = \{Ax \in Y : x \in D(A)\} \subset Y$ é a Imagem de A e
- $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ é o Núcleo de A.

Exemplo 2.5.1. *Seja $X = C([0,1], \mathbb{R})$ com a norma usual e defina $A : D(A) \subset X \to X$ por $D(A) = C^1([0,1], \mathbb{R})$ e $(Au)(s) = u'(s)$, $\forall x \in [0,1]$.*

Definição 2.5.1. *Diremos que uma transformação linear é fechada se $G(A)$ é fechado em $X \times Y$.*

É uma conseqüência imediata da definição que

Proposição 2.5.2. *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear. Então, A é fechado se, e somente se, para toda seqüência $\{(u_n, Au_n)\}$ em $D(A) \times Y$ que é convergente em $X \times Y$ para $(u, v) \in X \times Y$, temos que $u \in D(A)$ e $Au = v$.*

Diremos que uma transformação linear A é fechável se $\overline{G(A)}$ é gráfico de uma transformação linear. Neste caso $\overline{G(A)}$ define uma transformação linear $\bar{A} : D(\bar{A}) \subset X \to Y$ e $D(\bar{A}) \supset D(A)$, $Au = \bar{A}u \ \ \forall \ \ u \in D(A)$. É claro que $\bar{A}$ é fechada e que $\bar{A}$ é a menor extensão fechada de A.

Proposição 2.5.3. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ uma transformação linear. Então, A é fechável se, e somente se, para toda seqüência $\{(u_n, Au_n)\}$ em $D(A) \times Y$ que é convergente em $X \times Y$ para $(0, v) \in X \times Y$, temos que $v = 0$.*

Prova: A é fechável $\Leftrightarrow$ $\overline{G(A)}$ é gráfico de uma transformação linear. Denotamos por $\bar{A}$ a transformação linear tal que $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$.

Suponha que A é fechável com fecho $\bar{A}$. Se $\{u_n\}$ é uma seqüência em $D(A)$ que converge para zero e tal que $\{Au_n\}$ é convergente com limite v devemos ter que $0 = \bar{A}0 = v$.

Suponha agora que, para toda seqüência $\{(u_n, Au_n)\}$ em $D(A) \times Y$ que é convergente em $X \times Y$ para $(0, v)$, temos que $v = 0$. Se $(u, v), (u, \bar{v}) \in \overline{G(A)}$ existem seqüências $\{(u_n, Au_n)\}$ e $\{(\bar{u}_n, A\bar{u}_n)\}$ tais que $(u_n, Au_n) \to (u, v)$ e $(\bar{u}_n, A\bar{u}_n) \to (u, \bar{v})$ em $X \times Y$. Desta forma, $u_n - \bar{u}_n \in D(A)$ e

$$(u_n - \bar{u}_n, A(u_n - \bar{u}_n)) \to (0, v - \bar{v})$$

e isto implica que $v = \bar{v}$. Isto mostra que o operador definido por $\bar{A}u = v$ se $(u, v) \in \overline{G(A)}$ está bem definido e $G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$. Assim $\overline{G(A)}$ é gráfico de uma transformação linear e o resultado segue. $\square$

Nessas notas todas as aplicações de interesse são fecháveis com domínio denso.

Definição 2.5.4. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear densamente definida. Vamos definir uma transformação linear $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ da seguinte forma*

$$D(A^*) = \{y^* \in Y^* : y^* \circ A : D(A) \to \mathbb{K} \text{ é limitada}\}.$$

Claramente $D(A^*)$ é um subespaço vetorial de Y^*. Para cada $y^* \in D(A^*)$, se $g = y^* \circ A : D(A) \to \mathbb{R}$, existe $c \geq 0$ tal que $|g(u)| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in D(A)$. Seja x^* a única extensão de g a um funcional linear contínuo de X e defina $A^*y^* = x^*$. Daí

$$\langle A^*y^*, u\rangle = (A^*y^*)(u) = y^*(Au) = \langle y^*, Au\rangle, \quad \forall \ u \in D(A), \ y^* \in D(A^*).$$

É claro que A^* é linear e

$$A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$$

é chamado adjunto de A.

Obs: Pode ocorrer que $D(A^*)$ não é denso em Y^*, inclusive se A é fechado. Veremos mais tarde (Teorema 4.1.11) que, se Y é reflexivo, então $D(A^*)$ é denso sempre que A é fechado e densamente definido.

Proposição 2.5.5. *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear linear densamente definida ($\overline{D(A)} = X$). Então A^* é fechado; isto é, $G(A^*)$ é fechado em $Y^* \times X^*$.*

Prova: Seja $v_n \in D(A^*)$ tal que $v_n \to v$ em Y^* e $A^*v_n \to f$ em X^*. Precisamos provar que $v \in D(A^*)$ e $A^*v = f$. Para isto note que, para $u \in D(A)$,

$$\begin{array}{ccc} v_n(Au) & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & v(Au) \\ \shortparallel & & \\ A^*v_n(u) & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & f(u) \end{array}$$

Portanto, $f(u) = v(Au), \forall u \in D(A)$ e segue que $v \in D(A^*)$ e $A^*v = f$. $\square$

Os gráficos de A e A^* estão ligados por uma relação de ortogonalidade simples.

Proposição 2.5.6. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear densamente definida. Se $\mathcal{J} : Y^* \times X^* \to X^* \times Y^*$ é definida por*

$$\mathcal{J}(v, f) = (-f, v)$$

então,

$$\mathcal{J}(G(A^*)) = G(A)^{\perp}.$$

Prova: Note que $(v, f) \in G(A^*)$ se, e somente se, $f(u) = v(Au)$ para todo $u \in D(A)$ ou, dito de outra forma, $-f(u) + v(Au) = 0$ para todo $u \in D(A)$. Por sua vez, esta última identidade é equivalente à $(-f, v)(u, Au) = 0$ para todo $(u, Au) \in G(A)$; ou seja, $(-f, v) \in G(A)^{\perp}$. Isto é o mesmo que $\mathcal{J}(G(A^*)) = G(A)^{\perp}$. □

Seja $V = X \times Y$ e $V^* = X^* \times Y^*$ e considere os subespaços $G = G(A)$ e $W = X \times \{0\}$ de V. Pode-se descrever $N(A)$, $N(A^*)$, $\mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^*)$ em termos de G, W e seus ortogonais.

a) $G \cap W = \{(u, Au) : u \in D(A), Au = 0\} = N(A) \times \{0\}$.

b) $$\begin{aligned} G + W &= \{(u, Au) + (\widetilde{u}, 0) : u \in D(A), \widetilde{u} \in X\} \\ &= \{(u + \widetilde{u}, Au) : u \in D(A),\ \widetilde{u} \in X\} \\ &= \{(v, Au) : v \in X, u \in D(A)\} \\ &= X \times \mathrm{Im}(A) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} G^{\perp} \cap W^{\perp} &= \{(-f, v) : v \in D(A^*), A^*v = f\} \cap 0 \times Y^* \\ &= \{(0, v) : v \in D(A^*), A^*v = 0\} \\ &= \{0\} \times N(A^*) \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} G^{\perp} + W^{\perp} &= \{(-f, v) : v \in D(A^*), A^*v = f\} \ + \ 0 \times Y^* \\ &= \{(-A^*v, v) : v \in D(A^*)\} \ + \ 0 \times Y^* \\ &= \{(-A^*v, v + w) : v \in D(A^*), w \in Y^*\} \\ &= \mathrm{Im}(A^*) \times Y^* \end{aligned}$$

Corolário 2.5.7. *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$, fechado e densamente definido. Então*

i) $N(A) = \mathrm{Im}(A^*)^{\perp}$

ii) $N(A^*) = \mathrm{Im}(A)^{\perp}$

iii) $N(A)^{\perp} \supset \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$

iv) $N(A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)}$

Prova:

i) Tomando o ortogonal em d), utilizando a parte 1) da Proposição 2.4.4 e a), temos que

$$\mathrm{Im}(A^*)^{\perp} \times \{0\} = (G^{\perp} + W^{\perp})^{\perp} = G \cap W = N(A) \times \{0\}.$$

Disto segue que $\mathrm{Im}(A^*)^{\perp} = N(A)$

ii) Tomando o ortogonal em b), utilizando a parte 2) da Proposição 2.4.4 e c), temos que

$$\{0\} \times \mathrm{Im}(A)^{\perp} = (G + W)^{\perp} = G^{\perp} \cap W^{\perp} = \{0\} \times N(A^*)$$

Segue que $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = N(A^*)$.

iii) e *iv*) Basta tomar o ortogonal em *i*) e *ii*) respectivamente. $\square$

Obs: Pode ocorrer (mesmo se $A \in L(X, Y)$) que $N(A)^{\perp} \neq \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$. Contudo pode se mostrar que $N(A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A^*)^{-\sigma(X^*,X)}$ e em particular se X é reflexivo $N(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$.

Quinta Aula (100 minutos) $\uparrow$

2.6 Caracterização de Transformações Lineares com Imagem Fechada

Teorema 2.6.1. *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear fechada e densamente definida. Então, são equivalentes:*

i) $\mathrm{Im}(A)$ *é fechada*

ii) $\mathrm{Im}(A^*)$ *é fechada*

iii) $\mathrm{Im}(A) = N(A^*)^{\perp}$

iv) $\mathrm{Im}(A^*) = N(A)^{\perp}$

Prova:

i) $\Leftrightarrow G + W = X \times \mathrm{Im}(A)$ é fechado em $X \times Y = V$.

ii) $\Leftrightarrow G^{\perp} + W^{\perp} = \mathrm{Im}(A^*) \times Y^*$ é fechado em $X^* \times Y^* = V^*$.

iii) $\Leftrightarrow G + W = (G^{\perp} \cap W^{\perp})^{\perp}$, pois $G + W = X \times \mathrm{Im}(A)$ e $(G^{\perp} \cap W^{\perp})^{\perp} = X \times N(A^*)^{\perp}$.

iv) $\Leftrightarrow (G \cap W)^{\perp} = G^{\perp} + W^{\perp}$, pois $(G \cap W)^{\perp} = N(A)^{\perp} \times Y^*$ e $G^{\perp} + W^{\perp} = \mathrm{Im}(A^*) \times Y^*$

O resultado agora segue do Teorema 2.4.6. □

Teorema 2.6.2. *Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é uma transformação linear fechada e densamente definida, são equivalentes:*

a) $\mathrm{Im}(A) = Y$.

b) *Existe $c \geq 0$ tal que $\|v\| \leq c\|A^*v\|$, para todo $v \in D(A^*)$.*

c) $N(A^*) = \{0\}$ *e* $\overline{\mathrm{Im}(A^*)} = \mathrm{Im}(A^*)$.

Obs: Na prática, para mostrar que uma transformação linear é sobrejetora utilizamos **b**) $\Rightarrow$ **a**) da seguinte forma. Consideramos a equação $A^*v = f$ com $f \in X^*$ e provamos que $\|v\| \leq c\|f\|$ com c independente de f. Esta técnica se chama método das estimativas a priori. Não interessa saber se $A^*v = f$ possui ou não solução; damos a priori uma solução e procuramos estimar sua norma.

Prova: $\boxed{\textbf{a}) \Leftrightarrow \textbf{c})}$ Vamos utilizar que $N(A^*) = \mathrm{Im}(A)^\perp$ (Corolário 2.5.7) e que $\mathrm{Im}(A^*)$ é fechada se, e somente se $\mathrm{Im}(A)$ é fechada (Teorema 2.6.1). Para ver que **a**) $\Rightarrow$ **c**), note que $\mathrm{Im}(A) = Y \Rightarrow \mathrm{Im}(A)^\perp = N(A^*) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(A) = Y = \overline{\mathrm{Im}(A)} \Rightarrow \mathrm{Im}(A^*) = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$. Para ver que **c**) $\Rightarrow$ **a**), note que

$$N(A^*)^\perp = \mathrm{Im}(A)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)}$$

e como $N(A^*) = \{0\}$ segue que $N(A^*)^\perp = Y$. Como $\mathrm{Im}(A^*)$ é fechada segue que $\mathrm{Im}(A)$ é fechada e que $\mathrm{Im}(A) = Y$.

$\boxed{\textbf{b}) \Rightarrow \textbf{c})}$ Se $v \in N(A^*)$ então $v \in D(A^*)$ e existe $c \geq 0$ tal que $\|v\| \leq c\|A^*v\|$. Isto implica que $\|v\| = 0$; ou seja, $v = 0$. Disto concluímos que $N(A^*) = \{0\}$. Mostremos agora que $\mathrm{Im}(A^*)$ é fechada. Seja $v \in \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$ e $\{v_n\}$ uma seqüência em $\mathrm{Im}(A^*)$ que converge para v. Então $v_n = A^*u_n$ para algum u_n. Segue de **b**) que $\{u_n\}$ é convergente para algum $u \in Y^*$. Do fato que A^* é fechado obtemos que $u \in D(A^*)$ e que $A^*u = v$. Logo $v \in \mathrm{Im}(A^*)$ e portanto $\mathrm{Im}(A^*) = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}$.

$\boxed{\textbf{c}) \Rightarrow \textbf{b})}$ Vimos que, se $G = G(A)$ e $W = X \times \{0\}$,

$$\{0\} \times N(A^*) = G^\perp \cap W^\perp \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(A^*) \times Y^* = G^\perp + W^\perp.$$

Como $N(A^*) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(A^*)$ é fechado, temos que

$$G^\perp \cap W^\perp = \{0\} \quad \text{e} \quad G^\perp + W^\perp = \mathrm{Im}(A^*) \times Y^* \ \text{ é fechado.}$$

Aplicando o Teorema 2.3.1, existe $c \geq 0$ tal que $z \in G^\perp + W^\perp$ se decompõe (de forma única pois $G^\perp \cap W^\perp = \{0\}$) em $z = a + b$ com $a \in G^\perp$ e $b \in W^\perp$, $\|a\| \leq c\|z\|$ e $\|b\| \leq c\|z\|$. Seja $v \in D(A^*)$, então $z = (A^*v, 0)$ se escreve, de forma única, como $z = a + b$ com

$$a = (A^*v, -v) \in G^\perp \quad \text{e} \quad b = (0, v) \in W^\perp.$$

Assim obtemos $\|b\| = \|v\| \leq c\|z\| = c\|A^*v\|$. $\square$

Simetricamente, temos o seguinte resultado

Teorema 2.6.3. *Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é uma transformação linear fechada e densamente definida, são equivalentes:*

a) *A^* é sobrejetor.*

b) *Existe $c \geq 0$ tal que $\|u\| \leq c\|Au\|$ para todo $u \in D(A)$.*

c) *$N(A) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(A)$ é fechada.*

Corolário 2.6.4. *Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear fechada e densamente definida. Segue que:*

- *Se A sobrejetora então, A^* é injetora e*
- *Se A^* sobretora então, A é injetora.*

A recíproca não é verdadeira como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6.1. *Seja $A : \ell_2 \to \ell_2$ a transformação linear definida por*

$$A\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n} x_n\right\}.$$

Então $A = A^*$, $N(A) = \{0\}$, $N(A^*) = \{0\}$, $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \in \ell_2$ e $A\{x_n\} = \{y_n\}$ não tem solução em ℓ_2 e portanto, A não é sobrejetora.

Teorema 2.6.5. *Se $A : D(A) \subset X \to Y$ é fechado e densamente definido. São equivalentes:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & D(A) = X \\ \text{b)} & A \text{ é limitado} \\ \text{c)} & D(A^*) = Y^* \\ \text{d)} & A^* \text{ é limitado} \end{array}\right\} \Rightarrow \|A\|_{L(X,Y)} = \|A^*\|_{L(Y^*,X^*)}.$$

Prova: As implicações **a**) $\Rightarrow$ **b**) e **c**) $\Rightarrow$ **d**) seguem imediatamente do Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.3.17).

Para mostrar que **b**) $\Rightarrow$ **c**), basta lembrar que se A é limitado e $f \in Y^*$ então $f \circ A$ é limitado e portanto $f \in D(A^*)$.

Resta apenas mostrar que **d**) $\Rightarrow$ **a**). Em primeiro lugar, mostremos que $D(A^*)$ é fechado. Seja $v \in \overline{D(A^*)}$ e $\{v_n\}$ uma seqüência em $D(A^*)$ que converge para v. Segue do fato que A^* é limitado que

$$\|A^*(v_n - v_m)\| \ \leq \ c\|v_n - v_m\| \stackrel{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e $\{A^*v_n\}$ é uma seqüência de Cauchy (portanto convergente). Seja $f = \lim_{n\to\infty} A^*v_n$.

Portanto,

$$f(u) \stackrel{n\to\infty}{\longleftarrow} (A^*v_n)(u) = v_n(Au) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v(Au), \quad \forall u \in D(A).$$

Segue que $v \in D(A^*)$ e $A^*v = f$. Isto mostra que $D(A^*)$ é fechado.

Em $X \times Y = V$ considere os subespaços $G = G(A)$ e $Z = \{0\} \times Y$ de forma que

$$G + Z = D(A) \times Y.$$

Assim,

$$G^\perp = \{(-f, v) : (v, f) \in G(A^*)\} \ \text{ e } \ Z^\perp = X^* \times \{0\}.$$

Consequentemente

$$G^\perp + Z^\perp = X^* \times D(A^*).$$

Segue que $G^\perp + Z^\perp$ é fechado em V^*. Segue do Teorema 2.4.6 que $G + Z$ é fechado em $X \times Y$ e portanto $D(A)$ é fechado e isto equivale a dizer (da densidade de $D(A)$) que $D(A) = X$.

Provemos que $\|A^*\|_{L(Y^*,X^*)} = \|A\|_{L(X,Y)}$. Temos que

$$\langle A^*v, , u\rangle = \langle v, Au\rangle \ \ \forall \ \ u \in X \ \ \text{e} \ \ v \in Y^*$$

logo

$$\|A^*v\| = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} |\langle A^*v, u\rangle| = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 1}} |\langle v, Au\rangle| \leq \|A\| \cdot \|v\|$$

Portanto $\|A^*\| \leq \|A\|$.

$$\|Au\| = \sup_{\substack{v\in Y^*\\ \|v\|\leq 1}} |\langle v, Au\rangle| = \sup_{\substack{v\in Y^*\\ \|v\|\leq 1}} |\langle A^*v, u\rangle| \leq \|A^*\| \cdot \|u\|$$

$$\therefore \quad \|A\| \ \leq \ \|A^*\|$$

e a igualdade segue. $\square$

Sexta Aula (100 minutos) $\uparrow$

2.7 Exercícios

1. Descreva os hiperplanos em $X = \mathbb{R}^n$.

2. Mostre que $f \in X^*$ se, e só se, $\sup\{f(x) : x \in X, \|x\| = 1\} < \infty$ e neste caso $\|f\| = \sup\{f(x) : x \in X, \|x\| = 1\} = -\inf\{f(x) : x \in X, \|x\| = 1\}$.

3. Represente a separação de convexos por hiperplanos em $\mathbb{R}^n$ para $n = 1, 2, 3$.

4. Verifique que a hipótese $f \neq 0$ na definição de um hiperplano garante que todos os hiperplanos são subconjuntos não vazios de $X \neq \{0\}$. Mostre que todo hiperplano é convexo.

5. Diremos que $E \subset X$ é estrelado com centro em x_0 se $tx + (1-t)x_0 \in E$ para todo $x \in E$ e para todo $t \in [0, 1]$. Mostre que um resultado análogo ao Lemma 2.1.6 continua válido se pedimos que C seja estrelado com centro em $x = 0$ exceto que p não mais satisfaz a desigualdade triangular.

6. Complete a prova do Teorema 2.1.5 para que esta inclua o caso em que $0 \notin A - B$.

7. Sejam X um espaço vetorial normado, A, B subconjuntos de X. Suponha que A é aberto e mostre que $A + B$ é aberto.

8. Mostre que se $f \in X^*$ então
$$\|f\| = \sup\{f(z) : z \in X,\ \|z\| \leq 1\} = -\inf\{f(z) : z \in X,\ \|z\| \leq 1\}.$$

9. Generalize o teorema acima pedindo que $d(A, B) > 0$ em lugar de pedir que A é fechado e B é compacto.

10. Mostre que, para cada $x_0 \in X$ existe funcional linear contínuo $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \|x_0\|$ e $\|f\| = 1$.

11. Se φ_1 e φ_2 são semicontínuas inferiormente. então $\varphi_1 + \varphi_2$ é semicontínua inferiormente.

12. Se $(\varphi_i)_{i \in I}$ é uma família de funções semicontínuas inferiormente. Então $\varphi(x) = \sup\limits_{i \in I} \varphi_i(x)$ é semicontínua inferiormente.

13. Mostre que epi$(\sup_{i\in I}\varphi_i(x)) = \cap_{i\in I}epi(\varphi_i)$.

14. Encontre uma função não-convexa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $[\varphi \le \lambda]$ é convexo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

15. Prove que se φ_1 e φ_2 são convexas então $\varphi_1 + \varphi_2$ é convexa.

16. Se $(\varphi_i)_{i\in I}$ é uma família de funções convexas mostre que $\varphi(x) = \sup\limits_{i\in I}\varphi_i(x)$ é convexa.

17. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é uma função. Mostre que φ é semicontínua inferiormente se, e somente se, $\varphi^{-1}(-\infty, \lambda) \in \mathcal{T}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

18. Mostre que, em geral, $(\phi^*)^* \neq \phi^{**}$ e relacione estas funções.

19. Se Y e Z são subespaços fechados de um espaço de Banach X tais que

$$\text{dist}(x, Y \cap Z) \le c\ \text{dis}(x, Y)$$

então $Y + Z$ é fechado.

20. Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado. Mostre que $D(A)$ dotado da norma $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$, para todo $x \in D(A)$, é um espaço de Banach.

21. Seja A a transformação linear definida no Example 2.5.1. Mostre que A é fechado, densamente definido e não limitado.

22. Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear fechada. Mostre que $\overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$ se, e somente se, existe $c \ge 0$ tal que

$$\text{dist}\ (u, N(A)) \le c\|Au\|, \quad \forall u \in D(A).$$

23. Prove o Teorema 2.6.3.

Capítulo 3

Topologias Fraca e Fraca*

Sétima Aula (100 minutos) ↓

Muitas soluções de problemas matemáticos importantes são obtidas como mínimos, máximos ou pontos fixos de funções definidas em espaços de dimensão infinita. Desta forma a noção de compacidade desempenha um papel fundamental para a solução de inúmeras questões importantes em análise matemática.

Seja X um espaço vetorial normado com dimensão infinita. Veremos na Seção 3.1 que nenhum subconjunto de X com interior não vazio é compacto na topologia induzida pela norma. Isto faz com que os compactos de X não contenham qualquer bola e torna complicada a análise de inúmeros problemas matemáticos. Para resolver este problema, procuramos dotar X de topologias com menos abertos e, consequentemente, com mais compactos de forma a possibilitar a solução desses problemas. Estas topologias são a topologia fraca em X e fraca* em X^*.

3.1 Lema de Riesz

Nesta seção vamos demonstrar que a bola unitária de um espaço de vetorial normado é compacta se, e somente se, X tem dimensão finita. Começamos com o seguinte resultado

Lemma 3.1.1 (Lemma de Riesz)**.** *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\mathrm{dist}(u, M) \geq 1 - \epsilon$.*

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor que $0 < \epsilon < 1$. Seja $v \in X \backslash M$. Como M é fechado, $\text{dist}(v, M) > 0$. Escolha $m_0 \in M$ tal que $d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\epsilon}$. Seja $u = \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ e $m \in M$, então $m_0 + \|v - m_0\|m \in M$ e u satisfaz

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v - m_0 - m\|v - m_0\|}{\|v - m_0\|} \right\| \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \epsilon.$$

□

Teorema 3.1.2 (Riesz). *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então X tem dimensão finita.*

Prova: Suponha, por absurdo, que X tem dimensão infinita. Então existem subespaços M_n, $n \in \mathbb{N}$, de X tais que $\dim M_n = n$ e $M_n \subset M_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M_n é fechado, segue do Lema 3.1.1 que existe $u_n \in M_n$ com $\|u_n\| = 1$ e tal que $\text{dist}(u_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. É fácil ver que $\{u_n\}$ não tem subseqüência convergente o que contradiz a compacidade de $B_1(0)$. □

Segue facilmente do Teorema 3.1.2 que

Corolário 3.1.3. *Seja X um espaço vetorial normado de dimensão finita. Se $K \subset X$ é compacto, então $K^{\text{o}} = \emptyset$*

3.2 Topologia induzida por uma família de funções

Nesta seção recordamos algumas noções elementares de topologia geral que são indispensáveis para a apresentação das topologias fraca e fraca* em um espaço vetorial normado X e seu dual X^*.

Seja X é um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma família $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades

i) $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$,

ii) $\mathcal{T}$ é fechada por interseções finitas e

iii) $\mathcal{T}$ é fechada por uniões arbitrárias.

Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados abertos de X. O espaço X dotado de uma topologia $\mathcal{T}$ é chamado um espaço topológico e é denotado por $(X, \mathcal{T})$ ou simplesmente X quando estiver claro qual a topologia envolvida.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto de X é dito fechado se o seu complementar é aberto. É fácil ver que a família dos subconjuntos fechados de X é fechada por uniões finitas e por interseções quaisquer. O interior A^o de um subconjunto A de X é o maior aberto contido em A e o fecho A^- de A é o menor fechado que contém A. Uma família de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_\lambda \in 2^X : \lambda \in \Lambda\}$ é dita uma cobertura de $A \subset X$ se $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ (diremos que $\mathcal{C}$ cobre A) e qualquer subconjunto de $\mathcal{C}$ que ainda cobre A é chamado uma subcobertura e se todos os conjuntos C_λ são abertos diremos que $\mathcal{C}$ é uma cobertura aberta. Um subconjunto K de X é compacto se toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita.

Se X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ são topologias em X, diremos que $\mathcal{T}_2$ é mais fina que $\mathcal{T}_1$ se $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}_1$.

Estaremos interessados na topologia induzida por uma família de funções que passamos a descrever. Seja X um conjunto qualquer e $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$, uma família de funções.

Observação: Mais geralmente, poderíamos considerar funções ϕ_i tomando valores em espaços topológios $(X_i, \mathcal{T}_i)$ em lugar de $\mathbb{K}$. As provas apresentadas a seguir são para o caso em que $(X_i, \mathcal{T}_i)$ é $\mathbb{K}$ mas são essencialmente as mesmas no caso geral. A razão para consideramos a imagem das φ_i fixa e igual à $\mathbb{K}$ está no fato que é desta forma que estes resultados de topologia geral se aplicam à análise funcional que será desenvolvida a seguir.

Problema: Dotar X da topologia menos fina que torna todas as funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $\forall\, i \in I$, contínuas.

É claro que a topologia discreta 2^X torna $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$ é contínua $\forall\, i \in I$. Também é claro que esta topologia não é a mais econômica (com o menor número de abertos) na verdade ela é a menos econômica.

Se θ é um aberto de $\mathbb{K}$, então se cada φ_i, $i \in I$, é contínua, devemos ter que $\varphi_i^{-1}(\theta)$ é aberto. Desta forma a topologia menos fina que torna φ_i contínua,

$\forall i \in I$, deve ser a menor topologia que contém

$$\mathcal{E} := \{\varphi_i^{-1}(\theta) \in 2^X : \ i \in I \text{ e } \theta \text{ é um aberto de } K\}.$$

A menor topologia que contém $\mathcal{E}$ é chamada a *topologia induzida pela família de funções* $\{\varphi_i : i \in I\}$.

Em geral, se $\mathcal{E} \subset 2^X$ a topologia menos fina que contém $\mathcal{E}$ é chamada a *topologia gerada por* $\mathcal{E}$ e é denotada por $\mathcal{T}(\mathcal{E})$. Esta topologia é a interseção de todas as topologias que contém $\mathcal{E}$. Neste caso, nos referimos a $\mathcal{E}$ como uma sub-base para $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

No que se segue vamos caracterizar a topologia $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ em termos dos elementos de $\mathcal{E}$.

Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $x \in X$, uma *base de vizinhanças de* x é uma família $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{T}$ tal que, se $x \in U \in \mathcal{T}$ então, existe $U_x \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in U_x \subset U$. Uma *base* para $\mathcal{T}$ é uma família $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ tal que, $\mathcal{N}$ é uma base de vizinhanças para cada $x \in X$. A prova do seguinte resultado é elementar

Proposição 3.2.1. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, então $\mathcal{E}$ é uma base para $\mathcal{T}$ se, e somente se, todo $U \in \mathcal{T}$ é união de conjuntos em $\mathcal{E}$ ($\emptyset$ é união vazia de elementos de $\mathcal{E}$).*

Proposição 3.2.2. *Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, então $\mathcal{E}$ é uma base para uma topologia se e, somente se, as seguintes condições se verificam*

a) cada $x \in X$ pertence a algum $V \in \mathcal{E}$, e

b) se $U, V \in \mathcal{E}$ e $x \in U \cap V$ existe $W \in \mathcal{E}$ com $x \in W \subset U \cap V$.

Prova: É óbvio que se $\mathcal{E}$ é uma base então a) e b) estão satisfeitas. Se por outro lado a) e b) estão satisfeitas, tomamos $\mathcal{T}$ a família obtida tomando uniões quaisquer de elementos de $\mathcal{E}$ ($\emptyset$ é a união vazia de elementos de $\mathcal{E}$). Claramente $X \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é fechada por uniões quaisquer. Se $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ e $x \in U_1 \cap U_2$ então existem V_1, V_2 em $\mathcal{E}$ com $x \in V_1 \subset U_1$ e $x \in V_2 \subset U_2$. Segue de b) que existe $W \in \mathcal{E}$ com $x \in W \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$. Isto mostra que $U_1 \cap U_2$ é união de elementos de $\mathcal{E}$ e conclui a demonstração. $\square$

Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, a proxima proposição caracteriza os abertos de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ em termos dos elementos de $\mathcal{E}$.

Proposição 3.2.3. *Se $\mathcal{E} \subset 2^X$, $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ consiste de $\emptyset, X$ e das uniões quaisquer de interseções finitas de elementos de $\mathcal{E}$.*

Prova: É fácil ver que a família constituida pelas interseções finitas de elementos de $\mathcal{E}$ e X satisfaz as condições da Proposição 3.2.2. Segue da Proposição 3.2.1 que a família das uniões quaisquer de tais conjuntos é uma topologia que claramente está contida em $\mathcal{T}$ e portanto é igual a $\mathcal{T}$. $\square$

Proposição 3.2.4. *Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ a topologia em X induzida pela família de funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$. Se $\{x_n\}$ é uma seqüência em X, então $\{x_n\}$ converge para x (ou abreviadamente $x_n \to x$ se, e somente se, $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ $\forall\, i \in I$.*

Prova: Se $x_n \to x$, então $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, $\forall\, i \in I$, já que cada φ_i é contínua. Reciprocamente, suponha que $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$, $\forall i \in I$. Mostremos que $x_n \to x$. Seja U uma vizinhança de x. Seja $J \subset I$ finito e V_j, $j \in J$, abertos de $\mathbb{K}$ tais que $x \in \cap_J \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U$. Para cada $j \in J$, $\exists\, N_j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ para $n \geq N_i$. Se $N = \max\{N_j : j \in J\}$ segue que $x_n \in \varphi_j^{-1}(V_j)$, $\forall j \in J$ e portanto $x_n \in U$, $\forall n \geq N$ e portanto $x_n \to x$. $\square$

Proposição 3.2.5. *Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ a topologia em X induzida pela família de funções $\varphi_i : X \to \mathbb{K}$, $i \in I$. Se (Z, Σ) é um espaço topológico e $\psi : Z \to X$ é uma função então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ \psi$ é contínua de Z em $\mathbb{K}$, $\forall i \in I$.*

Prova: Se ψ é contínua, então $\varphi_i \circ \psi$ é também contínua, para cada $i \in I$, como composta de funções contínuas. Inversamente, se $\varphi_i \circ \psi$ é contínua, para cada $i \in I$, seja $U \in \mathcal{T}$ e mostremos que $\psi^{-1}(U) \in \Sigma$. Sabemos que

$$U = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(V_i), \quad V_i \text{ aberto em } \mathbb{K}.$$

Logo

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(V_i)) = \bigcup_{\text{qualquer}} \bigcap_{\text{finita}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i).$$

Como $\varphi_i \circ \psi$ é contínua, temos que $(\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i) \in \Sigma$ e portanto $\psi^{-1}(U) \in \Sigma$. Segue que $\psi : (Z, \Sigma) \to (X, \mathcal{T})$ é contínua. $\square$

Sétima Aula (100 minutos) $\uparrow$

Oitava Aula (100 minutos) ↓

3.3 Produto Carteziano e o Teorema de Tychonoff

Seja A um conjunto e uma família de conjuntos. O produto carteziano da família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é o conjunto

$$X := \{f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$

Denotaremos este conjunto por $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ou por X^A quando todos os conjuntos forem idênticos.

Exemplo 3.3.1.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *é o conjunto das funções reais com valores reais.*
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *é o conjunto das seqüências de números complexos.*

Um elemento de $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ é denotado por $w = (w_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Se cada X_α é dotado de uma topologia $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha \in A$, podemos colocar em X a topologia induzida pela família de aplicações $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ definida por

$$w \xmapsto{\varphi_\alpha} w_\alpha \quad \text{(as projeções sobre cada } X_\alpha\text{)}.$$

Esta topologia é denominada *topologia produto* e é denotada por $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$.

Em espaços de dimensão finita, compactos são abundantes e caracterizados de forma bastante simples. Infelizmente, este não é o caso em espaços de dimensão infinita. Qualquer resultado que caracterize esses compactos é extremamente útil já que compactos desempenham um papel fundamental em análise. Quase todos os resultados que caracterizam os compactos em espaços de dimensão infinita são obtidos dos Teoremas de Tychonoff e do Teorema de Arzelá-Ascoli. Em particular, a introdução das topologias fraca e fraca* com o objetivo de aumentar o número de compactos nos espaços vetoriais normados de dimensão infinita estudados se inspira no teorema de Tychonoff que demonstramos a seguir.

Teorema 3.3.1 (de Tychonoff). *Se X_α, $\alpha \in A$ são espaços topológicos compactos, então* $(X, \mathcal{T}) := \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha\right)$ *é compacto.*

Prova: Para mostrar que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico compacto, mostraremos que, se $\mathcal{F} \subset 2^X$ tem a propriedade da interseção finita, então $\bigcap\{\overline{F} : \overline{F} \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Seja Λ a família de todas as $\mathcal{F} \subset 2^X$ com a propriedade da interseção finita. Se Λ é ordenada pela inclusão então toda cadeia em Λ tem um limitante superior (a união). Pelo lema de Zorn toda $\mathcal{F} \subset 2^X$ com a propriedade da interseção finita está contida em uma coleção maximal com a propriedade da interseção finita. Logo, basta provar que, se $\mathcal{F} \in \Lambda$ é maximal então, $\bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Para cada $F \in \mathcal{F}$ e $\beta \in A$ seja F_β a projeção de F em X_β; isto é, $F_\beta = \{w_\beta : w = (w_\alpha)_{\alpha \in A} \in F\}$. Então a coleção $\mathcal{F}_\beta = \{F_\beta : F \in \mathcal{F}\}$ tem a propriedade da interseção finita. Como X_β é compacto existe $x_\beta \in \cap\{\overline{F}_\beta : F_\beta \in \mathcal{F}_\beta\}$. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$ tal que, $\forall \alpha \in A$, $x_\alpha \in \bigcap\{\overline{F}_\alpha : F_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha\}$. Resta apenas mostrar, $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \overline{F}$. Para isto, dado $\beta \in A$, seja G_β um aberto de X_β com $x_\beta \in G_\beta$. Então, se $G = \{(y_\alpha)_{\alpha \in A} : y_\beta \in G_\beta\}$, a união da família $\mathcal{F}$ com $\{G\}$ continua a ter a propriedade da interseção finita. Como $\mathcal{F}$ é maximal $G \in \mathcal{F}$. Além disso, toda interseção finita de tais G também pertence a $\mathcal{F}$. Mas estas interseções finitas formam uma base de vizinhanças de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ na topologia de X. Isto implica que qualquer $F \in \mathcal{F}$ encontra todo aberto de X que contém $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Logo,

$$(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \overline{F}, \ \forall F \in \mathcal{F}$$

e, consequentemente,

$$(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$

$\square$

3.4 Topologia Fraca e suas Propriedades

Seja X um espaço de Banach e $f \in X^*$. Designamos por $\varphi_f : X \to \mathbb{K}$ a aplicação $\varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x\rangle$ para f percorrendo X^*. Obtemos então uma família $(\varphi_f)_{f\in X^*}$ de aplicações de X em $\mathbb{K}$.

Definição 3.4.1. *A topologia fraca $\sigma(X,X^*)$ em X é a topologia menos fina em X que torna contínuas todas aplicações $(\varphi_f)_{f\in X^*}$.*

Proposição 3.4.2. *Seja X um espaço vetorial normado real. A topologia fraca $\sigma(X,X^*)$ é de Hausdorff.*

Prova: Se $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$, do Teorema 2.1.8 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach), existe $f \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2).$$

Seja $\theta_1 = f^{-1}((-\infty,\alpha))$ e $\theta_2 = f^{-1}((\alpha,\infty))$. Logo θ_1 e θ_2 são abertos disjuntos com $x_1 \in \theta_1$ e $x_2 \in \theta_2$. Ainda θ_1 e θ_2 estão em $\sigma(X,X^*)$. □

Proposição 3.4.3. *Seja X um espaço vetorial normado real e $x_0 \in X$. Obtemos uma base de vizinhanças de x_0 na topologia $\sigma(X,X^*)$ ao considerar os conjuntos da forma*

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon, \quad \forall i \in I\},$$

onde I é finito, $f_i \in X^*$ e $\epsilon > 0$.

Prova: Se $a_i = \langle f_i, x_0\rangle = f_i(x_0)$, então é claro que

$$V = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}((a_i - \epsilon, a_i + \epsilon)) \tag{3.1}$$

é um aberto da topologia $\sigma(X,X^*)$ e contém x_0.

Ainda, se U é uma vizinhança de x_0 em $\sigma(X,X^*)$ então existe $W \subset U$ tal que $x_0 \in W = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(w_i)$, I finito e w_i aberto em $\mathbb{R}$ contendo $a_i = \langle f_i, x_0\rangle$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\{s : |s - a_i| < \epsilon\} \subset w_i$, $i \in I$. Logo $x_0 \in V = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}((a_i - \epsilon, a_i + \epsilon)) \subset W \subset U$.

Logo, se $U \in \sigma(X,X^*)$ e $x_0 \in U$, existe V da forma (3.1) tal que $V \ni x_0$. □

Notação: $\{x_n\} \subset X$ é fracamente convergente para X se é convergente no sentido de $\sigma(X,X^*)$. Neste caso escrevemos $x_n \rightharpoonup x$.

Proposição 3.4.4. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $\{x_n\}$ uma seqüência em X. Temos que:*

i) $x_n \rightharpoonup x \;\Leftrightarrow\; f(x_n) \to f(x) \;\; \forall \;\; f \in X^*$

ii) Se $x_n \to x$ *então* $x_n \rightharpoonup x$

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *então* $\{\|x_n\|\}$ *é limitada e* $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *e se* $f_n \to f$ *em* X^* $(\|f_n - f\|_{X^*} \to 0)$*, então* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Prova:

$i)$ Segue da Proposição 3.2.4 e da definição de $\sigma(X, X^*)$.

$ii)$ Segue de i) pois $|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le \|f\|\;\|x - x_n\|$.

$iii)$ Basta mostrar que $\{\langle f, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada para cada $f \in X^*$ e aplicar o Princípio da Limitação Uniforme (Teorema 1.3.18). Com isto $\{\|x_n\|\}$ é limitada. Ainda, para cada $f \in X^*$,

$$|\langle f, x_n\rangle| \le \|f\|\;\|x_n\|,$$

logo

$$|\langle f, x\rangle| \le \|f\| \cdot \lim \|x_n\|$$

e

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\le 1} |\langle f, x\rangle| \le \lim \|x_n\|.$$

$iv)$ Basta ver que,

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\le |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\ &\le \|f_n - f\|\;\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle|, \end{aligned}$$

portanto $f_n(x_n) \to f(x)$. $\square$

Oitava Aula (100 minutos) $\uparrow$

Proposição 3.4.5. *Quando X é um espaço vetorial normado real de dimensão finita a topologia fraca $\sigma(X,X^*)$ e a topologia induzida pela norma coincidem. Em particular, uma seqüência $\{x_n\}$ converge fracamente se, e somente se, $\|x_n - x\| \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Prova: Se $\mathcal{T}$ denota a topologia induzida pela norma de X então,

$$\sigma(X,X^*) \subset \mathcal{T}$$

por construção. Resta apenas mostrar que se X tem dimensão finita, então $\mathcal{T} \subset \sigma(X,X^*)$. Seja $U \in \mathcal{T}$. Mostremos que todo ponto x_0 de U é interior a U na topologia fraca; isto é, existe $V \in \sigma(X,X^*)$ tal que $x_0 \ni V \subset U$. Isto mostrará que U é aberto em $\sigma(X,X^*)$. Pela Proposição 3.4.3, é suficiente mostrar que para algum conjunto finito I de índices e $(f_i)_{i\in I} \subset X^*$,

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon, \quad \forall i \in I\} \subset U.$$

Suponha que $B_r(x_0) \subset U$. Escolhendo uma base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ para X com $\|e_n\| = 1$, $\forall i \in I$, para todo $x \in X$ temos que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ e as aplicações $x \to x_i$ definem n funcionais lineares contínuos sobre X denotados por f_i. Então,

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| \|e_i\| < n\epsilon,$$

para todo $x \in V$.

Escolhemos $\epsilon = \frac{r}{n}$ e então $x \in B(X_0, r)$. Segue que $V \subset B_r(x_0) \subset U$ e a demonstração está concluída. $\square$

Exemplo 3.4.1. *Seja X um espaço vetorial normado real de dimensão infinita. Então, $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ nunca é fechado na topologia fraca. Mais exatamente, mostraremos que*

$$S^{-\sigma(X,X^*)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Mostraremos, por enquanto, que $S^{-\sigma(X,X^*)} \supset \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Seja $x_0 \in X$, $\|x_0\| < 1$ e mostremos que qualquer aberto V de $\sigma(X,X^*)$ contendo

x_0 deve interceptar $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Sempre podemos supor que V é da forma

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon, \quad 1 \leq i \leq n,\}$$

com $\epsilon > 0$ e $f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Fixemos $y_0 \neq 0$ tal que $\langle f_i, y_0\rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n$.

Tal y_0 existe pois, se $\langle f_i, y_0\rangle \neq 0$, $1 \leq i \leq n$ e $\forall y_0 \in X$ teríamos que

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R}^n \\ z & \to & (f_1(z), \ldots, f_n(z)) \end{array}$$

seria injetora e portanto um isomorfismo sobre sua imagem. Isto nos daria que $\dim X \leq n$.

A função $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ é contínua em $[0, \infty)$ com $g(0) < 1$ e $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Segue que existe $\bar{t} > 0$ tal que $\|x_0 + \bar{t}y_0\| = 1$. Como $\langle f_i, x_0 + ty_0 - x_0\rangle = 0$, $1 \leq i \leq n$, temos que $x_0 + ty_0 \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Desta forma $x_0 + \bar{t}y_0 \in V \cap \{x \in X : \|x\| = 1\}$ e $x_0 \in S^{-\sigma(X,X^*)}$.

A igualdade será mostrada posteriormente quando mostrarmos que todo convexo que é fechado na topologia forte é também fechado na topologia fraca.

Exemplo 3.4.2. *O conjunto $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ nunca é aberto na topologia fraca pois, pelo que vimos no exemplo anterior, nenhum de seus pontos é ponto interior.*

Obs.: Podem haver (em geral há) seqüências que convergem fracamente (em um espaço de dimensão infinita) e não convergem fortemente. Por exemplo, se X^* é separável e X é reflexivo, sempre se pode construir uma seqüência $\{x_n\}$ que é fracamente convergente para zero com $\|x_n\| = 1$. Contudo há espaços de dimensão infinita onde toda seqüência fracamente convergente é convergente, como por exemplo $X = \ell_1$.

3.5 Os Conjuntos Convexos e a Topologia Fraca

Todo conjunto fechado/aberto se $\sigma(X, X^*)$ é também um conjunto fechado/aberto na induzida pela norma. A recíproca em geral é falsa como vimos nos Exemplos 3.4.1 e 3.4.2. O teorema a seguir mostra que a recíproca vale se o conjunto fechado na topologia forte e também convexo; ou seja, todo conjunto convexo que é fechado na topologia forte é também fechado na topologia fraca.

Teorema 3.5.1. *Se X é um espaço vetorial normado real e $C \subset X$ é convexo, são equivalentes:*

a) *C fechado na topologia forte*

b) *C fechado na topologia fraca*

Prova: **b)** $\Rightarrow$ **a)** é óbvia. Mostremos que **a)** $\Rightarrow$ **b)**. Para este fim, vamos mostrar que C^c é aberto em $\sigma(X, X^*)$. De fato, dado $x_0 \notin C$ pelo Teorema 2.1.8 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn Banach), existe $f \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle, \quad \forall y \in C.$$

Faça

$$V = \{x \in X : \langle f, x \rangle < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$$

então, $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$ e portanto $V \subset C^c$. Como $V \in \sigma(X, X^*)$, temos que $C^c \in \sigma(X, X^*)$. $\square$

Este teorema implica que se $\{x_n\}$ é uma seqüência fracamente convergente para x então existe uma seqüência de combinações lineares convexas dos x_n que converge fortemente para x. De fato, se $A \subset X$ we denote by $\overline{co(A)}$ o menor convexo fechado que contém A, com isto

$$\begin{array}{ccl} x & \in & \overline{co\{x_n\}}^{\sigma(X,X^*)} \\ & & \quad \shortparallel \\ & & \overline{co\{x_n\}}^{\|\cdot\|} \qquad \Rightarrow \quad \exists\, y_n \in co\{x_n\} \ \text{ tal que } \ y_n \to x \end{array}$$

Corolário 3.5.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $\mathcal{T}$ a topologia induzida pela norma em X. Se $\varphi : (X, \mathcal{T}) \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa e semicontínua inferiormente, então $\varphi : (X, \sigma(X, X^*)) \to (-\infty, \infty]$ é semicontinua inferiormente. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$, então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Prova: É suficiente provar que para to do $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$A_\lambda = \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

é fechado em $\sigma(X, X^*)$. Como A_λ é convexo e fechado na topologia forte, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, do Teorema 3.5.1 segue que A_λ fechado em $\sigma(X, X^*)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

3.6 A Topologia Fraca*

Seja X um espaço vetorial normado, X^* o seu dual (dotado da norma $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} |f(x)|$) e X^{**} o seu bi-dual (dotado da norma $\|\xi\| = \sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\leq 1}} |\xi(f)|$).

Temos uma injeção canônica $J : X \to X^{**}$ definida da seguinte forma: fixado $x \in X$, a aplicação

$$X^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{K},$$

é um funcional linear contínuo sobre X^* e assim Jx é definido por

$$\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in X \text{ e } f \in X^*.$$

Claramente J é linear e

$$\|Jx\| = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1\\ f\in X^*}} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\substack{\|f\|\leq 1\\ f\in X^*}} |f(x)| = \|x\|.$$

Desta forma, J é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

Pode ocorrer que J não seja sobrejetora. De qualquer forma, com a ajuda de J, sempre podemos identificar X com um subespaço de X^{**}.

Sobre X^* temos definidas a topologia da norma e $\sigma(X^*, X^{**})$, vamos definir uma terceira topologia sobre X^*, a topologia fraca*, que se denota $\sigma(X^*, X)$. Para cada $x \in X$ considera-se a aplicação $\varphi_x : X^* \to \mathbb{K}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$. Quando x percorre X obtemos uma família de aplicações $(\varphi_x)_{x\in X}$ de X^* em $\mathbb{K}$.

Definição 3.6.1. *A topologia fraca***, denotada por* $\sigma(X^*, X)$*, é a topologia induzida por* $J(X) = \{\varphi_x\}_{x\in X}$*. É claro que* $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**})$*.*

Como $\varphi_x = Jx$ e usualmente identificamos Jx com x temos que a topologia fraca* é a topologia induzida por $J(X) \subset X^{**}$; ou seja, por X. Assim denotamos a topologia fraca* por $\sigma(X^*, X)$.

Proposição 3.6.2. *A topologia* $\sigma(X^*, X)$ *é de Hausdorff*

Prova: Sejam $f_1, f_2 \in X^*$, $f_1 \neq f_2$. Então, existe $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$, digamos que $f_1(x) < f_2(x)$. Tome $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_1(x) < \alpha < f_2(x).$$

Sejam $\theta_1 = \{f \in X^* : f(x) < \alpha\} = \varphi_x^{-1}((-\infty, \alpha)) \ni f_1$ e $\theta_2 = \{f \in X^* : f(x) > \alpha\} = \varphi_x^{-1}((\alpha, \infty)) \ni f_2$. Então, $\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset$ e $\theta_1, \theta_2 \in \sigma(X^*, X)$. $\square$

A prova da seguinte proposição é deixada como um exercício para o leitor.

Proposição 3.6.3. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Obtemos uma base de vizinhanças de $f_0 \in X^*$ para a topologia $\sigma(X^*, X)$ ao considerar*

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \epsilon, \ i \in I\},$$

onde $x_i \in X$, I é finito e $\epsilon > 0$.

Notação: Quando $f_n \to f$ em $(X^*, \sigma(X^*, X))$, escrevemos

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

e diremos que f_n converge para f na topologia fraca*.

Da mesma forma, a prova da proposição a seguir é deixada como um exercício para o leitor.

Proposição 3.6.4. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Se $\{f_n\} \subset X^*$ temos:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in X.$

ii) Se $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e se* $f_n \rightharpoonup f$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *então* $\{\|f_n\|\}$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$, *então* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Nona Aula (100 minutos) $\uparrow$

Décima Aula (100 minutos) $\downarrow$

Mostraremos a seguir que, se X é um espaço vetorial normado real tal que $J : X \to X^{**}$ não é sobrejetora, então a topologia fraca* em X^* é estritamente menos fina que a topologia fraca em X^*. Começamos com o seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.6.5. *Seja X um espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n : X \to \mathbb{R}$ lineares e tais que*

$$\text{Se } \nu \in X \text{ é tal que } \varphi_i(\nu) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n, \text{ então } \varphi(\nu) = 0. \tag{3.2}$$

Então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

Prova: Considere $F : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$F(u) = [\varphi(u), \varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)]$$

Segue de (3.2) que $a = [1, 0, \ldots, 0] \notin \mathrm{Im(F)}$. Assim, podemos separar estritamente $\{a\}$ e $\mathrm{Im}(F)$ por um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ isto é, existem $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda < \alpha < \lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(u), \quad \forall\, u \in X$$

consequentemente, temos

$$\lambda\varphi(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_i(u) = 0, \quad \forall\, u \in X.$$

Logo, $\lambda < 0$ e

$$\varphi(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda\, i}{\lambda}\, \varphi_i(u), \quad \forall u \in X,$$

como queríamos. $\square$

Proposição 3.6.6. *Seja X um espaço vetorial normado real, se a função $\varphi : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to \mathbb{R}$ é linear e contínua, então existe $x \in X$ tal que $\varphi = Jx$; ou seja,*

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Prova: Como $\varphi : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to \mathbb{R}$ é contínua, existe uma vizinhança V de 0 em $\sigma(X^*, X)$ tal que

$$|\varphi(f)| < 1, \quad \forall f \in V.$$

Podemos supor que existem $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_n \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que V é da forma

$$V = \{f \in X^* : |\langle f, x_i \rangle| < \epsilon, \ \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Em particular se $f(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, então

$$\alpha f \in V, \ \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Portanto $|\alpha\varphi(f)| < 1$, $\forall \ \alpha \in \mathbb{R}$ e disto segue que $\varphi(f) = 0$. Agora, se aplicarmos o Lema 3.6.5 com $\varphi_i = Jx_i$, $1 \leq i \leq n$, obteremos que

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \rangle.$$

O que conclui a demonstração do resultado. □

Corolário 3.6.7. *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e H um hiperplano em X^*. Se H é fechado na topologia $\sigma(X^*, X)$, então H é da forma*

$$H = \{f \in X^* : \langle f, x \rangle = \alpha\},$$

para algum $0 \neq x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prova: O conjunto H é da forma

$$H = \{f \in X^* : \varphi(f) = \alpha\}$$

$\varphi : X^* \to \mathbb{R}$, $\varphi \not\equiv 0$. Seja $f_0 \notin H$ e V uma vizinhança de f_0 na topologia $\sigma(X^*, X)$ tal que $V \subset H^c$. Podemos supor que

$$V = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \epsilon, \ \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Como V é convexo temos que

$$\varphi(f) < \alpha, \ \forall f \in V \text{ ou } \varphi(f) > \alpha, \ \forall f \in V \tag{3.3}$$

de (3.3) segue que

$$\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0), \ \forall g \in W = V - f_0 \tag{3.4}$$

e como $-W = W$ segue de (3.4) que $|\varphi(g)| < |\alpha - \varphi(f_0)|$, $\forall g \in W$. Disto segue que φ é contínua de $(X^*, \sigma(X^*, X)$ em $\mathbb{R}$ já que W é uma vizinhança de 0. Aplicando a Proposição 3.6.6, existe $x \in X$ tal que $\varphi(f) = \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X^*$. $\square$

Observação 1. *Como observamos anteriormente, quando J não é sobrejetora (isto é; $J(X) \subsetneq X^{**}$), a topologia $\sigma(X^*, X)$ é estritamente menos fina que $\sigma(X^*, X^{**})$. Existem inclusive convexos fechados em $\sigma(X^*, X^{**})$ que não são fechados em $\sigma(X^*, X)$. Por exemplo, se $\xi \in X^{**} \setminus J(X)$ então,*

$$H = \{f \in X^* : \langle \xi, f \rangle = 0\}$$

é um hiperplano fechado de $\sigma(X^*, X^{**})$ mas não pode ser fechado em $\sigma(X^*, X)$ pois caso contrário ξ pertenceria a $J(X)$ (Corolário 3.6.7).

Teorema 3.6.8 (Banach-Alaoglu)**.** *Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. O conjunto $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia $\sigma(X^*, X)$.*

Prova: Faremos a prova apenas no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja

$$Y = \mathbb{R}^X = \{f : X \to \mathbb{R}\} = \{(w_x)_{x \in X}\}$$

dotado da topologia produto. Seja $\Phi : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to Y$ definida por

$$\Phi(f) = (f(x))_{x \in X} = w\,.$$

Da Proposição 3.2.5 e da definição de $\sigma(X^*, X)$, Φ é contínua pois $f \to (\Phi(f))_x = f(x)$ é contínua para cada $x \in X$. Provemos que Φ é um homeomorfismo de X^* sobre $\Phi(X^*)$. Claramente Φ é injetora e provemos que Φ^{-1} é contínua. Da Proposição 3.2.5, é suficiente mostrar que para todo $x \in X$ fixo a aplicação $w \mapsto \langle \Phi^{-1}(w), x \rangle$ é contínua sobre $\Phi(X^*)$. Isto é evidente pois $\langle \Phi^{-1}(w), x \rangle = w_x$ e $w \mapsto w_x$ é contínua pela definição da topologia produto em $\mathbb{R}^X$.

Por outro lado, é claro que $\Phi(B_{X^*}) = K$ onde

$$K = \{w \in Y : |w_x| \leq \|x\|,\ w_{x+y} = w_x + w_y,\ w_{\lambda x} = \lambda w_x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in X\}.$$

Então, basta mostrar que K é um compacto de Y para concluir que B_{X^*} é compacto em X^*. Mas $K = K_1 \cap K_2$, onde

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{w \in Y : |w_x| \leq \|x\|,\ \forall\, x \in X\} = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|], \\
K_2 &= \{w \in Y : w_{x+y} = w_x + w_y,\ w_{\lambda x} = \lambda w_x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in X\} \\
&= \bigcap_{x,y \in X} \underbrace{\{w \in Y : w_{x+y} - w_x - w_y = 0\}}_{A_{x,y}} \cap \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ x \in X}} \underbrace{\{w \in Y : w_{\lambda x} - \lambda w_x = 0\}}_{B_{\lambda y}}.
\end{aligned}$$

Segue do Teorema de Tychonoff que K_1 é compacto. Como $A_{x,y}$ e $A_{\lambda x}$ são fechados (pois $w \mapsto w_{x+y} - w_x - w_y$ e $w \longmapsto w_{\lambda x} - \lambda w_x$ são contínuas) segue que K_2 é fechado. Logo, K é compacto. $\square$

Décima Aula (100 minutos) $\uparrow$

3.7 Exercícios

1. Mostre que se M tem dimensão finita então podemos fazer $\epsilon = 0$ e dê um exemplo onde não podemos tomar $\epsilon = 0$.

2. Seja X é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Mostre que a norma é uma função convexa e s.c.i. quando colocamos em X a topologia fraca.

3. Generalize os resultados da Seção 2.2 para espaços topológicos

4. Seja X um espaço vetorial normado e M um subespaço vetorial fechado de X. Use o fato que a norma e s.c.i. na topologia fraca para mostrar que, se M é reflexivo então, podemos tormar $\epsilon = 0$ no Lemma 3.1.1.

5. Prove o Corolário 3.1.3.

6. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ duas topologias em X. Mostre que, se $\mathcal{T}_2$ é mais fina que $\mathcal{T}_1$, então todo compacto de $(X, \mathcal{T}_2)$ é um compacto de $(X, \mathcal{T}_1)$.

7. Mostre a Proposição 3.2.1.

8. Construir a topologia em X com sub-base constituída por dois subconjuntos U_1 e U_2 de X.

9. Mostre que se uma topologia $\mathcal{T}$ tem infinitos elementos então ela tem cardinalidade igual ou maior que a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

10. Seja X um espaço vetorial normado. Então, X é um espaço métrico com a métrica dada por $\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$. Seja $\varphi : X \to \mathbb{R}$ a função que associa a cada $x \in X$ a sua norma. Mostre que a topologia induzida em X por φ coincide com a topologia dada pela métrica. Estude os abertos da topologia induzida por φ, a noção de convergência nesta topologia e compare com os equivalentes na topologia dada pela métrica.

11. No caso em que $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) = (Y, \mathcal{T})$ para todo $\alpha \in A$, mostre que a topologia produto em Y^A consiste ta topologia da convergência pontual.

12. Uma família de subconjuntos de um conjunto dado tem a *propriedade da interseção finita* se a inserseção de qualquer sub-família finita é não

vazia. Mostre que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico compacto se, e somente se, toda coleção de fechados com a *propriedade da interseção finita* tem interseção não vazia.

13. Prove o resultado acima no caso em que X é um espaço vetorial complexo.

14. Enuncie e prove um resultado semelhante à Proposição 3.4.3 para o caso em que X é um espaço vetorial normado complexo.

15. Dado um espaço vetorial normado V e $A \subset V$, a envoltória convexa de A (denotada por $\overline{co(A)}$) é o menor conjunto fechado e convexo que contém A. Caracterize $\overline{co(A)}$ em termos dos elementos de A.

16. (Teorema de Mazur) Se X é um espaço de Banach e A é um subconjunto relativamente compacto de X, mostre que $\overline{co(A)}$ é relativamente compacto.

17. Prove a Proposicão 3.6.3.

18. Enuncie e prove um resultado análogo à Proposição 3.6.3 para o caso em que X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

19. Prove a Proposicão 3.6.4.

20. Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $\varphi : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to \mathbb{K}$ um funcional linear. Mostre que φ é contínuo se, e somente se, existe $0 \in V \in \sigma(X^*, X)$ tal que $\sup_{f \in V} |\varphi(f)| < \infty$.

21. Mostre que se $V \in \sigma(X^*, X)$ e $f_0 \in X^*$, então $f_0 + V \in \sigma(X^*, X)$.

Capítulo 4

Reflexividade e Separabilidade

Décima Primeira Aula (100 minutos) ↓

4.1 Espaços Reflexivos

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço de Banach e $J : X \to X^{**}$ a injeção canônica de X em X^{**}. Diremos que X é reflexivo se $J(X) = X^{**}$.*

Observação 2. *Se X é um espaço vetorial normado, como X^{**} é sempre completo, X só poderá ser reflexivo se for completo. Desta forma, uma condição necessária para que $J : X \to X^{**}$ seja sobrejetora é que X seja um espaço de Banach.*

Já vimos que J é um isomorfismo isométrico. Assim, quando X é reflexivo identificamos X e X^{**}.

É importante usar J na identificação já que há espaços tal que X e X^{**} são isométricos que não são reflexivos.

Na nossa busca por topologias em X onde tivessemos mais conjuntos compactos chegamos a obter que a bola fechada unitária de X^* é compacta na topologia fraca*. No entanto ainda não obtivemos qualquer resultado que nos permita dizer algo sobre os compactos de $(X, \sigma(X, X^*))$. Os resultados a seguir são conclusivos a este respeito e suas aplicações são inúmeras.

Teorema 4.1.2. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta em $(X, \sigma(X, X^*))$.

Prova: Se $J(X) = X^{**}$ então $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Por outro lado $B_{X^{**}}$ é compacto na topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$. Logo, é suficiente mostrar que J^{-1} é contínua de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ em $(X, \sigma(X, X^*))$. Da Proposição 3.2.5 e da definição de $\sigma(X, X^*)$, isto se reduz a provar que, para todo $f \in X^*$, $\xi \mapsto \langle f, J^{-1}\xi\rangle$ é contínua de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ em $\mathbb{K}$.

Como X é reflexivo, existe $x \in X$ tal que $Jx = \xi$. Assim

$$\langle f, J^{-1}\xi\rangle = \langle f, x\rangle = \langle Jx, f\rangle = \langle \xi, f\rangle$$

e $\xi \mapsto \langle \xi, f\rangle$ é contínua de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ em $\mathbb{K}$ pela definição de $\sigma(X^{**}, X^*)$.
$\square$

Agora mostraremos que a recíproca do Teorema 4.1.2 também é verdadeira. Para isto, vamos precisar dos dois lemas a seguir.

Lema 4.1.3 (Helly). *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{R}$. *Se* $f_1, \dots, f_n$ *são funcionais em* X^* *e* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *então, são equivalentes*

i) *Para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $x_\epsilon \in B_X$ *tal que*

$$|\langle f_i, x_\epsilon\rangle - \alpha_i| < \epsilon, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ii) *Para todo* $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_i\right| \;\leq\; \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, f_i\right\|.$$

Prova: **i**) $\Rightarrow$ **ii**) Fixemos $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ e seja $S = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$. De **i**) segue que existe $x_\epsilon \in B_X$ tal que $|\langle f_i, x_\epsilon\rangle - \alpha_i| < \epsilon$, $1 \leq i \leq n$ e

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_i\right| - \left|\langle\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i, x_\epsilon\rangle\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle f_i, x_\epsilon\rangle\right| < \epsilon\, S.$$

Assim,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, f_i\right\| + \epsilon S, \quad \forall \epsilon > 0.$$

ii) $\Rightarrow$ **i)** Se $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{\varphi} : X \to \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\vec{\varphi}(x) = (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle)$$

então, a propriedade **i)** expressa que $\vec{\alpha} \in \overline{\vec{\varphi}(B_X)}$. Suponha que $\vec{\alpha} \notin \overline{\vec{\varphi}(B_X)}$. Segue da Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn Banach (Teorema 2.1.8) que podemos separar estritamente (em $\mathbb{R}^n$) $\{\vec{\alpha}\}$ de $\overline{\vec{\varphi}(B_X)}$; isto é, existe $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{\varphi}(x) \cdot \vec{\beta} < \gamma < \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \quad \forall\, x \in B_X.$$

Consequentemente,

$$\left|\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i, x\rangle\right| < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \beta_i, \quad \forall\, x \in B_X;$$

isto é,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \leq \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i, \quad \text{que contradiz } \textbf{ii}).$$

$\square$

Lema 4.1.4 (Goldstine)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então $J(B_X)$ é denso em $(B_{X^{**}}, \sigma(X^{**}, X^*))$.*

Prova: Se $\xi \in B_{X^{**}}$ e $\xi \in V \in \sigma(X^{**}, X^*)$, provemos que $J(B_X) \cap V \neq \emptyset$. Podemos supor que V é da forma

$$V = \{\eta \in X^{**} : |\langle \eta - \xi, f_i\rangle| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

com $f_1, \cdots, f_n \in X^*$. Trata-se de encontrar $x \in B_X$ tal que

$$|\langle Jx - \xi, f_i\rangle| = |\langle f_i, x\rangle - \langle \xi, f_i\rangle| < \epsilon,\ \forall\, i = 1, \cdots, n$$

Se $\alpha_i = \langle \xi, f_i\rangle$, $1 \leq i \leq n$ então, $\forall\, \vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, \alpha_i\right| \;=\; \left|\langle\, \xi, \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\,\rangle\right| \;\leq\; \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, f_i\right\|$$

(já que $\|\xi\| \leq 1$). Segue do Lema 4.1.3 que existe $x_\epsilon \in B_X$ tal que

$$|\langle f_i, x_\epsilon\rangle - \alpha_i| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq n;$$

isto é, $Jx_\epsilon \in J(B_X) \cap V$. $\square$

Observação 3. *$J(B_X)$ é fechado em $B_{X^{**}}$ com a topologia forte (B_X é completo e J é isometria). Assim $J(B_X)$ em geral não é denso em $B_{X^{**}}$ com a topologia forte (exceto quando X é reflexivo).*

Teorema 4.1.5. *Seja X um espaço de Banach. Se*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta em $(X, \sigma(X, X^*))$ então, X é reflexivo.

Prova: Observemos primeiramente que $J : X \to X^{**}$ uma isometria e portanto é contínua. Assim $J : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^{***}))$ também é contínua e portanto $J : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ é contínua. Consequentemente $J(B_X)$ é compacto na topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$. Como $J(B_X)$ é denso em $B_{X^{**}}$ na topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ concluímos que

$$J(B_X) = B_{X^{**}} \text{ e portanto } J(X) = X^{**}.$$

$\square$

Corolário 4.1.6. *Seja X um espaço de Banach. Então,*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta em $(X, \sigma(X, X^*))$ se, e somente se, X é reflexivo.

Proposição 4.1.7. *Se X é Banach reflexivo e M é um subespaço vetorial fechado de X, então M com a topologia induzida por X é reflexivo.*

Prova: As topologias $\sigma(M, M^*)$ e a topologia induzida em M por $\sigma(X, X^*)$ coincidem. Basta mostrar que B_M é compacta em $\sigma(M, M^*)$. Mas B_X é compacta em $\sigma(X, X^*)$ e M é fechado em $\sigma(X, X^*)$. Logo B_M é compacto em $\sigma(X, X^*)$ logo também é compacto na topologia $\sigma(M, M^*)$. $\square$

Exercício 4.1.1. *Seja X é Banach reflexivo e M é um subespaço vetorial fechado de X. Sobre M temos duas topologias fracas definidas*

a) A topologia $\sigma(M, M^*)$

b) A topologia induzida em M pela topologia $\sigma(X, X^*)$.

Mostre que estas topologias coincidem.

Corolário 4.1.8. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo $\Leftrightarrow X^*$ é reflexivo.*

Prova: Mostremos primeiramente que se X é reflexivo então X^* é reflexivo. Sabemos que B_{X^*} é compacto em $\sigma(X^*, X)$ por outro lado $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ (já que $J(X) = X^{**}$). Logo B_{X^*} é compacto em $\sigma(X^*, X^{**})$ e assim X^* é reflexivo. Mostremos agora que, se X^* é reflexivo então, X é reflexivo. Pela etapa anterior X^{**} é reflexivo como $J(X)$ é um subespaço fechado de X^{**} temos que $J(X)$ é reflexivo. Como X e $J(X)$ são isométricos, segue que X é reflexivo. $\square$

Exercício 4.1.2. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se existe transformação linear $T : X \to Y$ que é fechada e bijetora, então X reflexivo se, e somente se, Y reflexivo.* Sugestão: Use o Corolário 4.1.6.

Corolário 4.1.9. *Se X é Banach reflexivo e $K \subset X$ é fechado, limitado e convexo;, então K é compacto em $\sigma(X, X^*)$.*

Prova: K é fechado em $\sigma(X, X^*)$ e existe m tal que $K \subset m\, B_X$. Como $m\, B_X$ é compacto em $\sigma(X, X^*)$ temos que K é compacto em $\sigma(X, X^*)$.

Exercício 4.1.3. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Mostre que, para qualquer $m > 0$, mB_X é compacto em $\sigma(X, X^*)$.*

Corolário 4.1.10. *Seja X um espaço de Banach reflexivo, $\emptyset \neq A \subset X$ um convexo fechado. Seja $\varphi : A \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa, própria, semicontínua inferiormente e, se A é ilimitado,*

$$\lim_{\substack{x\in A\\ \|x\|\to\infty}} \varphi(x) = +\infty. \tag{4.1}$$

Então φ alcança seu mínimo sobre A; isto é, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x\in A} \varphi(x).$$

Prova: Seja $a \in A$ tal que $\lambda_0 = \varphi(a) < \infty$ e $\tilde{A} = \{x \in A : \varphi(x) \leq \lambda_0\}$. Segue de (4.1.10) que $\tilde{A}$ é convexo, fechado e limitado. Do Corolário 4.1.9 temos que

$\tilde{A}$ é compacto em $\sigma(X, X^*)$ e do Corolário 3.5.2 temos que φ é semicontínua inferiormente na topologia $\sigma(X, X^*)$. Logo φ alcança seu mínimo sobre $\tilde{A}$; isto é, existe $x_0 \in \tilde{A}$ tal que

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \ \forall \, x \in \tilde{A}.$$

Se $x \in A \setminus \tilde{A}$ temos que $\varphi(x_0) \leq \varphi(a) \leq \varphi(x)$ e portanto

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x), \ \forall \, x \in A.$$

$\square$

Décima Primeira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Teorema 4.1.11. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$. Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado e densamente definido. Se Y é reflexivo, então $D(A^*)$ é denso em Y^* e isto permite definir $A^{**} : D(A^{**}) \subset X^{**} \to Y^{**}$.*

Prova: Para mostrar que $D(A^*)$ é denso em Y^*, basta mostrar que, se $\varphi : Y^* \to \mathbb{R}$ é linear, contínua e $\varphi(f) = 0$, $\forall\, f \in D(A^*)$ então, $\varphi = 0$. Como Y é reflexivo, existe $y \in Y$ tal que $Jy = \varphi$. Desta forma,

$$\langle \varphi, f\rangle = \langle Jy, f\rangle = \langle f, y\rangle = 0, \ \forall\, f \in D(A^*). \tag{4.2}$$

Se $\varphi \neq 0$, então $y \neq 0$ e $(0, y) \notin G(A) \subset X \times Y$ e portanto existe $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ tal que

$$\langle x^*, u\rangle + \langle y^*, Au\rangle < \alpha < \langle y^*, y\rangle, \ \forall\, u \in D(A). \tag{4.3}$$

Portanto, $\langle x^*, u\rangle + \langle y^*, Au\rangle = 0$, $\forall\, u \in D(A)$ e $\langle y^*, y\rangle > 0$. Assim $y^* \in D(A^*)$ e $A^*y^* = -x^*$. Obtemos uma contradição ao eleger $f = y^*$ em (4.2). Segue que $\varphi = 0$ e $\overline{D(A^*)} = Y^*$. $\square$

Teorema 4.1.12. *Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos sobre $\mathbb{R}$. Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear fechado e densamente definido. Se identificamos X^{**} com X e Y^{**} com Y, então $A^{**} = A$.*

Prova: Vimos no Teorema 4.1.11 que, nas condições acima, $D(A^*)$ é denso em Y^*. Com isto, podemos definir A^{**}. Mostremos que, ao identificarmos X^{**} com X e Y^{**} com Y, $A^{**} = A$. Recorde que, se $\mathcal{J} : Y^* \times X^* \to X^* \times Y^*$ e $\mathcal{J}(y^*, x^*) = (-x^*, y^*)$, então

$$\mathcal{J}(G(A^*)) = G(A)^{\perp}.$$

Assim,

$$G(A^*) \subset Y^* \times X^*, \quad \mathcal{J}(G(A^*)) \subset^* \times Y^*, \quad \text{e} \quad \mathcal{J}(G(A^*))^{\perp} \subset X \times Y.$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(G(A^*))^{\perp} &= \{(x, y) \in X \times Y \ : -\langle A^*v, x\rangle + \langle v, y\rangle = 0, \ \forall\, v \in D(A^*)\} \\
&= \{(Jx, Jy) \in X^{**} \times Y^{**} : -\langle Jx, A^*v\rangle + \langle Jy, v\rangle = 0, \ \forall v \in D(A^*)\} \\
&= \{(Jx, A^{**}Jx) : Jx \in D(A^{**})\} \\
&= G(A^{**}).
\end{aligned}$$

Desta forma, ao identificarmos X^{**} com X e Y^{**} com Y, temos que

$$G(A^{**}) = G(A)^{\perp\perp} = G(A)$$

e $A^{**} = A$. $\square$

4.2 Espaços Separáveis

Definição 4.2.1. *Diremos que um espaço métrico (X, d) é separável se X possuir um subconjunto enumerável e denso.*

Proposição 4.2.2. *Se (X, d) é um espaço métrico separável e Y é um subconjunto de X, então (Y, d) é separável.*

Prova: Como (X, d) é separavel existe $\{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso em X. Seja $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ e escolha $a_{m,n} \in B_{r_n}(u_m) \cap Y$ quando este conjunto é não vazio. Note que $\cup_{m=1}^{\infty} B_{r_n}(u_m) = X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Disto segue facilmente que $\{a_{m,n}\}$ é um subconjunto enumerável e denso de Y. $\square$

Exercício 4.2.1. *Mostre que, se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são espaços métricos separáveis, então $X_1 \times X_2$ com a métrica $d((x_1, x_2), (\bar{x}_1, \bar{x}_2)) = d(x_1, x_2) + d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é um espaço métrico separável.*

Teorema 4.2.3. *Se X é um espaço de Banach real tal que X^* é separável, então X é separável.*

Prova: Seja $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ um subconjunto denso de X^*. Como

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \langle f_n, x \rangle$$

existe $x_n \in X$ com $\|x_n\| = 1$ e $\langle f_n, x_n \rangle \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$. Seja L_0 o espaço vetorial gerado por $\{x_n\}$ com coeficientes em $\mathbb{Q}$ e L o gerado por $\{x_n\}$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. É claro que L_0 é enumerável e denso em L. Se provarmos que L é denso em X, o resultado seguirá. Seja $f \in X^*$ tal que $\langle f, x \rangle = 0$, $\forall\, x \in L$.

O resultado seguirá se mostrarmos que $f = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{l} \|f - f_n\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{e} \\ \dfrac{1}{2}\,\|f_n\| \leq \langle f_n, x_n\rangle = \langle f_n - f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle \leq \dfrac{\epsilon}{3} \end{array}$$

já que $\langle f, x_n\rangle = 0$. Assim $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < \epsilon$. Logo $f = 0$. □

Exercício 4.2.2. *Mostre que existe espaço de Banach separável X tal que X^* não é separável.*

Corolário 4.2.4. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo e separável se, e somente se, X^* é reflexivo e separável.*

Prova: Sabemos que, se X^* é reflexivo e separável, então X é reflexivo e separável. Inversamente, se X é reflexivo e separável, então $X^{**} = J(X)$ é reflexivo e separável e assim X^* é reflexivo e separável. □

Teorema 4.2.5. *Seja X um espaço de Banach. Então X é separável se, e somente se, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável.*

Prova: Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de B_X. Para $f, g \in B_{X^*}$ definimos

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - g, x_n\rangle.|$$

Mostremos que $d : B_{X^*} \times B_{X^*} \to [0, \infty)$ é uma métrica. De fato:

- $d(f, g) = 0$ implica que $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e segue que $f = g$,
- é claro que $d(f, g) = d(g, f)$ e
- $$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - h + h - g, x_n\rangle| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - h, x_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle h - g, x_n\rangle| \\ &= d(f, h) + f(h, g). \end{aligned}$$

Portanto d é uma métrica.

A seguir, demonstraremos que a topologia $\mathcal{T}$ associada a d em B_{X^*} coincide com a topologia induzida em B_{X^*} por $\sigma(X^*, X)$.

a) Seja $f_0 \in B_{X^*}$ e V uma vizinhança de f_0 em $\sigma(X^*, X)$. Provemos que existe $r > 0$ tal que

$$U = \{f \in B_{X^*} : d(f, f_0) < r\} \subset V.$$

Podemos supor que V é da forma

$$V = \{f \in B_{X^*} : |\langle f - f_0, y_i \rangle| < \epsilon,\ 1 \leq i \leq k\},$$

$y_1, \cdots, y_k \in X$. Sem perda de generalidade, suponha que $\|y_i\| \leq 1$, $1 \leq i \leq k$.

Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é densa em B_X para cada i pode-se encontrar $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_i - x_{n_i}\| < \dfrac{\epsilon}{4}$. Fixemos $r > 0$ tal que $2^{n_i} r < \dfrac{\epsilon}{2}$, $1 \leq i \leq k$ e demonstremos que, para esta escolha de r, $U \subset V$. Se $f \in B_{X^*}$ é tal que $d(f, f_0) < r$, então

$$\frac{1}{2^{n_i}} |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < r, \quad 1 \leq i \leq k$$

e assim

$$\frac{1}{2^{n_i}}\ |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < r \ \Rightarrow\ |\langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} |\langle f - f_0, y_i \rangle| &= |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i} \rangle + \langle f - f_0, x_{n_i} \rangle| \\ &< (\|f\| + \|f_0\|)\|y_i - x_{n_i}\| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

e $f \in V$. Segue que V é aberto na topologia dada pela métrica d.

b) Seja $f_0 \in B_{X^*}$. Fixemos $r > 0$ e provemos que existe $\tilde{V} \in \sigma(X^*, X)$

$$f_0 \in V = \tilde{V} \cap B_{X^*} \subset U = \{f \in B_{X^*} : d(f, f_0) < r\}.$$

Tomemos V da forma

$$V = \{f \in B_{X^*} : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \epsilon, \quad 1 \leq i \leq k\}$$

e determinemos k e ϵ para que $V \subset U$. Se $f \in V$, temos

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}\ |\langle f - f_0, x_n \rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\ |\langle f - f_0, x_n \rangle| \\ &< \epsilon + \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Escolhemos $\epsilon < \dfrac{r}{2}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \dfrac{r}{2}$. Segue que $f_0 \in V \subset U$, como queríamos.

Reciprocamente, suponhamos que $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ é metrizável e mostremos que X é separável. Seja $U_n = \left\{ f \in B_{X^*} : d(f, 0) < \dfrac{1}{n} \right\}$ e V_n uma vizinhança de 0 em $\sigma(X^*, X)$ tal que $V_n \subset U_n$. Podemos supor que V_n é da forma

$$\{f \in B_{X^*} : |\langle f, x\rangle| < \epsilon_n, \ \forall\, x \in \Phi_n\}$$

onde Φ_n é um conjunto finito. Observemos que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ é enumerável.

Por outro lado

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$$

e assim, $\langle f, x\rangle = 0$, $\forall\, x \in D$ implica que $f = 0$. Isto mostra que o espaço vetorial gerado por D é denso em X e segue que X é separável. $\square$

Corolário 4.2.6. *Se X é Banach separável e $\{f_n\}$ é uma seqüência limitada de X^*, então existe subseqüência $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X^*, X)$.*

Prova: Suponha $\|f_n\| \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como B_{X^*} é compacto e metrizável na topologia $\sigma(X^*, X)$, $\{f_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $\sigma(X^*, X)$ pelo Teorema 2.5.1 (Análise I). $\square$

Teorema 4.2.7. *Seja X Banach reflexivo e $\{x_n\}$ limitada em X. Então existe uma subseqüência $\{x_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(X, X^*)$.*

Prova: Seja M_0 o espaço vetorial gerado pelos $\{x_n\}$ e $M = \overline{M_0}$ é um espaço separável. Além disso M é reflexivo. Como M^* é separável $B_{M^{**}}$ $(= B_M)$ é metrizável em $\sigma(M^{**}, M^*)$ $(= \sigma(M, M^*))$. Segue que B_M é metrizável e compacto em $\sigma(M, M^*)$. Daí, $\{x_n\}$ tem subseqüência convergente em $\sigma(M, M^*)$ e portanto convergente em $\sigma(X, X^*)$. $\square$

Décima Segunda Aula (100 minutos) $\uparrow$

Décima Terceira Aula (100 minutos) ↓

4.3 Espaços Uniformemente Convexos

Definição 4.3.1. *Um espaço vetorial normado X é dito uniformemente convexo se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in B_X, \quad e \ \ \|x - y\| \geq \epsilon \ \Rightarrow \ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta. \tag{4.4}$$

Exemplo 4.3.1. *Seja H um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$. É fácil ver que vale a identidade do paralelogramo*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\|v\|^2, \quad \forall u, v \in H.$$

Usando esta identidade é fácil concluir que H é uniformemente convexo. De fato, se $\|u\| = \|v\| = 1$, $\epsilon > 0$ e $\|u - v\| \geq \epsilon$, então

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}$$

e portanto

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta, \quad \textit{onde } \delta = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Disto segue que todo espaço com produto interno H é uniformemente convexo.

Teorema 4.3.2. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Prova: Seja $\xi \in X^{**}$ com $\|\xi\| = 1$. Temos que mostrar que $J(B_X) \ni \xi$. Como $J(B_X)$ é fechado na topologia forte de X^{**} é suficiente mostrar que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ x \in B_X$ tal que $\|\xi - Jx\| < \epsilon$.

Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ dado na Definição 4.3.1 e $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$ tal que

$$\langle \xi, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{4.5}$$

Se $V = \left\{\eta \in X^{**} : |\langle \eta - \xi, f \rangle| < \dfrac{\delta}{2}\right\}$, então $\xi \in V \in \sigma(X^{**}, X^*)$. Logo, do Lema 4.1.4, $V \cap J(B_X)$ é não vazio. Para completar a demonstração, fixemos

$x \in B_X$ tal que $Jx \in V$ e mostremos que $\xi \in Jx + \epsilon B_{X^{**}}$. Suponha que $\xi \in (Jx + \epsilon B_{X^{**}})^c = W$. Note que $\xi \in W \in \sigma(X^{**}, X^*)$ já que $B_{X^{**}}$ é fechado em $\sigma(X^{**}, X^*)$. Outra aplicação do Lema 4.1.4 nos dá que

$$(V \cap W) \cap J(B_X) \neq \emptyset;$$

isto é, existe $\hat{x} \in B_X$ tal que $J\hat{x} \in V \cap W$. Como $Jx, J\hat{x} \in V$ temos que

$$\left.\begin{array}{l} |\langle Jx, f\rangle - \langle \xi, f\rangle| = |\langle f, x\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2} \\ |\langle J\hat{x}, f\rangle - \langle \xi, f\rangle| = |\langle f, \hat{x}\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2\langle \xi, f\rangle & \leq & \langle f, x + \hat{x}\rangle + \delta \\ & \leq & \|x + \hat{x}\| + \delta \end{array}$$

que conjuntamente com (4.5) implica

$$\frac{\|x + \hat{x}\|}{2} > 1 - \delta. \tag{4.6}$$

De (4.6) e do fato que $J\hat{x} \in W$ e portanto $\|x - \hat{x}\| > \epsilon$ obtemos uma contradição com a convexidade uniforme de X. $\square$

Corolário 4.3.3. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Proposição 4.3.4. *Seja X uniformemente convexo e $\{x_n\}$ uma seqüência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$.

Prova: Como $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ temos que $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ e consequentemente $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Podemos supor que $x \neq 0$. Fazendo

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{\|x\|},$$

temos que $y_n \rightharpoonup y$ e consequentemente $\frac{y_n + y}{2} \rightharpoonup y$. Segue da Proposição 3.4.4 e de $\|y\| = \|y_n\| = 1$ que

$$1 = \|y\| \geq \limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\| \geq \liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\| \geq \|y\| = 1.$$

E assim $\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| = 1$. A convexidade uniforme de X agora implica que $\|y_n - y\| \to 0$ e portanto $x_n \to x$. $\square$

Capítulo 5

Espaços $\mathbf{L^p(\Omega)}$

Neste capítulo fixamos $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e identificamos funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que são iguais quase sempre. No caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, supomos que $\mathbb{R}^N$ é dotado da medida de Lebesgue.

5.1 Definição e Propriedades Elementares

Definição 5.1.1. *Seja $p \in (0, \infty)$; definimos*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

e para $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \exists\ c \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\}$$

Também definimos, para $0 < p < \infty$, $\| \cdot \|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ por

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

e para $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Observamos que se $\Omega = \mathbb{N}$ e μ é a medida da contagem então $L^p(\Omega) = \ell_p$.

Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por q o número definido por

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $1 < p < \infty$

b) $q=1$ se $p=\infty$ e $q=\infty$ se $p=1$.

O número q é chamado expoente conjugado de p. Vimos em Análise I que $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach com a norma definida acima.

5.2 Convexidade Uniforme e Reflexividade

Vamos nostrar que, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é uniformemente convexo e portanto reflexivo. Isto segue das desigualdades de Clarkson que por sua vez segue da desigualdade de Minkowski para $0 < p < 1$. Esta última segue da seguinte desigualdade de Hölder para $0 < p < 1$.

Teorema 5.2.1. *Sejam* $0 < p < 1$ *e* $p^* = \dfrac{p}{p-1} < 0$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e*

$$0 < \int_\Omega |g(x)|^{p^*} dx < \infty,$$

então

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \geq \left\{\int_\Omega |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega |g(x)|^{p^*} dx\right\}^{\frac{1}{p^*}}.$$

Prova: Podemos supor que $fg \in L^1(\Omega)$ pois caso contrário a desigualdade acima é óbvia. Se $\phi = |g|^{-p}$ e $\psi = |fg|^p$, então $\phi\psi = |f|^p$ e $\psi \in L^q(\Omega)$ onde $q = \dfrac{1}{p} > 1$. Como $p^* = -pq^*$, $q^* = \dfrac{q}{q-1}$, segue que $\phi \in L^{q^*}(\Omega)$. Da desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^p dx &= \int_\Omega \phi(x)\psi(x)dx \leq \|\psi\|_{L^q} \cdot \|\phi\|_{L^{q^*}} \\ &= \left\{\int_\Omega |f(x)g(x)|dx\right\}^p \cdot \left\{\int_\Omega |g(x)|^{p^*} dx\right\}^{-\frac{p}{p^*}}.\end{aligned}$$

elevando a $\dfrac{1}{p}$ obtemos $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|fg\|_{L^1(\Omega)} \|g\|^{-1}_{L^{p^*}(\Omega)}$, como queríamos. $\square$

A seguir apresentamos uma versão da desiguladade de Minkowski para $0 < p < 1$.

Teorema 5.2.2. *Se* $0 < p < 1$, *então*

$$\|\,|u| + |v|\,\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^p(\Omega). \tag{5.1}$$

Prova: Se $u = v = 0$ em $L^p(\Omega)$ então a desigualdade é trivial e, em caso contrário, o lado esquerdo da desigualdade é maior que zero. Assim, aplicando o Teorema 5.2.1,

$$\begin{aligned}
\|\,|u|+|v|\,\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega (|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}(|u(x)|+|v(x)|)dx \\
&\geq \left\{\int_\Omega (|u(x)|+|v(x)|)^{(p-1)p^*}dx\right\}^{\frac{1}{p^*}} (\,\|u\|_{L^p(\Omega)}+\|v\|_{L^p(\Omega)}\,) \\
&= \|\,|u|+|v|\,\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{p^*}} \big(\|u\|_{L^p}+\|v\|_{L^p(\Omega)}\big)
\end{aligned}$$

e a desigualdade segue notando-se que $\dfrac{p}{p^*} = p-1$. □

Lema 5.2.3. *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a, b \geq 0$*, então*

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p). \tag{5.2}$$

Prova: Se $a = 0$ a desigualdade é trivial. Se $a > 0$, fazendo $x = \dfrac{b}{a}$, podemos escrever a desigualdade acima na forma

$$1 + x^p \leq (1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p).$$

A função

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{(1+x^p)}$$

satisfaz, $f(0) = 1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$ e $f(x) > 1$ se $0 < x < \infty$. Segue que f atinge o seu máximo em $(0,\infty)$ e este máximo ocorre no único ponto crítico de f que é $x = 1$. Como $f(1) = 2^{p-1}$ temos que a imagem de f está contida no intervalo $[1, 2^{p-1}]$ e o resultado segue. □

Décima Terceira Aula (100 minutos) ↑

Lema 5.2.4. *Se* $0 < s < 1$ *a função* $f(x) = \frac{1-s^x}{x}$ *é uma função decrescente de* $x > 0$.

Prova: Note que

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(-s^x x \ln s - (1 - s^x)) = \frac{1}{x^2}(s^x - s^x \ln s^x - 1)$$

e se $g(t) = t - t \ln t - 1$, então $f'(x) = \frac{g(s^x)}{x^2}$. Como $0 < s^x < 1$ e $g'(t) = -\ln t > 0$ para $0 < t < 1$, segue que $g(s^x) < g(1) = 0$ e $f'(x) < 0$. □

Lema 5.2.5. *Se* $1 < p \leq 2$ *e* $0 \leq t \leq 1$, *então*

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{1-t}{2}\right|^{p^*} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

onde $p^* = \dfrac{p}{p-1}$ *é o expoente conjugado de* p.

Prova: Como a desigualdade claramente é verdadeira para $p = 2$ ou $t = 0$ ou $t = 1$, assumimos que $1 < p < 2$ e $0 < t < 1$. Se fazemos $t = \dfrac{1-s}{1+s}$, temos que a desigualdade é equivalente a

$$\frac{1}{2}\,[\,(1+s)^p + (1-s)^p\,] - (1 + s^{p^*})^{p-1} \geq 0\,.$$

Se denotamos

$$\binom{p}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1.$$

A expansão em séries de potências da desigualdade acima toma a forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k} s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-s)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k} s^{p^*k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k} s^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k} s^{p^*k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\binom{p}{2k} s^{2k} - \binom{p-1}{2k-1} s^{p^*(2k-1)} - \binom{p-1}{2k} s^{2p^*k}\right\}.
\end{aligned}$$

Esta última série é convergente para $0 < s < 1$. Provamos a desigualdade mostrando que cada termo da série é positivo para $0 < s < 1$. O k-ésimo termo pode ser escrito na forma

$$\tfrac{p(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}s^{2k} - \tfrac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}s^{p^*(2k-1)} + \tfrac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}s^{2kp^*}$$

$$= \tfrac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}\left[\tfrac{p(p-1)}{2k(2k-p)} - \tfrac{p-1}{(2k-p)}s^{p^*(2k-1)-2k} + \tfrac{p-1}{2k}s^{2kp^*-2k}\right]$$

$$= \tfrac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}\left[\tfrac{p-2k+2k}{\frac{2k(2k-p)}{p-1}} - \tfrac{1}{\frac{(2k-p)}{p-1}}s^{\frac{p}{p-1}(2k-1)-2k} + \tfrac{1}{\frac{2k}{p-1}}s^{2k\left(\frac{p}{p-1}-1\right)}\right]$$

$$= \tfrac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}\left[\tfrac{1-s^{\frac{(2k-p)}{p-1}}}{\frac{(2k-p)}{p-1}} - \tfrac{1-s^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right]$$

$\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!} > 0$ pois $p < 2$ enquando que $\left[\frac{1-s^{\frac{(2k-p)}{p-1}}}{\frac{(2k-p)}{p-1}} - \frac{1-s^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right] > 0$, pelo Lemma 5.2.5, já que $0 < \frac{2k-p}{p-1} < \frac{2k}{p-1}$. Segue que o resultado vale. $\square$

Lema 5.2.6. *Se $z, w \in \mathbb{C}$, $1 < p \leq 2$, então*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p^*} \leq \left(\frac{1}{2}\,|z|^p + \frac{1}{2}\,|w|^p\right)^{1/p-1} \tag{5.3}$$

onde $p^* = \frac{p}{p-1}$. Se $2 \leq p < \infty$, então

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p} \leq \frac{1}{2}\,|z|^p + \frac{1}{2}\,|w|^p. \tag{5.4}$$

Prova: Vamos primeiramente provar (5.3). Como a desigualdade é óbvia se $w = 0$ ou $z = 0$ e é simétrica em z e w, podemos supor que $|z| \geq |w| > 0$. Neste caso podemos escrever a desigualdade na forma

$$\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^{p^*} \leq \frac{1}{2}\left(1+r^p\right)^{1/p-1}$$

onde $w/z = re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Se $\theta = 0$ o resultado foi provado no lema anterior. Completamos a prova mostrando que para r fixo a funcão

$$f(\theta) = \left|1+re^{i\theta}\right|^{p^*} + \left|1-re^{i\theta}\right|^{p^*}$$

tem o seu máximo atingido em $\theta = 0$. Como

$$f(\theta) = (1 + r^2 + 2\,r\,\cos\theta)^{p^*/2} + (1 + r^2 - 2\,r\,\cos\theta)^{p^*/2}$$

é claro que $f(2\pi - \theta) = f(\pi - \theta) = f(\theta)$ e portanto podemos considerar θ apenas no intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$. Como $p^* \ge 2$ temos que

$$f'(\theta) = -p^* r \text{ sen } \theta \underbrace{\left[(1 + r^2 + 2r\cos\theta)^{\frac{p^*}{2}-1} - (1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{\frac{p^*}{2}-1}\right]}_{\ge 0} \le 0\,.$$

Logo o valor máximo de $f(\theta)$ ocorre em $\theta = 0$.

Para provar (5.4) note que, se $2 \le p < \infty$, então $1 < p^* \le 2$ e temos, trocando p por p^* em (5.3) e utilizando o Lema 5.2.3

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p &\le \left(\frac{1}{2}|z|^{p^*} + \frac{1}{2}\,|w|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*-1}} = \left(\frac{1}{2}\,|z|^{p^*} + \frac{1}{2}|w|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \\ &\le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p^*}} 2^{\frac{p}{p^*}-1}\,(|z|^p + |w|^p) = \frac{1}{2}\,(\,|z|^p + |w|^p)\,, \end{aligned}$$

e o resultado está provado. $\square$

Teorema 5.2.7 (Clarkson). *Sejam* $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ *e* $p^* = \dfrac{p}{p-1}$. *Se* $2 \le p < \infty$, *então*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}\,\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\,\|v\|_{L^p}^p, \tag{5.5}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} \ge \left(\,\frac{1}{2}\,\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\,\|v\|_{L^p}^p\,\right)^{p^*-1}. \tag{5.6}$$

Se $1 < p \le 2$, *então*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} \le \left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\,\|v\|_{L^p}^p\right)^{p^*-1}, \tag{5.7}$$

$$2^{2-p}\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^p\right) \ge \frac{1}{2}\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\,\|v\|_{L^p}^p. \tag{5.8}$$

Prova: Para $2 \le p < \infty$ (5.5) é obtida de (5.4) fazendo $z = u(x)$ e $w = v(x)$ e integrando sobre Ω. Para provar (5.7) para $1 < p < 2$ note que $\||u|^{p^*}\|_{L^{p-1}} =$

$\|u\|_{L^p}^{p^*}$, $\forall u \in L^p$. Usando a desigualdade de Minkowski para $0 < p-1 < 1$ obtemos de (5.3) que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*} &= \left\| \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p^*} \right\|_{p-1} + \left\| \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p^*} \right\|_{p-1} \\
&\overset{(5.1)}{\leq} \left\| \left|\frac{u+v}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p^*} \right\|_{p-1} \\
&= \left\{ \int_\Omega \left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p^*} \right)^{p-1} \right\}^{\frac{1}{p-1}} \\
&\overset{(5.3)}{\leq} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{2}\, |u|^p + \frac{1}{2}\, |w|^p \right\}^{p^*-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\, \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\, \|v\|_{L^p}^p \right)^{p^*-1}
\end{aligned}$$

e a desigualdade (5.7) vale.

Para $2 \leq p < \infty$, a desigualdade (5.6) segue da mesma forma que (5.7) usando a desigualdade de Minkowski usual em lugar de (5.1) e em lugar de (5.3) usamos

$$\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p^*} + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p^*} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{2}\, |\xi|^p + \frac{1}{2}\, |\eta|^p,$$

que é obtida de (5.3) trocando p por p^*, z por $\xi+\eta$, w por $\xi-\eta$.

Finalmente, para $2 \leq p^* < \infty$, fazendo $z = \xi+\eta$ e $w = \xi-\eta$ em (5.4) e usando a primeira desigualdade em (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(|\xi|^{p\frac{p^*}{p}} + |\eta|^{p\frac{p^*}{p}} \right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq 2^{p-\frac{p}{p^*}} \left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p\frac{p^*}{p}} + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p\frac{p^*}{p}} \right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&\leq 2^{p-\frac{p}{p^*}} \left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p} + \left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p} \right).
\end{aligned}$$

Agora, usando a segunda desigualdade em (5.2), obtemos

$$2^{\frac{p}{p^*}-1} \left(|\xi|^p + |\eta|^p \right) \leq \left(|\xi|^{p\frac{p^*}{p}} + |\eta|^{p\frac{p^*}{p}} \right)^{\frac{p}{p^*}}$$

Disto obtemos que

$$2^{2-p}\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^p+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^p\right)\geq \frac{1}{2}\left|\xi\right|^p+\frac{1}{2}\left|\eta\right|^p$$

e (5.8) segue integrando esta desigualdade, para $\xi = u(x)$ e $\eta = v(x)$, em Ω. $\square$

Corolário 5.2.8. *Se* $1 < p < \infty$ $L^p(\Omega)$ *é uniformemente convexo.*

Prova: Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u\|_{L^p} \leq 1$, $\|v\|_{L^p} \leq 1$ e $\|u-v\|_{L^p(\Omega)} \geq \epsilon$. Se $2 \leq p < \infty$ temos de (5.5) que

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p\leq 1$$

de onde segue que

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p\leq 1-\frac{\epsilon^p}{2^p}$$

e

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p\leq 1-\delta, \quad \text{com} \quad \delta=1-\left(1-\frac{\epsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado, se $1 < p \leq 2$ segue de (5.7) que

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p^*}\leq 1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p^*}$$

e

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}\leq 1-\delta, \quad \text{com} \quad \delta=1-\left(1-\frac{\epsilon^{p^*}}{2^{p^*}}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

$\square$

Corolário 5.2.9. *Se* $1 < p < \infty$, *então* $L^p(\Omega)$ *é reflexivo.*

Décima Quarta Aula (100 minutos) ↑

Décima Quinta Aula (100 minutos) ↓

Agora utilizaremos este resultado para identificar o dual de espaços $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Há outras provas do teorema abaixo que não envolvem a necessidade de se saber a priori que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, são reflexivos mas estas envolvem o Teorema de Radon-Nikodyn que também não será abordado neste curso.

Teorema 5.2.10 (de Representação de Riesz)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e* $\phi \in (L^p(\Omega))^*$*, então existe um único* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\,, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}$*. A aplicação* $T : L^{p^*}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ *definida por*

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf\,, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

é uma isometria sobre $(L^p(\Omega))^*$*. Isto permite identificar* $L^{p^*}(\Omega)$ *e* $(L^p(\Omega))^*$ *o que será adotado sistematicamente.*

Prova: Defina $T : L^{p^*}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ por

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Então,

$$|\,\langle Tu, f \rangle\,| \leq \|u\|_{L^{p^*}}\,\|f\|_{L^p}$$

e portanto $\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$. Por outro lado se $f_0(x) = |u(x)|^{p^*-2}u(x)$, ($f(x) = 0$ se $u(x) = 0$). Então $f_0 \in L^p$ e $\langle Tu, f_0 \rangle = \|u\|_{L^{p^*}}^{p^*}$ e $\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^{p^*}}^{p^*-1}$. Logo

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} \geq \frac{|\langle Tu, f_0\rangle|}{\|f_0\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$

e

$$\|Tu\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

Resta mostrar que T é sobrejetora. Seja $X = T(L^{p^*}(\Omega))$. Como X é um subespaço fechado resta apenas mostrar que X é denso em $(L^p(\Omega))^*$.

Seja $\xi \in (L^p(\Omega))^{**}$ tal que $\langle \xi, Tu \rangle = 0$, $\forall u \in L^p(\Omega)$. Se concluirmos que $\xi = 0$ o resultado estará demonstrado. Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo, existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $\xi = Jh$. Desta forma,

$$0 = \langle Jh, Tu \rangle = \langle Tu, h \rangle = \int_\Omega uh = 0, \quad \forall u \in L^{p^*}(\Omega).$$

Concluímos que $h = 0$ escolhendo $u = |h|^{p-2}h$ e disto segue que $\xi = Jh = 0$. $\square$

5.3 Separabilidade

5.3.1. Separabilidade de $\mathbf{C(K, M)}$

Sejam K e M espaços métricos. No que se segue, damos condições suficientes para que o espaço das funções contínuas $C(K, M)$, com a topologia da convergência uniforme, seja separável.

Para apresentar o resultado sobre separabilidade de $C(K, M)$ precisamos da noção de *número de Lebesgue* que definimos a seguir.

Definição 5.3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{B} \subset 2^X$ uma cobertura aberta de X. Diremos que um número $\eta > 0$ é um* número de Lebesgue *de $\mathcal{B}$ se todo subconjunto de X com diâmetro menor que η estiver contido em algum $B \in \mathcal{B}$.*

Proposição 5.3.2. *Se (X, d) é um espaço métrico compacto, então toda cobertura aberta $\mathcal{B}$ de (X, d) possui um número de Lebesgue.*

Prova: Faremos a prova por redução ao absurdo. Suponha que $\mathcal{B}$ é uma cobertura aberta do espaço métrico compacto (X, d) que não possui número de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathcal{O}_n \subset 2^X$ a família dos subconjuntos de X com diâmetro menor que n^{-1}. Então, existe $O_n \in \mathcal{O}_n$ tal que O_n não está contido em qualquer dos elementos de $\mathcal{B}$. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência qualquer com $x_n \in O_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente e $x \in X$ é o seu limite. Então $x \in B$ para algum $B \in \mathcal{B}$ e consequentemente, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset B$. Segue do fato que $\mathrm{diam}(O_n) < n^{-1}$, $x_n \in O_n$ e $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $O_n \subset B_\epsilon(x)$

para todo $n \geq N$. Consequentemente $O_n \subset B \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq N$ o que é um absurdo. $\square$

Proposição 5.3.3. *Sejam K e M espaços métricos. Se K é compacto e que M é separável, então $C(K, M)$ com a topologia da convergência uniforme é separável.*

Prova: Como M é separável, M possui uma base enumerável de abertos $\mathcal{B}$. Como K é compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, fixe $p(n) \in \mathbb{N}$ e conjuntos compactos $K_{n_1}, \cdots, K_{n_p}$ com diâmetro menor que n^{-1} tais que $K = \cup_{i=1}^{p} K_{n_i}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $p(n)$ como acima e $\sigma_{p(n)} = \{B_1, \cdots, B_{p(n)}\}$ uma coleção qualquer com $p(n)$ elementos de $\mathcal{B}$. Indiquemos por $A(n, \sigma_{p(n)})$ o conjunto das funções contínuas $f : K \to M$ tais que $f(K_{n_i}) \subset B_i$, para todo $1 \leq i \leq p(n)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, a coleção $\mathcal{U}_n$ de todos os $A(n, \sigma_{p(n)})$, $\sigma_{p(n)} \subset \mathcal{B}$, é enumerável pois $\mathcal{B}$ é enumerável e $\mathcal{U} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ é enumerável. Se mostrarmos que $\mathcal{U}$ é uma base de abertos de $C(K, M)$ o resultado seguirá tomando uma função em cada um dos elementos de $\mathcal{U}$.

Em primeiro lugar verifiquemos que cada um dos $A(n, \sigma_{p(n)})$ é aberto em $C(K, M)$. De fato, se $f \in A(n, \sigma_{p(n)})$ e $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq p} d_M(f(K_{n_i}), B_i^c)$ e $d(g, f) < \epsilon$, então $g \in A(n, \sigma_{p(n)})$.

O resultado estará demonstrado se mostrarmos que para cada $f \in C(K, M)$ e $\epsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{p(n)} \subset \mathcal{B}$ tais que $f \in A(n, \sigma_{p(n)}) \subset B_\epsilon(f)$. Para isto, basta encontrar $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{p(n)} \subset \mathcal{B}$ tais que $f \in A(n, \sigma_{p(n)})$ e $\mathrm{diam}(A(n, \sigma_{p(n)})) < \epsilon$. Como $f(K)$ é compacto existem $B_j \in \mathcal{B}$, $1 \leq j \leq p'$, com $\mathrm{diam}(B_j) < \epsilon$ e $f(K) \subset \cup_{j=1}^{p'} B_j$. Seja $\eta > 0$ um número de Lebesgue dessa cobertura e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(f(K_{n_i})) < \eta$, $1 \leq i \leq p(n)$. Logo podemos escolher, entre os abertos B_j, $1 \leq j \leq p'$, abertos B_i tais que $f(K_{n_i}) \subset B_i$, $1 \leq i \leq p(n)$. Isto define $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{p(n)} = \{B_1, \cdots, B_{p(n)}\}$ com $f \in A(n, \sigma_{p(n)})$. Se $g, h \in A(n, \sigma_{p(n)})$, para cada $x \in K$, temos que $x \in K_{n_i}$ para algum $1 \leq i \leq p(n)$ e portanto $g(x), h(x) \in B_i$ e disto segue que $d_M(g(x), h(x)) < \epsilon$. Logo $d_{C(K,M)}(g, h) < \epsilon$ e $\mathrm{diam}(A(n, \sigma_{p(n)})) < \epsilon$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Corolário 5.3.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, então $C(\overline{\Omega}) =: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é separável.*

Para mostrar a separabilidade de espaços $L^p(\Omega)$ vamos utilizar a seguinte versão elementar do Lema de Urysohn.

Lemma 5.3.5. *Seja (X,d) um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X,[0,1])$ tal que $\mathcal{X}_{_K} \leq f \leq \mathcal{X}_{_U}$.*

Prova: Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x,U^c)}{d(x,U^c)+d(x,K)}.$$

□

5.3.2. Separabilidade dos Espaços $\mathbf{L^p(\Omega)}$, $\mathbf{1 \leq p < \infty}$

Proposição 5.3.6. *Se $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{_{E_j}}$ ($\mu(E_j) < \infty$, $1 \leq j \leq n$, se $1 \leq p < \infty$) é denso em $L^p(\Omega)$.*

Prova: Claramente tais funções estão em $L^p(\Omega)$. Se $f \in L^p(\Omega)$, do Teorema 5.1.1 (Análise I), existe uma seqüência de funções simples $f_n \to f$ quase sempre (uniformemente em conjuntos onde f é limitada) em Ω com $|f_n| \leq |f|$. Então o caso $p = \infty$ está demonstrado. Para $1 \leq p < \infty$, $f_n \in L^p$ e $|f_n - f|^p \leq 2^p|f|^p \in L^1(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, $\|f_n - f\|_p \to 0$. Além disso, se $f_n = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{_{E_j}}$ onde os E_j são disjuntos e os a_j são não nulos, devemos ter $\mu(E_j) < \infty$ pois $\sum_{j=1}^N |a_j|^p \mu(E_j) = \int |f_n|^p d\mu < \infty$. □

Para provar que os espaços $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$ são separáveis vamos utilizar o Lemma 5.3.5.

Vimos em Análise I (Teorema 5.6.1) que, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é Lebesgue Mensurável, então

$$|\Omega| = \inf\{\,|U| : U \supset \Omega;\ U \text{ aberto}\,\} = \sup\{\,|K| : K \subset \Omega;\ K \text{ compacto}\,\}.$$

Isto é, a medida de Lebesgue é regular pelo interior e pelo exterior. Isto é essencial para obtermos a aproximação de uma função $L^p(\Omega)$ por funções contínuas, como veremos a seguir. Denote por $C_c(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ com supporte compacto.

Proposição 5.3.7. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Prova: Da Proposição 5.3.6, as funções simples são densas em $L^p(\Omega)$. Basta mostrar que para cada conjunto Lebesgue mensurável E com $|E| < \infty$, $\mathcal{X}_{_E}$ pode ser aproximada, em $L^p(\Omega)$, por funções contínuas com suporte compacto em Ω. Dado $\epsilon > 0$, exite um conjunto compacto $K \subset E$ e um conjunto aberto $\Omega \supset U' \supset E$ tais que $|U' \backslash K| < \epsilon^p$. Usando o Lema 5.3.5 para um aberto U tal que $K \subset U \subset U'$ e $\overline{U}$ compacto, podemos escolher $f \in C_c(\Omega)$ tal que $\mathcal{X}_{_K} \leq f \leq \mathcal{X}_{_U} \leq \mathcal{X}_{_{U'}}$. Então

$$\|\mathcal{X}_{_E} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq |U' \backslash K|^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

□

Teorema 5.3.8. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, então $L^p(\Omega)$ é separável $1 \leq p < \infty$*

Prova: Para $m = 1, 2, 3, \ldots$ seja

$$\overline{\Omega}_m = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq m^{-1} \text{ e } |x| \leq m\}.$$

Portanto $\overline{\Omega}_m$ é um subconjunto compacto de Ω. Seja P_m um subconjunto enumerável e denso de $C(\overline{\Omega_m})$. As funções de P_m podem ser vistas como funções de $L^p(\Omega)$ estendendo-as por zero em $\Omega \backslash \overline{\Omega_m}$. Além disso, $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ é contável. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $\epsilon > 0$ existe $\phi \in C_c(\Omega)$ tal que $\|u - \phi\|_p < \epsilon/2$. Se $\frac{1}{m} < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\phi), \partial\Omega)$ e $\mathrm{supp}(\phi) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq m\}$, existe $f \in P_m$ tal que $\|\phi - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}|\Omega_m|^{-\frac{1}{p}}$. Segue que

$$\|\phi - f\|_p \leq \|\phi - f\|_\infty \, |\Omega_m|^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto $\|u - f\|_p < \epsilon$. Portanto $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$ é denso em $L^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ é separável. □

Corolário 5.3.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega fu = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Então $f = 0$ quase sempre em Ω.

Décima Quinta Aula (100 minutos) ↑

5.4 Particularidades dos Espaços $\mathbf{L^1(\Omega)}$ e $\mathbf{L^\infty(\Omega)}$

5.4.1. Particularidades do Espaço $\mathbf{L^1(\Omega)}$

O Dual de $\mathbf{L^1(\Omega)}$

Proposição 5.4.1. *Seja $T : L^\infty(\Omega) \to (L^1(\Omega))^*$ a transformação linear definida por*

$$\langle Tu, f\rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^1(\Omega),\ \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

Então, T é uma isometria sobre sua imagem.

Prova: Seja $u \in L^\infty(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

e portanto $\|Tu\|_{(L^1(\Omega))^*} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Vamos agora mostrar que também vale a desigualdade $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|T(u)\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Para este fim, tomamos uma constante $C > \|Tu\|_{(L^1(\Omega))^*}$ e consideramos o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : |u(x)| > C\}.$$

O resultado estará demonstrado se verificarmos que A tem medida nula. Se a medida de A é não nula, considerando $\tilde{A}$ um subconjunto mensurável de A com $0 < |\tilde{A}| < \infty$, a função $f = \text{sinal}(u)\mathcal{X}_{\tilde{A}} \in L^1(\Omega)$. Segue que $\|f\|_{L_1(\Omega)} = |\tilde{A}|$ e

$$C\,|\tilde{A}| \leq \int_{\tilde{A}} |u| = \langle Tu, f\rangle \leq \|Tu\|_{(L^1(\Omega))^*}\ |\tilde{A}|,$$

e $C \leq \|Tu\|_{(L^1(\Omega))^*}$, o que é absurdo. Isto conclui a demonstração. □

A seguir mostraremos que a transformação T definida na proposição anterior é sobrejetora. Isto nos permitirá identificar $(L^1(\Omega))^*$ e $L^\infty(\Omega)$ o que será adotado sistematicamente.

Proposição 5.4.2. *A transformação $T : L^\infty(\Omega) \to (L^1(\Omega))^*$ definida na Proposição 5.4.1 é sobrejetora.*

Prova: Seja $\phi \in (L^1(\Omega))^*$. Queremos mostrar que existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $Tu = \phi$. Se $w \in L^2(\Omega)$ satisfaz, $\forall K \subset\subset \Omega$ existe $\epsilon_K > 0$ tal que $w(x) \geq \epsilon_K > 0$ para quase todo $x \in K$. A aplicação

$$L^2(\Omega) \ni f \mapsto \langle \phi, wf \rangle \in \mathbb{R}$$

é um funcional linear contínuo. Logo, do Teorema 5.2.10, existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi, wf \rangle = \int_\Omega vf, \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{5.9}$$

Se $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$, (recorde que $w(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$), então u é mensurável.

Mostremos que $u \in L^\infty(\Omega)$. De (5.9) temos que

$$\left| \int_\Omega vf \right| \leq \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*} \|wf\|_{L^1(\Omega)} \ \forall \ \ f \in L^2(\Omega). \tag{5.10}$$

Seja $C > \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Mostremos que o conjunto

$$A = \{x \in \Omega : |u(x)| > C\}$$

tem medida nula, assim resultará que $u \in L^\infty(\Omega)$ e que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Se a medida de A é não nula existe $\tilde{A} \subset A$ mensurável tal que $0 < |\tilde{A}| < \infty$. Substituindo em (5.10) a função $f(x) = \text{sinal}(u)\mathcal{X}_{\tilde{A}}$ resulta

$$C \int_{\tilde{A}} w \leq \int_{\tilde{A}} |u| w \leq \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*} \int_{\tilde{A}} w,$$

o que é absurdo pois implicaria $C \leq \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}$.

Com isto, construímos $u \in L^\infty(\Omega)$ com $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi\|_{(L^1(\Omega))^*}$, tal que

$$\langle \phi, wf \rangle = \int_\Omega uwf, \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{5.11}$$

De onde resulta

$$\langle \phi, g \rangle = \int_\Omega ug, \quad \forall g \in C_c(\Omega).$$

De fato, se $g \in C_c(\Omega)$, então $f = \frac{g}{w} \in L^2(\Omega)$ (já que $w \geq \epsilon_K > 0$ sobre $K = \text{supp}(g)$) e substituímos f em (5.11). Como $C_c(\Omega)$ é denso em $L^1(\Omega)$ deduzimos que

$$\langle \phi, g \rangle = \int_\Omega ug, \quad \forall g \in L^1(\Omega).$$

$\square$

$\mathbf{L^1(\Omega)}$ não é reflexivo

Suponha que $0 \in \Omega$ e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \Omega \cap B_{\frac{1}{n}}(0)$ tem medida positiva. Se $f_n = \alpha_n \mathcal{X}_{B_n}$ e $\alpha_n = |B_n|^{-1}$, então $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Se $L^1(\Omega)$ fosse reflexivo existiriam subseqüência $\{f_{n_k}\}$ e $f \in L^1(\Omega)$ tais que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ na topologia $\sigma(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$. Assim,

$$\int_\Omega f_{n_k}\varphi \to \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega). \tag{5.12}$$

Quando $\varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$ temos que $\displaystyle\int_\Omega f_{n_k}\varphi = 0$ para k suficientemente grande. Segue que

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\}).$$

Logo $f = 0$ quase sempre em $\Omega\backslash\{0\}$. Mas se tomamos $\varphi \equiv 1$ em (5.12) temos que $\displaystyle\int_\Omega f = 1$ o que é absurdo.

Exercício 5.4.1. *Mostre que a menos de translação do domínio Ω, sempre podemos assumir que $B_{\frac{1}{n}} \cap \Omega \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

5.4.2. Particularidades do Espaço $\mathbf{L^\infty(\Omega)}$

Vimos que $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ e portanto, do Corolário 4.1.8, $L^\infty(\Omega)$ não é reflexivo. Além disso temos que:

i) Do Teorema de Banach-Alaoglu (Teorema 3.6.8), $B_{L^\infty(\Omega)}$ é compacta na topologia $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$.

ii) Como $L^1(\Omega)$ é separável, se $\{f_n\}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$ podemos extrair uma subseqüência que converge em $L^\infty(\Omega)$ na topologia $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ (Veja Corolário 4.2.6).

iii) O Dual de $L^\infty(\Omega)$ contém propriamente $L^1(\Omega)$; ou seja, existem funcionais lineares e contínuos $\varphi : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{K}$ que não são do tipo

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^\infty(\Omega) \text{ com } u \in L^1(\Omega).$$

Vamos construir um exemplo concreto. Suponha que $0 \in \Omega$ e seja $\varphi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_0(f) = f(0), \quad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{5.13}$$

Temos que φ_0 é um funcional linear contínuo de $C_c(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ em $\mathbb{R}$. Do Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.3.9) φ_0 se estende a funcional $\varphi \in (L^\infty(\Omega))^*$.

Mostremos que não existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

De fato, se tal função existisse teríamos

$$\int_\Omega uf = 0, \quad \forall f \in C_c(\Omega \backslash \{0\})$$

e portanto $u = 0$ quase sempre em Ω e $\langle \varphi, f \rangle = 0, \forall f \in L^\infty(\Omega)$, contradizendo (5.13). $\square$

$\mathbf{L^\infty(\Omega)}$ não é separável

Lema 5.4.3. *Seja X um espaço de Banach. Suponhamos que existe uma família $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que*

i) Para todo $i \in I$, $\mathcal{O}_i$ é aberto não vazio de X .

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

iii) I não é enumerável.

Então X não é separável.

Prova: Seja $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável de X, como I é não enumerável, existe $i_0 \in I$ tal que $O_i \cap \{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Segue que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso em X. Isto mostra que X não é separável. $\square$

Proposição 5.4.4. $L^\infty(\Omega)$ *não é separável.*

Prova: Para $a \in \Omega$ fixamos $r_a < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ e $u_a = \mathcal{X}_{B_{r_a}}(a)$. Seja

$$\mathcal{O}_a = \left\{ f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2} \right\}.$$

É fácil ver que $(\mathcal{O}_a)_{a \in \Omega}$ satisfaz as condições i), ii) e iii) do Lema 5.4.3. Segue que $L^\infty(\Omega)$ não é separável. $\square$

A matéria para a primeira prova termina aqui

5.5 Primeira Prova

1.ª Prova de SMA 5717 - Análise II

Professor: Alexandre Nolasco Carvalho

Nome:__________________________________

27.05.2005

Questões	Notas	Questões	Notas
1.ª		10.ª	
2.ª		11.ª	
3.ª		12.ª	
4.ª		13.ª	
5.ª		14.ª	
6.ª		15.ª	
7.ª		16.ª	
8.ª		17.ª	
9.ª		18.ª	
Total		Total	

1.ª Questão Se X for um espaço de Banach com dimensão infinita, mostre que existirá um funcional linear não contínuo $T : X \to \mathbb{K}$.

2.ª Questão Sejam X um espaço de Banach e $A \subset X$ um conjunto compacto. O que deve ocorrer se $A^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$?

3.ª Questão Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Diga o que sabe sobre os espaços $L^p(\Omega)$. (Diga quando são reflexivos, separáveis, uniformemente convexos, caracterize o dual, enuncie desigualdades importantes.) Mostre que $L^\infty(\Omega)$ não é reflexivo nem separável.

4.ª Questão Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_i : X \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$, duas normas tais que X é um espaço de Banach com qualquer dessas normas. Suponha que exista $c > 0$ tal que $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$ e mostre que, se com uma das normas X for reflexivo (separável), então X será reflexivo (separável) com ambas. Encontre um espaço vetorial X e duas normas em X tais que com uma delas o espaço é reflexivo e com a outra não é.
Sugestão: i) mostre que ℓ_1 e ℓ^∞ têm bases com mesma cardinalidade, ii) construa um isomorfismo entre esses espaços e iii) defina uma norma em ℓ_1 com a qual ele não é separável.

5.ª Questão Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado. Mostre que $X_A = D(A)$ com a norma $\|x\|_{D(A)} =$

$\|x\|+\|Ax\|$ é um espaço de Banach. Além disso, mostre que se X for reflexivo (separável), então X_A será reflexivo (separável).

$\boxed{\textbf{6.}^a\ \textbf{Questão}}$ Sejam X um espaço de Banach e $\{u_n\}$ uma seqüência limitada em X. Mostre que, se existir $u \in X$ com $f(u_n) \to f(u)$ para todo f em um subconjunto denso de X^*, então $u_n \overset{\sigma(X,X^*)}{\longrightarrow} u$.

$\boxed{\textbf{7.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja X um espaço de Banach. Mostre que uma seqüência $\{u_n\}$ convergirá fortemente para $u \in X$ se, e somente se, $f(u_n) \to f(u)$ uniformemente para f em um subconjunto denso da bola unitária de X^*.

$\boxed{\textbf{8.}^a\ \textbf{Questão}}$ Uma função $u : (a,b) \to X$ será fracamente contínua (diferenciável), se $f \circ u : (a,b) \to \mathbb{K}$ for contínua (diferenciável), para cada $f \in X^*$. Se a derivada de $f(u(t))$ for da forma $f(v(t))$ para alguma função $v : (a,b) \to X$, então v será chamada derivada fraca de u. Mostre que, se u for fracamente diferenciável em (a,b) com derivada fraca identicamente nula, então $u(t)$ será constante.

$\boxed{\textbf{9.}^a\ \textbf{Questão}}$ Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear fechado com $\overline{D(T)} = X$. Mostre que, se T for bijetora, então $T^{-1} : Y \to X$ e $(T^*)^{-1}$ serão operadores lineares contínuos com $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

$\boxed{\textbf{10.}^a\ \textbf{Questão}}$ Para $1 < p < \infty$, mostre que ℓ_p contém seqüências que convergem fracamente, mas não convergem fortemente. Mostre, também, que uma seqüência $\{u_n\}$ em ℓ_1 convergirá fracamente para um $u \in \ell_1$ se, e somente se, $\{u_n\}$ convergir fortemente para $u \in \ell_1$. Use isto para mostrar a existência de seqüência limitada de ℓ_1 que não possue subseqüência fracamente convergente.

$\boxed{\textbf{11.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Prove que X^* com a topologia fraca* é de primeira categoria em X^* com a topologia da norma.

$\boxed{\textbf{12.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja $J : X \to X^{**}$ a aplicação canônica que identifica X com um subespaço de X^{**}. Mostre que $J : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ é um homeomorfismo sobre um subespaço denso de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$.

$\boxed{\textbf{13.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja $X = \{(x_1, \cdots, x_N) :\ x_i \in \mathbb{C}\}$ com a norma dada por $\|(x_1, \cdots, x_N)\| = \sup_{1\le i\le N} |x_i|$ para todo $(x_1, \cdots, x_N) \in X$. Mostre que X não é uniformemente convexo, mas X é reflexivo.

$\boxed{\textbf{14.}^a\ \textbf{Questão}}$ Descreva os hiperplanos em $X = \mathbb{R}^N$. Enuncie as formas geométricas do Teorema de Hahn Banach para este espaço e exiba conjuntos que podem ser separados por hiperplanos no sentido fraco, mas não podem ser separados estritamente.

$\boxed{\textbf{15.}^a\ \textbf{Questão}}$ Sejam X um espaço vetorial normado e A, B subconjuntos de X. Mostre ou exiba um contra-exemplo:

i) Se A for aberto, então $A + B$ será aberto,

ii) Se A e B forem fechados, então $A + B$ será fechado, e

ii) Se A for compacto e B for fechado, então $A + B$ será fechado.

$\boxed{\textbf{16.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Se $u \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Reciprocamente, se $u \in L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty)$, e existir uma constante $K > 0$ tal que que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$, $\forall p \in [1, \infty)$, então $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$.

$\boxed{\textbf{17.}^a\ \textbf{Questão}}$ Mostre que, se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ for tal que

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega),$$

então $f = 0$ quase sempre em Ω.

$\boxed{\textbf{18.}^a\ \textbf{Questão}}$ Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um conjunto mensurável com medida positiva. Mostre que existe $x \in \Omega$ tal que $|B_{\frac{1}{n}}(x) \cap \Omega| \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{1.^a \text{ Prova de SMA 5717 - Análise II}}$

Questões	Notas
1.^{a}	
2.^{a}	
3.^{a}	
4.^{a}	
5.^{a}	
6.^{a}	
7.^{a}	
8.^{a}	
Total	

Professor: Alexandre Nolasco Carvalho

Nome:____

26.10.2007

1.^{a} **Questão** Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita.

- Use o Lema de Baire para mostrar que toda base de Hamel de X é não-enumerável.
- Se X é separável, mostre que X tem um subespaço vetorial E com base de Hamel $\mathcal{E}$ enumerável que é denso em X.
- Seja X separável, E um subespaço de X com base de Hamel enumerável $\mathcal{E}$ e $\mathcal{X}$ é uma base de Hamel de X que contém $\mathcal{E}$. Mostre que todo funcional linear não nulo f cujo núcleo contém $\mathcal{E}$ é descontínuo.
- Mostre que todo subconjunto compacto de X tem interior vazio.
- Sejam $\|\cdot\|_i : X \to [0,\infty)$, $i = 1,2$, duas normas em X que o tornam um espaço de Banach e satisfazem $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para algum $c > 0$ e para todo $x \in X$. Mostre que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.
- Defina uma norma em $\ell_2(\mathbb{C})$ que não é equivalente à norma usual.

3.^{a} **Questão** Seja X um espaço de Banach e $T : D(T) \subset X \to X$ um operador fechado.

- Mostre que o núcleo $N(T)$ de T é fechado.
- Se X é reflexivo, mostre que $Y = D(T)$ com $\|y\|_Y = \|y\|_X + \|Ay\|_X$ é reflexivo.

- Se T é bijetora, Y é como no ítem anterior e a inclusão $I : Y \to X$ ($Iy = y$, $\forall\, y \in Y$) é compacta, mostre que $T^{-1} \in L(X)$ e que T^{-1} é compacta.

4.^{a} Questão Sejam X e Y espaços de Banach e $A \in L(X, Y)$ uma bijeção.

- Mostre que $A : (X, \sigma(X, X^*) \to (Y, \sigma(Y, Y^*)$ é contínua.
- Mostre que X é reflexivo se, e somente se, Y é reflexivo.

5.^{a} Questão Seja H um espaço de Hilbert $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear densamente definido e $A^* : D(A^*) \subset H \to H$ o operador adjunto de A. Diremos que A é simétrico se $G(A^*) \supset G(A)$ e auto-adjunto se $G(A^*) = G(A)$.

- Mostre que A^* é uma extensão fechada de A.
- Mostre que se $A : D(A) \subset H \to H$ é auto-adjunto e é uma bijeção, então $A^{-1} \in L(H)$ e é auto-adjunto.
- Mostre que se $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico e $D(A) = H$ ou $\mathrm{Im}(A) = H$, então A é auto-adjunto.
- Se $H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $D(A) = \{f \in H : g(t) = t\, f(t) \in H\}$, $A : D(A) \subset H \to X$ e $(Af)(t) = t\, f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, mostre que A é um operador densamente definito e auto-adjunto.

6.^{a} Questão Para $1 \leq p \leq \infty$, considere o espaço $\ell_p(\mathbb{C})$

- Mostre o teorema de Representação de Riesz para estes espaços.
- Mostre que $\ell_\infty(\mathbb{C})$ não é separável.
- Para $1 < p < \infty$, mostre que $\ell_p(\mathbb{C})$ contém seqüências que convergem fracamente, mas não convergem fortemente.
- Mostre que uma seqüência $\{u_n\}$ em ℓ_1 converge fracamente se, e somente se, converge fortemente.
- Mostre que existe seqüência limitada de ℓ_1 que não possui subseqüência fracamente convergente.

$\boxed{\textbf{7.}^a\ \textbf{Questão}}$ Descreva os hiperplanos em $X = \mathbb{R}^N$. Enuncie as formas geométricas do Teorema de Hahn Banach para este espaço e exiba conjuntos convexos que podem ser separados por hiperplanos no sentido fraco, mas não podem ser separados estritamente.

$\boxed{\textbf{8.}^a\ \textbf{Questão}}$ Seja Ω um espaço métrico se μ é a medida de Borel finita e regular em Ω, mostre que $L^p(\Omega)$ é separável.

A matéria para a segunda prova começa aqui

5.6 Convolução e Regularização

5.6.1. Definição e Propriedades Elementares

Teorema 5.6.1. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \to f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$. Definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\,.$$

Então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}\ \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: A conclusão é óbvia se $p = \infty$. Suponha que $p = 1$ e seja

$$F(x,y) = f(x-y)g(y).$$

Para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \cdot |g(y)| < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,y)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\ \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < \infty\,.$$

Aplicando o Teorema de Tonelly temos que $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ e do Teorema de Fubini

$$\int |F(x,y)|dy < \infty \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dy \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\ \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\,.$$

Esta é exatamente a conclusão pretendida.

Suponha agora que $1 < p < \infty$. Segue do que acabamos de demonstrar que, para quase todo, $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, a função $y \mapsto |f(x-y)|\ |g(y)|^p$ é integrável sobre $\mathbb{R}^N$; isto é,

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)\,.$$

Como $|f(x-y)|^{1/p^*} \in L_y^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, deduzimos da Desigualdade de Hölder que

$$|f(x-y)|\,|g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\,|f(x-y)|^{1/p^*} \in L_y^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\right)^{1/p} \|f\|_{L_y^1(\mathbb{R}^N)}^{1/p^*} ;$$

isto é,

$$|(f*g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p/p^*}.$$

Aplicando o resultado no caso $p=1$ para $|f| * |g|^p$, temos que

$$f*g \in L^p(\mathbb{R}^N) \;\; \text{e} \;\; \|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{p/p^*}$$

isto é,

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

□

Notação: Dada f definimos $\check{f}$ por $\check{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 5.6.2. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $h \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f*g)h = \int_{\mathbb{R}^N} g(\check{f}*h)\,.$$

Prova: A função $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ porque

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)|dy\right) dx < \infty$$

graças ao teorema anterior e a Desigualdade Hölder. Conseqüentemente

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (f*g)(x)h(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)(\check{f}*h)(y)dy.\end{aligned}$$

□

Décima Sexta Aula (100 minutos) ↑

Décima Sétima Aula (100 minutos) $\downarrow$

5.6.2. Suporte da Convolução

Proposição 5.6.3 (Definição de Suporte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e f uma função definida em Ω com valores em $\mathbb{R}$. Considere a família de todos os abertos $(w_i)_{i\in I}$, $w_i \subset \Omega$ tais que, $f = 0$ quase sempre em w_i, para todo $i \in I$. Se $w = \bigcup\limits_{i\in I} w_i$, então w é aberto e $f = 0$ quase sempre em w. Diremos que* $\operatorname{supp}(f) := \Omega \backslash w$ *é o suporte de f.*

Prova: Não é evidente que $f = 0$ quase sempre em w já que I é não enumerável. Contudo, a demonstração pode ser reduzida ao caso enumerável da seguinte forma:

$$w = \bigcup_n K_n, \quad K_n = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, w\Omega^c) \geq \frac{1}{n} \text{ e } |x| \leq n \right\}$$

então $K_n \subset \bigcup\limits_{i\in I_n} w_i$, I_n-finito (já que K_n é compacto). Logo $w = \bigcup\limits_{i\in J} w_i$ onde $J = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ é contável. Desta forma se $f = 0$ em $w_j \backslash E_j$, $|E_j| = 0$, então $f = 0$ em $w \backslash \bigcup\limits_{j\in J} E_j$ e $\left| \bigcup\limits_{j\in J} E_j \right| = 0$. Segue que $f = 0$ quase sempre em w. $\square$

Observação 4.

a) *Se $f = g$ quase sempre em Ω então* $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(g)$, *logo podemos falar de suporte de funções de $L^p(\Omega)$.*

b) *Esta definição coincide com a usual se f é contínua.*

Proposição 5.6.4. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$$

Prova: Seja $x \in \mathbb{R}^N$ fixo tal que $y \to f(x-y)g(y)$ seja integrável. Temos então

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{(x-\operatorname{supp}(f))\cap\operatorname{supp}(g)} f(x-y)g(y)dy$$

Se $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$ então $(x - \operatorname{supp}(f)) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$ e $(f*g)(x) = 0$. Portanto

$$(f * g)(x) = 0, \quad \text{quase sempre em } (\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))^c$$

e em particular

$$(f * g)(x) = 0, \quad \text{quase sempre sobre } (\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g))^{\text{co}}$$

conseqüentemente

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

$\square$

Observação 5. *Se f e g têm suporte compacto então $f * g$ tem suporte compacto. Em geral, se apenas uma das funções tem suporte compacto então $f * g$ não tem suporte compacto.*

Exercício 5.6.1. *Encontre conjuntos fechados A e B em $\mathbb{R}^N$ tais que $A + B$ não é fechado. Mostre que se A é compacto e B é fechado então $A + B$ é fechado mas não precisa ser compacto. Mostre que se A e B são compactos então $A + B$ é compacto.*

Proposição 5.6.5. *Seja $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Então $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$.*

Prova: Note que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \to f(x - y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^N$ e portanto $(f * g)(x)$ faz sentido para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Seja $x_n \to x$ e faça

$$\begin{aligned} F_n(y) &= f(x_n - y)g(y) \\ F(y) &= f(x - y)g(y) \end{aligned}$$

de forma que $F_n \to F$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, seja K um compacto fixo tal que $(x_n - \operatorname{supp}\ (f)) \subset K$ para todo n. Então $f(x_n - y) = 0$ sempre que $y \notin K$ e portanto $|F_n(y)| \leq \sup\limits_{x \in K} |f(x)| \cdot X_K(y) \cdot g(y) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$(f * g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F_n(y)dy \to \int_{\mathbb{R}^N} F(y)dy = (f * g)(x).$$

$\square$

Notação:

$C^k(\Omega) :=$ conjunto das funções k vezes continuamente diferenciável.

$C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$

$C^k_c(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C^\infty_c(\Omega) := D(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \bigcap\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$.

Proposição 5.6.6. *Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (k inteiro). Então*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad e \quad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \ |\alpha| \leq k.$$

Em particular se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Basta provar o caso $k = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}^N$, mostraremos que $f * g$ é diferenciável em x e que

$$\nabla(f * g) = (\nabla f * g).$$

Se $h \in \mathbb{R}^N$, $|h| < 1$, então

$$\begin{aligned} |f(x+h-y) - &f(x-y) - h\,\nabla f(x-y)| \\ &= \left| \int_0^1 h[\nabla f(x+sh-y) - \nabla f(x-y)]ds \right| \\ &\leq |h|\varepsilon(|h|) \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde $\varepsilon(|h|) \to 0$ quando $h \to 0$ pois ∇f é uniformemente contínuo em $\mathbb{R}^N$. Se K um compacto tal que $x + B_1(0) - \text{supp}(f) \subset K$, então $y \notin K$ implica que $x + h - y \notin \text{supp}(f)$, $\forall h \in B_1(0)$. Logo

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y) = 0, \quad \forall y \notin K \text{ e } \forall h \in B_1(0). \tag{5.15}$$

Utilizando (5.14) e (5.15) obtemos

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - \nabla f(x-y)\cdot h| \leq |h|\varepsilon(|h|)\,\mathcal{X}_K(y), \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall h \in B_1(0).$$

Conseqüentemente

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x) - h(\nabla f * g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|) \int_K |g(y)|dy$$

de onde resulta que $f * g$ é diferenciável em x e que $\nabla(f * g)(x) = (\nabla f * g)(x)$. A continuidade de $\nabla f * g$ segue da proposição anterior. □

Observação 6. *Fique atento para o significado da convolução $\nabla f * g$ já que $\nabla f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Isto requer a interpretação do produto de convolução de uma função a valores vetoriais coordenada a coordenada.*

5.6.3. Seqüências Regularizantes

Definição 5.6.7. *Chamamos seqüência regularizante a toda seqüência* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *de funções tais que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \mathrm{supp}(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n}), \qquad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Exemplo 5.6.1. *A construção de seqüências regularizantes é um processo simples que passamos a descrever. Fixemos* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, supp$(\rho) \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e* $\|\rho\|_{L^1(\Omega)} > 0$ *e consideremos* $\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx)$, $C = \|\rho\|^{-1}_{L^1(\Omega)}$.

A obtenção de uma função $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com as propriedades requeridas no Example 5.6.1 é feita no exercício a seguir.

Exercício 5.6.2. *Seja* $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mostre que $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, supp$(f) \subset B_1(0)$ *e que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}^N \rho(x)dx > 0.$

Proposição 5.6.8. *Seja* $f \in C(\mathbb{R}^N)$*; então* $\rho_n * f \to f$ *uniformemente em compactos de* $\mathbb{R}^N$.

Prova: Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$ e $y \in B_\delta(0)$.
Se $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $n\delta > 1$, $\forall n \geq n_0$, temos que:

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} [f(x-y) - f(x)]\rho_n(y)dy\right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)dy = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \text{ and } \forall x \in K. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.6.9. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. *Então* $\rho_n * f \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, seja $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Segue da Proposição 5.6.8 que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Por outro lado

$$\operatorname{supp}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0) + \operatorname{supp}(f_1)} \subset K, \quad \text{para algum } K \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ fixo.}$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Então

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f]$$

e, usando o Teorema 5.6.1, temos que

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p} \leq 2\|f - f_1\|_{L^p} + \|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Isto mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$

$\square$

Corolário 5.6.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Prova: Seja $f \in L^p(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e $f_1 \in C_c(\Omega)$ tal que

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se

$$\overline{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Como $\overline{f}_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$, do Teorema 5.6.9, segue que $\|\rho_n * \overline{f}_1 - \overline{f}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$.

Por outro lado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{supp}(\rho_n * \overline{f}_1) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0) + \operatorname{supp}(f_1)} \subset \Omega, \text{ para } n \geq n_0$$

onde utilizamos a Proposição 5.6.4. Seja $u_n = (\rho_n * \overline{f}_1)|_\Omega$. Disto e da Proposição 5.6.6 segue que, para $n \geq n_0$, $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} = \|\rho_n * \overline{f}_1 - \overline{f}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Portanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ tal que $\|u_{n_1} - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Segue que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. $\square$

Décima Sétima Aula (100 minutos) $\uparrow$

5.7 Critério de Compacidade Forte em $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\Omega})$

Nesta seção, provaremos o Teorema de Fréchet-Kolmogorov que caracteriza os subconjuntos compactos dos espaços $L^p(\Omega)$ na topologia forte. Recorde que os compactos na topologia forte de espaços de Banach com dimensão infinita têm, necessariamente, interior vazio.

Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definimos $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$,

Teorema 5.7.1 (Fréchet-Kolmogorov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\omega \subset\subset \Omega$ e $1 \le p < \infty$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$ e que*

$$\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega) \textit{ tal que} \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon,\ \forall h \in \mathbb{R}^N \textit{ com } |h| < \delta \textit{ e } \forall f \in \mathcal{F}. \end{array} \tag{5.16}$$

Então $\mathcal{F}\,|_{\,\omega}$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$.

Prova: Sempre podemos supor que Ω é limitado. Para $f \in \mathcal{F}$ fazemos

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Seja $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f} : f \in \mathcal{F}\}$. Então $\overline{\mathcal{F}}$ é limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Prosseguimos em 3 etapas:

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ como em (5.16). Então

a) $\boxed{\|\rho_n * \overline{f} - \overline{f}\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}} \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ com } n > \tfrac{1}{\delta}.}$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)| \rho_n(y)\, dy \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

e consequentemente

$$|(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \le \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y) dy.$$

Portanto

$$\int_w |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p\, dx \leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)dy \int_w |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p\, dx < \varepsilon^p$$

para todo $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ com $n > \frac{1}{\delta}$.

$\boxed{\textbf{b)}\text{ Para cada } n > \frac{1}{\delta},\ \mathcal{H} = (\rho_n * \overline{\mathcal{F}})|_\omega \text{ é compacto em } C(\bar{\omega}) \text{ e em } L^p(\omega).}$

Vamos mostrar que $\mathcal{H} = (\rho_n * \overline{\mathcal{F}})|_\omega$ verifica, para cada $n > \frac{1}{\delta}$, as hipóteses do Teorema de Arzelá-Ascoli. De fato, temos que

$$\|\rho_n * \overline{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\overline{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_n, \quad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}.$$

Por outro lado, temos que para todo $x_1\,,\, x_2 \in \mathbb{R}^N$ e $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$

$$|(\rho_n * \overline{f})(x_1) - (\rho_n * \overline{f})(x_2)| \leq |x_1 - x_2|\ \|\nabla \rho_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\overline{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq C_n |x_1 - x_2|.$$

Resulta que $\mathcal{H}$ é relativamente compacto em $C(\bar{\omega})$ e portanto em $L^p(\omega)$.

c) $\boxed{\mathcal{F}|_\omega \text{ é relativamente compacto em } L^p(\omega)}$

Da parte **a**), podemos fixar $n > \frac{1}{\delta}$ de forma que

$$\|\rho_n * \overline{f} - \overline{f}\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Da parte **b**), $\mathcal{H}$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$ e portanto podemos recobrir $\mathcal{H}$ por um número finito de bolas de raio $\frac{\varepsilon}{2}$ (de $L^p(\omega)$). As bolas correspondentes de raio ε cobrem $\overline{\mathcal{F}}\,|_\omega$. Consequentemente $\mathcal{F}|_\omega$ é totalmente limitado em $L^p(\omega)$ e consequentemente é relativamente compacto em $L^p(\omega)$. $\square$

Corolário 5.7.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\mathcal{F}$ um subconjunto limitado de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Suponha que*

i) $\begin{cases} \textit{Dados } \varepsilon > 0 \textit{ e } \omega \subset\subset \Omega, \textit{ existe } 0 < \delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega) \textit{ tal que} \\ \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon,\ \forall h \in \mathbb{R}^N,\ |h| < \delta \end{cases}$

ii) *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} < \varepsilon$.*

Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ fixemos $\omega \subset\subset \Omega$ tal que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\backslash\omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Do teorema anterior $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$. Portanto, podemos cobrir $\mathcal{F}\,|_\omega$ por um número finito de bolas de raio $\frac{\varepsilon}{2}$ de $L^p(\omega)$. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $g_1, \cdots, g_k \in L^p(\omega)$ tais que

$$\mathcal{F}|_\omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(g_i), \quad B_{\frac{\varepsilon}{2}}(g_i) = \{g \in L^p(\omega) : \|g - g_i\|_{L^p(\omega)} < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Denote por $\widetilde{g}_i$ a extensão de g_i a Ω por zero em $\Omega\backslash\omega$. Se $f \in \mathcal{F}$ e $1 \leq i \leq k$ é tal que $\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$, então

$$\|f - \widetilde{g}_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} + \|\widetilde{g}_i - f\|_{L^p(\Omega\backslash\omega)} = \|f - g_i\|_{L^p(\omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega\backslash\omega)}.$$

Isto mostra que $\mathcal{F} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_\varepsilon(\widetilde{g}_i)$, $B_\varepsilon(\widetilde{g}_i) \subset L^p(\Omega)$. Assim, $\mathcal{F}$ é um subconjunto totalmente limitado de $L^p(\Omega)$ e portanto é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$. $\square$

Observação:

1. A recíproca do Corolário anterior também vale.

2. Seja $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ limitado, $1 \leq p < \infty$ com a seguinte propriedade: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$, $\forall h \in B_\delta(0)$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

   Em geral não se pode concluir que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Podemos somente dizer que $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$, para cada $\omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado.

Lemma 5.7.3. *Seja $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq q < \infty$. Então*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, seja $G_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|G - G_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\|\tau_h G - G\|_{L^q} &\leq \|\tau_h G - \tau_h G_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|G_1 - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\ &< \tfrac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Por outro lado, do fato que G_1 tem suporte compacto e da continuidade uniforme de G_1, é evidente que $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0$ e portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon, \quad \forall h \in B_\delta(0).$$

O que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 5.7.4. *Seja $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ uma função fixa e $\mathcal{B}$ um subconjunto limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Se*

$$\mathcal{F} = G * \mathcal{B} := \{G * u : u \in \mathcal{B}\},$$

então $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$ para todo $\omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado.

Prova: É claro que $\mathcal{F}$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado se $f = G * u$ com $u \in \mathcal{B}$ temos

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|(\tau_h G - G) * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\tau_h G - G\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

O resultado agora segue do Lema 5.7.3. $\square$

5.8 Operadores de Nemitiskiĭ

Nesta seção consideramos os operadores chamados *Operadores de Nemitiskĭi.*

Definição 5.8.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. O* Operador de Nemitiskiĭ *f^e associado a f é o operador que a cada função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ associa a função $f^e(u) : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f^e(u)(x) = f(u(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

Gostaríamos agora de determinar condições sobre f para que f^e esteja bem definido de $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, gostaríamos de determinar se esta função é contínua.

É claro que se $f(s) = |s|^p$ para $s \in \mathbb{R}$, f^e está definida em $L^p(\Omega)$ e toma valores em $L^1(\Omega)$.

No que se segue vamos determinar a continuidade de tais operadores. Para este fim, vamos utilizar o resultado conhecido como Teorema Inverso da Convergência Dominada que provamos a seguir.

Teorema 5.8.2 (Inverso da Convergência Dominada)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência convergente em $L^p(\Omega)$ com limite f, então existem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω e

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Prova: Primeiramente consideremos o caso $p = \infty$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_k} - f\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{1}{k}$. Seja $E_k \subset \Omega$ um conjunto mensurável com $|E_k| = 0$ tal que $|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{k}$, $\forall x \in \Omega \backslash E_k$.

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)| = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^{\infty} E_k$$

e $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω. Como

$$|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{k} + \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

a função $h(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_{n_k}(x)|$ está bem definida e $h \in L^\infty(\Omega)$. Além disso, $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$. Isto conclui a demonstração.

Se $1 \leq p < \infty$, como $\{f_n\}$ é de Cauchy em $L^p(\Omega)$, podemos extrair uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ verificando $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2^k}$. Assim, se

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

temos que $\|g_n\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$ e, do Teorema da Convergência Monótona, $g_n \to g$ quase sempre em Ω e $g \in L^p(\Omega)$.

Por outro lado, se $k > \ell$, então

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_\ell}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| + \cdots + |f_{n_{\ell+1}}(x) - f_{n_\ell}(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n_{\ell-1}}(x). \end{aligned}$$

Segue que, $\{f_{n_\ell}(x)\}$ converge quase sempre em Ω. Se $\tilde{f}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_\ell}(x)$, quando este limite existir, então $|f_{n_\ell}(x) - \tilde{f}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω. Segue do Teorema da Convergência Dominada que $\|f_{n_\ell} - \widetilde{f}\|_{L^p(\Omega)} \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$ e isto implica que $f = \tilde{f}$ e prova a).

Para provar b) basta tomar $h = |f| + g$. $\square$

Teorema 5.8.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de crescimento*

$$|f(s)| \leq c(|s|^p + 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e f^e o Operador de Nemitiskiĭ associado a f. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado, então $f^e : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ é um operador (não-linear) contínuo.

Prova: Se $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ então existem subseqüência $\{u_{n_k}\}$ e função $h \in L^p(\Omega)$ tais que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Segue da continuidade de f que $f(u_{n_k}(x)) \to f(u(x))$ quase sempre em Ω e da condição de crescimento que $|f(u_{n_k}(x))| \leq c(|u_{n_k}(x)|^p + 1) \leq c(|h(x)|^p + 1)$ quase sempre em Ω.

Do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\|f^e(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^1(\Omega)} \to 0, \qquad \text{quando } k \to \infty.$$

Como cada subseqüência tem subseqüência convergente e o limite é sempre $f^e(u)$ temos que $f^e(u_n) \overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} f(u)$. □

Décima Oitava Aula (100 minutos) ↑

5.9 Exercícios

1. Mostre que $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, com a topologia da convergência uniforme, não é separável.

2. Mostre que se $f \in L^\infty(\Omega)$ então

$$\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$$

tem medida nula; isto é, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ quase sempre em Ω.

3. Mostre o Teorema 2.8 em Adams [1978]. Mostre também o Corolário 2.9.

Capítulo 6

Espaços de Hilbert

Décima Nona Aula (100 minutos) ↓

6.1 Revisão

Em Análise I, definimos os Espaços de Hilbert e provamos diversas propriedades básicas. A seguir recordamos a definição e as principais propriedades vistas.

Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto escalar é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todo $u, v \in H$.
- $\langle au + bu', v \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u', v \rangle$ para todo $u, u', v \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$.

Segue facilmente dessas propriedades que $\langle u, av + bv' \rangle = \bar{a}\langle u, v \rangle + \bar{b}\langle u, v' \rangle$ para todo $u, v, v' \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$. Vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

A função $\| \cdot \| : H \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ é uma norma.

Um espaço vetorial H juntamente com um produto interno é dito um *espaço com produto interno*. Em um espaços com produto interno vale a *identidade do paralelogramo*

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in H.$$

Se um espaço com produto interno H é completo diremos que H é um espaço de Hilbert.

Exercício 6.1.1. *$L^2(\Omega)$ munido do produto interno*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u\bar{v}$$

é um espaço de Hilbert.

Dois vetores u, v em um espaço com produto interno H são ditos ortogonais (escrevemos $u \perp v$) se $\langle u, v\rangle = 0$ e neste caso vale o Teorema de Pitágoras

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Lemma 6.1.1. *Se K é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $u_0 \in H$, existe um único $v_0 \in K$ tal que*

$$\|u_0 - v_0\| = \inf_{v\in K} \|u_0 - v\|.$$

Escrevemos $v_0 = P_K u_0$ e diremos que P_K é a projeção sobre o convexo K.

Prova: Seja $v_n \in K$ tal que

$$d_n = \|u_0 - v_n\| \to d = \inf_{v\in K} \|u_0 - v\|.$$

Mostraremos que $\{v_n\}$ é uma seqüência de Cauchy. Da identidade do paralelogramo para $a = u_0 - v_n$ e $b = u_0 - v_m$ resulta que

$$\|u_0 - \frac{v_m + v_n}{2}\|^2 + \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m)^2.$$

Como $\frac{v_m+v_n}{2} \in K$, $\|u_0 - \frac{v_m+v_n}{2}\| \geq d$. Consequentemente

$$\|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m)^2 - d^2 \text{ e } \lim_{m,n\to\infty} \|\frac{v_n - v_m}{2}\| = 0.$$

Se $v_0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ temos que $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v\in K} \|u_0 - v\|$.

Para a unicidade, suponha que $z_0 \in K$ e $\|u_0 - z_0\| = d$. Então, da Identidade do Paralelogramo para $v_0 - u_0$ e $z_0 - u_0$,

$$\begin{aligned}\|v_0 - z_0\|^2 &= 2\|v_0 - u_0\|^2 + 2\|z_0 - u_0\|^2 - \|v_0 + z_0 - 2u_0\|^2\\ &= 4d^2 - 4\|\tfrac{v_0+z_0}{2} - u_0\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Portanto $v_0 = z_0$. □

Proposição 6.1.2. *Seja H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ fechado e convexo e $u_0 \in H$, então*

$$\mathrm{Re}\langle w - P_K u_0, u_0 - P_K u_0\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K.$$

Além disso, se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ é fechado, então

$$\langle w, u_0 - P_M u_0\rangle = 0, \quad \forall w \in M$$

e neste caso P_M é linear.

Prova: Se $w \in K$ e $t \in (0,1]$, então $(1-t)P_K u_0 + tw \in K$ e

$$\|u_0 - P_K u_0\| \leq \|u_0 - (1-t)P_K u_0 - tw\| = \|u_0 - P_K u_0 - t(w - P_K u_0)\|.$$

Portanto

$$\|u_0 - P_K u_0\|^2 \leq \|u_0 - P_K u_0\|^2 - 2t\mathrm{Re}\langle w - P_K u_0, u_0 - P_K u_0\rangle + t^2\|w - P_K u_0\|^2.$$

Segue que $2\mathrm{Re}\langle w - P_K u_0, u_0 - P_K u_0\rangle \leq t\|w - P_K u_0\|^2$. Fazendo $t \to 0$ temos que $\mathrm{Re}\langle u_0 - P_K u_0, w - P_K u_0\rangle \leq 0$, para todo $w \in K$.

Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ é fechado então, para todo $\mathbb{R} \ni t \neq 0$,

$$\mathrm{Re}\langle u_0 - P_M u_0, tw - P_M u_0\rangle = t\mathrm{Re}\langle w, u_0 - P_M u_0\rangle - \mathrm{Re}\langle P_M u_0, u_0 - P_M u_0\rangle \leq 0.$$

Dividindo por $|t|$ e fazendo $t \to \pm\infty$ temos que $\mathrm{Re}\langle w, u_0 - P_M u_0\rangle = 0$ como $iw \in M$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) temos o resultado. $\square$

O resultado a seguir caracteriza $P_K u_0$.

Teorema 6.1.3. *Seja H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ fechado e convexo e $u \in K$ tal que*

$$\mathrm{Re}\langle w - u, u_0 - u\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K. \tag{6.1}$$

Então $u = P_K u_0$.

Prova: Já sabemos que $u_1 = P_K u_0$ satisfaz (6.1). Mostremos que, se $u_2 \in K$ também satisfaz (6.1), então $u_1 = u_2$. Isto segue da seguinte forma. Se u_1 e u_2 verificam (6.1), então

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle w - u_1, u_0 - u_1\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K\\ \mathrm{Re}\langle w - u_2, u_0 - u_2\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K\end{aligned}$$

Fazendo $w = u_2$ na primeira desigualdade e $w = u_1$, na segunda e somando obtemos que $\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$ e $u_1 = u_2$. $\square$

Teorema 6.1.4. *Se H é um espaço de Hilbert e $K \subset H$ é um convexo fechado então*

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Prova: Sabemos que

$$\mathrm{Re}\langle w - P_K u_1, u_1 - P_K u_1\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K \tag{6.2}$$

$$\mathrm{Re}\langle w - P_K u_2, u_2 - P_K u_2\rangle \leq 0, \quad \forall w \in K. \tag{6.3}$$

Substituindo $w = P_K u_2$ em (6.2) e $w = P_K u_1$ em (6.3) e somando temos

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\|^2 \leq \mathrm{Re}\langle P_K u_1 - P_K u_2, u_1 - u_2\rangle \leq \|u_1 - u_2\| \, \|P_K u_1 - P_K u_2\|$$

e o resultado segue. $\square$

Vimos no Example 4.3.1 que o seguinte resultado vale

Proposição 6.1.5. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.*

Se H é um espaço de Hilbert e $y \in H$ segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ define um funcional linear contínuo e que $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$. Então, a transformação $H \ni y \mapsto f_y \in H^*$ é uma isometria linear-conjugada entre H e H^*. O resultado a seguir mostra que esta isometria é sobrejetora:

Teorema 6.1.6 (Teorema de Representação de Riesz)**.** *Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$.*

Prova: Defina $T : H \to H^*$

$$H \ni f \mapsto Tf \in H^*, \quad Tf(v) = \langle v, f\rangle.$$

É claro que T é uma isometria de H em H^*. Basta mostrar que $T(H)$ é denso em H^*. Seja $Jh \in H^{**}$ ($J(H) = H^{**}$ pois H é reflexivo) tal que $Jh(Tf) = 0$, $\forall f \in H$. Logo

$$0 = Jh(Tf) = Tf(h) = \langle h, f\rangle = 0, \quad \forall f \in H$$

e tomando $f = h$ temos que $h = 0$ e portanto $Jh = 0$. $\square$

Observação 7. *Daqui por diante, identificaremos Tf e f e portanto escreveremos $\langle f, v\rangle$ em lugar de $Tf(v)$. Com isto a definição de ortogonal de um subespaço adquire o significado relacionado à ortogonalidade de vetores através do produto interno.*

Segue que, Espaços de Hilbert são reflexivos em um sentido bastante forte: Não somente H é naturalmente isomorfo a H^{**} como também é isomorfo (através de uma transformação linear-conjugada) a H^*.

Se $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ então $M^\perp := \{u \in H : u \perp v,\ \forall v \in M\}$. É fácil ver que $M^\perp$ é sempre um subespaço vetorial fechado de H. Uma transformação linear $P : H \to M$ é dita uma projeção se $P^2 = P$. Se $P \in L(H)$ é uma projeção, $M = \mathrm{Im}(P)$ e $M^\perp = \mathrm{N}(P)$ diremos que P é uma projeção ortogonal sobre M. Uma projeção P é contínua se e somente se $M = \mathrm{Im}P$ é fechado.

Teorema 6.1.7. *Seja H um espaço de Hilbert e $M \underset{\text{SEV}}{\subset} H$ fechado, então $M \oplus M^\perp = H$; isto é , cada $u \in H$ pode ser expresso unicamente como $u = w + v$ onde $w \in M$ e $v \in M^\perp$. Os vetores w e v são os únicos elementos de M e $M^\perp$ cuja distância a u é mínima; isto é, $w = P_M u$ e $v = P_{M^\perp} u$. Além disso P_M e $P_M^\perp = I - P_M$ são projeções contínuas com $\|P_M\| = \|P_{M^\perp}\|$.*

Observação 8. *Se H é um espaço de Hilbert, então H e H^* podem ser identificados, contudo isso nem sempre é interessante.*

- *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma associada $\|\cdot\| : H \to [0, \infty)$. Seja $V \subset H$ um subespaço vetorial denso em H. Suponha que V é dotado da norma $|\cdot| : V \to [0, \infty)$ que o faz um espaço de Banach reflexivo. Suponha que a inclusão de V em H é contínua; isto é,*
$$\left.\begin{array}{rl} I \ : & V \longrightarrow H \\ & v \longmapsto Iv = v \end{array}\right\}, \quad \|Iv\|_H \leq c|v|_V \quad \forall \ \ v \in V \ .$$
- *Se H e H^* são identificados sempre podemos incluir H em V^* mediante o seguinte procedimento:*
$$\textit{dado } f \in H, \textit{ a aplicação } v \in V \mapsto \langle f, v\rangle$$
é um funcional linear contínuo de V em $\mathbb{R}$ denotada por $Tf \in V^*$, logo
$$(Tf)(v) = \langle v, f\rangle, \quad \forall f \in H,\ \forall v \in V.$$

Então a transformação $T : H \to V^*$ tem as propriedades:

i) $\|Tf\|_{V^*} \le c\|f\|_H$,

ii) T *é injetora,*

iii) $T(H)$ *é denso em* V^*.

Os ítens i) e ii) são óbvios. Para provar iii) note que H *é reflexivo* $(J(H) = H^{**})$. *Assim, se* $v \in H$ *é tal que* $(Jv)(Th) = 0\ \forall h \in H$, *então* $(Jv)(Th) = (Th)(v) = \langle h, v\rangle = 0$, $\forall h \in H$ *e isto implica que* $v = 0$ *e portanto* $Jv = 0$.

Portanto, $T(H)$ *é denso em* V^*.

Com a ajuda de T *temos*

$$V \subset H = H^* \subset V^* \tag{6.4}$$

onde as inclusões canônicas são densas. Observe que, com essas identificações,

$$\langle \varphi, v\rangle_{V^*,V} = \langle v, \varphi\rangle \text{ sempre que } \varphi \in H = H^* \subset V^* \text{ e } v \in V.$$

Aqui a notação $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*,V} : V^* \times V \to \mathbb{R}$ *representa o que chamamos de produto de dualidade. Diz-se que* H *é um espaço pivô.*

Se V *é um espaço de Hilbert com produto interno* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ *e norma* $|\cdot|$, V *e* V^* *podem ser identificados e (6.4) resultaria sem sentido.*

Geralmente identificamos H *e* H^* *e não identificamos* V *e* V^*.

Exemplo 6.1.1.

$$H = \ell_2 = \{u = (u_n) : \sum u_n^2 < \infty\},\ \langle u, v\rangle = \sum u_n v_n$$

e

$$V = \{u = (u_n) : \sum n^2 u_n^2 < \infty\},\ \langle\langle u, v\rangle\rangle = \sum n^2 u_n v_n$$

6.2 Os Teoremas de Lax-Milgram e Stampachia

Definição 6.2.1. *Diremos que uma forma sesqui-linear (linear na primeira variável e linear conjungada na segunda variável)* $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ *é*

1) **contínua** *se existe C tal que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u,v \in H,$$

2) **coerciva** *se existe constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\operatorname{Re} a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 6.2.2 (Stampacchia)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma sesqui-linear contínua e coerciva. Seja $K \neq \emptyset$ um convexo fechado. Dado $\varphi \in H^*$, existe um único $u \in K$ tal que*

$$\operatorname{Re} a(v-u,u) \geq \operatorname{Re}\varphi(v-u), \quad \forall v \in K. \tag{6.5}$$

Além disso, se $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, u é caracterizado por

$$\begin{cases} u \in K \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \operatorname{Re}\varphi(u) = \min\limits_{v\in K}\left\{\dfrac{1}{2}a(v,v) - \operatorname{Re}\varphi(v)\right\}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Prova: Pelo Teorema de Representação de Riesz (Teorema 6.1.6), existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle v, f\rangle, \quad \forall v \in H.$$

Por outro lado, para cada $u \in H$, $H \ni v \mapsto a(v,u) \in \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo. Aplicando novamente o Teorema de Representação de Riesz, existe um único $Au \in H$ tal que

$$\langle v, Au\rangle = a(v,u), \quad \forall v \in H.$$

É claro que

$$\begin{aligned} &\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H, \\ &\langle u, Au\rangle \geq \alpha\|u\|^2, \quad \forall u \in H. \end{aligned}$$

Logo, o problema é encontrar $u \in K$ tal que

$$\operatorname{Re}\langle v-u, Au\rangle \geq \operatorname{Re}\langle v-u, f\rangle, \quad \forall v \in K. \tag{6.7}$$

Se $\rho > 0$ a desigualdade acima é equivalente à

$$\operatorname{Re}\langle v-u, \rho f - \rho Au + u - u\rangle \leq 0, \quad \forall v \in K; \tag{6.8}$$

ou seja, $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$.

Para $v \in K$ fazemos $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$. Sabemos que

$$\|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|$$

e

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq\ & \|(v_1 - v_2)\|^2 + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 - 2\rho\mathrm{Re}\langle v_1 - v_2, Av_1 - Av_2\rangle \\ \leq\ & \|(v_1 - v_2)\|^2(1 + \rho^2 C^2 - 2\rho\alpha)\end{aligned}$$

e fixando $\rho > 0$ tal que $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ temos que S admite um único ponto fixo u; ou seja, $u = P_K(\rho f - Au + u)$ o que implica (6.8) e portanto (6.7) e prova de (6.5) está concluída.

Suponha agora que $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$. Então $a : H \times H \to \mathbb{K}$ define um produto interno em H cuja norma associada é $a(u,u)^{1/2}$ e esta é equivalente a $\|\cdot\|$. Logo H também é um espaço de Hilbert com esta norma. Do Teorema de Representação de Riesz, existe um único $g \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(v,g), \quad \forall v \in H$$

e (6.5) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\mathrm{Re}\, a(v-u, g-u) \leq 0, \quad \forall v \in K;$$

isto é,

$u = P_K^a\, g$ (projeção sobre K no sentido do produto interno $a(\cdot,\cdot)$)

o que equivale a

$$\begin{cases} u \in K \\ \min\limits_{v\in K} a(g-v, g-v)^{1/2} = a(g-u, g-u)^{1/2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u \in K \\ \begin{aligned}\min\limits_{v\in K} a(g-v,g-v) &= \min\limits_{v\in K}\{a(g,g) + a(v,v) - 2\mathrm{Re}\, a(g,v)\} \\ &= a(g,g) + a(u,u) - 2\mathrm{Re}\, a(g,u)\end{aligned} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} u \in K \\ \min\limits_{v\in K}\left\{\dfrac{1}{2}\, a(v,v) - \underbrace{\mathrm{Re}\, a(v,g)}_{\substack{\shortparallel \\ \mathrm{Re}\,\varphi(v)}}\right\} = \dfrac{1}{2}\, a(u,u) - \underbrace{\mathrm{Re}\, a(u,g)}_{\substack{\shortparallel \\ \mathrm{Re}\,\varphi(u)}}. \end{cases}$$

Isto conclui a demonstração de (6.6) e a prova do teorema. □

Corolário 6.2.3 (O Teorema de Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma sesqui-linear contínua e coerciva. Então, para cada $\varphi \in H^*$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se $a(w, v) = \overline{a(v, w)}$ para todo $v, w \in H$, então u é caracterizada por:

$$\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}\, a(u, u) - \operatorname{Re}\varphi(u) = \min\limits_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}\, a(v, v) - \operatorname{Re}\varphi(v) \right\}. \end{cases}$$

Prova: Basta aplicar o Teorema de Stampacchia (Teorema 6.2.2) e observar que, se $v \in H$, então $tv \in H$ e $itv \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Décima Nona Aula (100 minutos) ↑

6.3 Apêndice I: Base de Hilbert

Em toda esta Seção H denota um espaço de Hilbert real e $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ o seu produto interno

Definição 6.3.1. *Seja $\{E_n\}$ uma seqüência se subespaços fechados de H. Diremos que H é soma de Hilbert dos espaços E_n (escreveremos $H = \bigoplus\limits_n E_n$) se:*

i) Os E_n's são dois a dois ortogonais; isto é,

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \text{sempre que} \quad u \in E_n, \; v \in E_m, \; m \neq n.$$

ii) O espaço vetorial gerado por $\bigcup\limits_n E_n$ é denso em H.

Teorema 6.3.2. *Se $H = \bigoplus\limits_n E_n$, $u \in H$ e $u_n = P_{E_n} u$. Então*

a) $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *; isto é,* $u = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{k} u_n$

ii) $\|u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ *(Identidade de Parseval)*

Reciprocamente, se $\{u_n\} \subset H$ é uma seqüência com $u_n \in E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e sua soma u satisfaz $u_n = P_{E_n} u$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prova: Se $S_k = \sum_{n=1}^{k} P_{E_n}$, então S_k é linear e

$$\|S_k u\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|P_{E_n} u\|^2 = \sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2.$$

Como P_{E_n} é uma projeção ortogonal,

$$\langle u - P_{E_n} u, v \rangle = 0, \quad \forall v \in E_n.$$

Tomando $v = P_{E_n} u$, obtemos

$$\langle u, P_{E_n} u \rangle = \|P_{E_n} u\|^2 \text{ ou seja } \langle u, u_n \rangle = \|u_n\|^2.$$

Somando a identidade acima de $n = 1$ até $n = k$, obtemos

$$\langle u, S_k u \rangle = \sum_{n=1}^{k} \|P_{E_n} u\|^2 = \|S_k u\|^2.$$

Segue que

$$\|S_k u\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in H$$

e como $\left\{\|S_k u\|^2\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2\right\}$ é crescente temos que

$$\lim_{K \to \infty} \|S_k u\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in H,$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \leq \|u\|^2 \text{ (Desigualdade de Bessel)} \tag{6.9}$$

Seja F o subespaço vetorial de H gerado por $\bigcup_n E_n$. Para cada $\epsilon > 0$ seja $\overline{u} \in F$ tal que $\|u - \overline{u}\| < \epsilon$. Para k suficientemente grande temos que $S_k \overline{u} = \overline{u}$. Por outro lado,

$$\|S_k u - S_k \overline{u}\| \leq \|u - \overline{u}\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\|S_k u - u\| &\leq \|S_k u - S_k \overline{u}\| + \overbrace{\|S_K \overline{u} - \overline{u}\|}^{\substack{0 \\ \shortparallel}} + \|\overline{u} - u\| \\ &\leq 2\|u - \overline{u}\| \leq 2\epsilon.\end{aligned}$$

Disto segue que

$$\lim_{k\to\infty} S_k u = u \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} \|u_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|S_k u\|^2 = \|u\|^2 \text{ (Identidade de Parseval).}$$

Se $v_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} u_n$, então $\|v_k\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \|u_n\|^2$. Logo

$$\|v_k - v_\ell\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\ell} \|u_n\|^2$$

e $\{v_k\}$ é uma seqüência de Cauchy. Segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e

$$\langle u - u_n, v\rangle = 0, \quad \forall v \in E_n;$$

ou seja, $P_n u = u_n$. $\square$

Definição 6.3.3. *Chamamos de Base de Hilbert uma seqüência $\{u_n\}$ de elementos de H tal que*

i) $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle u_m, u_n\rangle = 0$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

ii) Se F é o subespaço de H gerado por $\{u_i,\, n \in \mathbb{N}\}$, então $F^- = H$.

Observação 9.

1. *Se $\{u_n\}$ é uma base de Hilbert de H, então*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n \quad \textit{com} \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)|^2, \quad \forall u \in H.$$

2. *Inversamente, se $\{\alpha_n\} \in \ell_2$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ é convergente e se*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \textit{ então } (u, u_n) = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N} \textit{ e } \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \;.$$

Teorema 6.3.4. *Todo espaço de Hilbert separável tem uma Base de Hilbert.*

Prova: Seja $\{v_n\}$ um subconjunto denso de H e $F_k = \text{span}[v_1, \ldots, v_k]$. Então

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} = H.$$

Elege-se uma base ortonormal de F_1 e completa-se esta a uma base ortonormal de F_2, e prosseguindo desta forma obtém-se uma base de Hilbert de H. $\square$

Corolário 6.3.5. *Todo espaço de Hilbert separável é isometricamente isomorfo ao ℓ_2 com produtos internos preservados pela isometria.*

6.4 Apêndice II: Operadores Com Resolvente Positivo

Vamos agora introduzir as propriedades básicas que uma ordem deve satisfazer em um Espaço de Banach para que métodos de comparação possam ser desenvolvidos.

Definição 6.4.1. *Um espaço de Banach ordenado é um par $(X, \leq)$, onde X e um espaço de Banach e $\leq$ é uma relação de ordem em X tal que*
i) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$, $x, y, z \in X$.
ii) $x \leq y$ implica $\lambda x \leq \lambda y$, para $x, y \in X$, e número real $\lambda \geq 0$.
iii) O "cone positivo" $C = \{x \in X,\ x \geq 0\}$ é fechado X.

Observação 10. *i) Observe que $x \leq y$ é equivalente a $y - x \geq 0$. Observe ainda que $x \leq 0$ se e somente se $0 \leq -x$ e que o cone C é convexo. Note ainda que se $\lambda < \mu$ e $x \geq 0$ então $0 \leq (\mu - \lambda)x$ e $\lambda x \leq \mu x$.*
ii) Todo subsepaço fechado de um espaço de Banach ordenado é também um espaço de Banach ordenado com a ordem induzida.
iii) Se $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ são espaços de Banach ordenados, então $X \times Y$ com a relação de ordem $(a, b) \leq_{X \times Y} (x, y)$ se e somente se $a \leq_X x$ e $b \leq_Y y$, é um espaço de Banach ordenado.
iv) Para $1 \leq p \leq \infty$, $X = L^p(\Omega)$ e $C(\overline{\Omega})$, com a ordem "$f \leq g$ se e somente se $f(x) \leq g(x)$ quase sempre" são espaços de Banach ordenados.

Mais geralmente, se $(\Omega, d\mu)$ é um espaço de medida e X é um espaço de Banach ordenado, então $L^p(\Omega, X)$, with the ordering a.e, é um espaço de

Banach ordenado. Se K é um espaço métrico completo, então $C(K, X)$ é um espaço de Banach ordenado.

Uma vez definida uma relação de ordem em espaços de Banach podemos definir o que entendemos por transformações que preservam ordem. Temos então a seguinte definição

Definição 6.4.2. *Sejam $(X, \leq)$ $(Y, \preceq)$ espaços de Banach ordenados. Uma função $T : D(T) \subset X \to Y$ é dita* **crescente** *se e somente se $x \leq y$, $x, y \in D(T)$, implica $T(x) \preceq T(y)$ e é chamada* **positiva** *se e somente se $x \geq 0$ implica $T(x) \preceq 0$.*

Observação 11. *Observe que se, na definição acima, T é linear então ambos conceitos coincidem.*

No que se segue, provamos que uma certa classe de operadores preservam o cone positivo.

Lemma 6.4.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $f \in H$. Suponha que existe $\tilde{f} \in H$ tal que $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ e que*

$$\langle \tilde{f}, f \rangle \geq |\langle f, f \rangle|.$$

Então $f = \tilde{f}$.

Demonstração. Sabemos que $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ e que

$$\|f\|^2 = |\langle f, f \rangle| \leq \langle \tilde{f}, f \rangle.$$

Segue que $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ e

$$0 \leq \langle f - \tilde{f}, f - \tilde{f} \rangle = 2\|f\|^2 - 2\langle \tilde{f}, f \rangle \leq 0$$

implica que $f = \tilde{f}$. $\square$

Seja H um espaço de Hilbert ordenado e C o seu cone positivo. Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto e positivo, isto é, $\langle Au, u \rangle \geq 0$ for all $u \in D(A)$. Dizemos que $(A + \alpha)^{-1}$ é crescente se $(A + \alpha)^{-1} f \in C$ sempre que $f \in C$.

Aqui é preciso reescrever o resultado em termos de formas bilineares de modo que não seja necessário introduzir potências fracionárias de A

Teorema 6.4.4. *Sejam H, A e C como acima. Assuma que H possui um subconjunto denso D tal que:*

- $(A+\alpha)^{-1}D \subset D$;
- *Para cada $d \in D$ podemos definir $|d| \in D \cap C$ e esta relação satisfaz: Um elemento $d \in D$ está em C se e somente se $d = |d|$ e $\|d\| = \|\, |d|\, \|$;*
- $\langle |d|, g\rangle \geq |\langle d, g\rangle|, \quad \forall d \in D,\ \forall g \in C.$

Considere as seguintes afirmativas:

(i) Se $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ então $|u| \in D(A^{\frac{1}{2}})$ e

$$\langle A^{\frac{1}{2}}|u|, A^{\frac{1}{2}}|u|\rangle \leq \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}u\rangle.$$

(ii) $(A+\alpha)^{-1}$ é crescente para todo $\alpha > 0$.

Então (i) implica (ii).

Demonstração. Em $D(A^{\frac{1}{2}})$ adotamos o produto interno

$$\langle f, g\rangle_1 = \langle A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}g\rangle + \alpha\langle f, g\rangle$$

onde $\alpha > 0$. Denotamos por $H^{\frac{1}{2}}$ o espaço de Hilbert $(D(A^{\frac{1}{2}}), \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$.

Se $D \ni g \geq 0$ e $c = (A+\alpha)^{-1}g$

$$\begin{aligned}\langle |c|, c\rangle_1 &= \langle |c|, (A+\alpha)^{-1}g\rangle_1 = \langle |c|, g\rangle \geq |\langle c, g\rangle| \\ &= |\langle c, (A+\alpha)^{-1}g\rangle_1| = |\langle c, c\rangle_1|.\end{aligned}$$

Adicionalmente

$$\begin{aligned}\|\, |c|\, \|_1^2 &= \langle A^{\frac{1}{2}}|c|, A^{\frac{1}{2}}|c|\rangle + \alpha\|\, |c|\, \|^2 \\ &\leq \langle A^{\frac{1}{2}}c, A^{\frac{1}{2}}c\rangle + \alpha\|c\|^2 \\ &= \|c\|_1^2.\end{aligned}$$

Usando o Lema 6.4.3 com $f = c$ e $\tilde{f} = |c|$ concluímos que se $g \in D \cap C$ então

$$|(A+\alpha)^{-1}g| = (A+\alpha)^{-1}g$$

e $(A+\alpha)^{-1}g \in C$. Da densidade de D em C e da continuidade de $(A+\alpha)^{-1}$, segue que

$$(A+\alpha)^{-1}g \in C\ \forall g \in C.$$

Portanto $(A+\alpha)^{-1}$ é crescente. $\square$

Capítulo 7

Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto-adjuntos

Vigésima Aula (100 minutos) ↓

7.1 Definição e Propriedades Elementares

Definição 7.1.1. *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Um operador $T \in L(X,Y)$ é dito compacto se $T(B_X)$ é precompacto na topologia forte de Y. Denotamos por $K(X,Y)$ o conjunto dos operadores compactos de X em Y ($K(X) = K(X,X)$).*

Teorema 7.1.2. *Sejam X e Y espaços de Banach, então $K(X,Y)$ é um subespaço vetorial fechado de $L(X,Y)$.*

Prova: Sejam $\{T_n\}$ uma seqüência em $K(X,Y)$ e $T \in L(X,Y)$ tais que $T_n \to T$ na topologia de $L(X,Y)$ e mostremos que $T \in K(X,Y)$. Como Y é um espaço de Banach basta mostrar que $T(B_X)$ é totalmente limitado; ou seja, que para todo $\epsilon > 0$ existe conjunto finito I e vetores $y_i \in Y$, $i \in I$ tal que $T(B_X) \subset \cup_{i\in I} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$. Assim, dado $\epsilon > 0$ fixamos $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_\epsilon} - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $T_{n_\epsilon}(B_X)$ é totalmente limitado, existem conjunto finito I_{n_ϵ} e vetores $y_i \in Y$, $i \in I_{n_\epsilon}$ tais que

$$T_{n_\epsilon}(B_X) \subset \bigcup_{i\in I} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i).$$

É fácil ver que

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B_\varepsilon(y_i).$$

Isto conclui a prova o resultado. $\square$

Definição 7.1.3. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Diremos que T uma transformação linear $T : X \to Y$ tem posto finito se sua imagem tem dimensão finita.*

Corolário 7.1.4. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $\{T_n\}$ é uma seqüência de operadores com posto finito em $L(X,Y)$ e $T \in L(X,Y)$ são tais que $T_n \to T$ na topologia de $L(X,Y)$, então $T \in K(X,Y)$.*

Proposição 7.1.5. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in K(X,Y)$ e Y é um espaço de Hilbert, então existe uma seqüência $\{T_n\}$ de operadores com posto finito em $L(X,Y)$, tal que $T_n \to T$.*

Prova: Como $T(B_X)$ é relativamente compacto, dado $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto de índices finito I_n e vetores $y_i \in Y$, $i \in I_n$, tais que

$$T(B_X) \subset \bigcup_{i \in I} B(y_i, \frac{1}{n}).$$

Seja G_n o subespaço de Y gerado por $\{y_i,\ i \in I_n\}$ e $T_n u = (P_{G_n} \circ T)\, u$. Assim, dado $u \in B_X$ podemos encontrar y_{i_0}, $i_0 \in I_n$, tal que

$$\|Tu - y_{i_0}\| < \frac{1}{n}.$$

e

$$\begin{aligned} \|T_n u - Tu\| &\leq \|P_{G_n} Tu - y_{i_0}\| + \|y_{i_0} - Tu\| \\ &= \|P_{G_n} Tu - P_{G_n} y_{i_0}\| + \|y_{i_0} - Tu\| < \tfrac{2}{n}. \end{aligned}$$

Logo $\|T_n - T\| \leq \frac{2}{n}$ e $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. $\square$

Proposição 7.1.6. *Sejam X e Y espaços de Banach. Então $T \in K(X,Y)$ se, e somente se, $T^* \in K(Y^*, X^*)$.*

Prova: Seja v_n uma seqüência em B_{Y^*} e $D = \overline{T(B_X)}$. Se $\mathcal{H} \subset C(D)$ definido por

$$\mathcal{H} = \{v_n : D \to \mathbb{R} \text{ tal que } D \ni x \to \langle v_n, x\rangle \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots\}$$

As hipóteses do Teorema de Arzelá-Ascoli estão satisfeitos e podemos extrair uma subseqüência $\{v_{n_k}\}$ de $\{v_n\}$ que é convergente em $C(D)$ para uma função $\varphi \in C(D)$. Isto é,

$$\sup_{x \in B_X} |\langle v_{n_k}, Tx\rangle - \varphi(Tx)\rangle| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo

$$\sup_{x \in B_X} |\langle v_{n_k}, Tx\rangle - \langle v_{n_\ell}, Tx\rangle| = \|T^* v_{n_k} - T^* v_{n_\ell}\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e portanto $T^* v_{n_k}$ é convergente em X^*. Isto mostra que $\overline{T^*(B_{Y^*})}$ é seqüêncialmente compacto portanto compacto, já que X^* é um espaço de Banach.

Para provar a recíproca observe que, se $T^* \in K(Y^*, X^*)$, então $T^{**} \in K(X^{**}, Y^{**})$. Isto implica que $T^{**}(J(B_X))$ é relativamente compacto em Y^{**}. Mas

$$\langle T^{**}(Jx), y^*\rangle = \langle Jx, T^* y^*\rangle = \langle T^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle J(Tx), y^*\rangle \tag{7.1}$$

para todo $y^* \in Y^*$.

Note que, do lado direito de (7.1), a transformação J é a isometria canônica que identifica Y com um subespaço de Y^{**} enquanto que, do lado esquerdo de (7.1), J é a isometria canônica que identifica X com um subespaço de X^{**}.

Segue que $T^{**}(Jx) = J(Tx)$, $\forall x \in X$ e portanto $J(T(B_X)) = T^{**}(J(B_X))$ é relativamente compacto. Segue do fato que J é uma isometria que $\overline{T(B_X)}$ é compacto. □

7.1.1. Complemento Topológico

Definição 7.1.7. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e Y um subespaço vetorial fechado de X. Diremos que Z é um complemento topológico de Y se*

i) Z é fechado e

ii) $Y + Z = X$ e $Z \cap Y = \{0\}$.

Proposição 7.1.8. *Suponha que X seja um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e que Y seja um subespaço vetorial de X que admite um complemento topológico Z. Se W é um outro complemento topológico de Y, existe uma transformação linear contínua e bijetora $T : Z \to W$. Em particular, todos os complementos* *topológicos de Y tem mesma dimensão. Chamaremos de* **codimensão** *de Y à dimensão de um complemento de Y e, em particular, diremos que Y tem* **codimensão finita** *se admite um complemento topológico com dimensão finita.*

Prova: Como $X = Y \oplus Z = Y \oplus W$, dado $z \in Z$ existe uma única representação $z = y + w$ com $y \in Y$ e $w \in W$. Definamos $Tz = w$. É claro que T é uma transformação linear. Se $Tz = 0$, então $z \in Y$ o que implica que $z = 0$. Segue do Teorema 2.3.1 que T é uma transformação linear contínua. Resta apenas mostrar que T é sobrejetora. Se $w \in W$, então w pode ser unicamente representado na forma $w = y + z$ com $y \in Y$ e $z \in Z$. Segue que $z = (-y) + w$ e que $Tz = w$.

Dado que Y tem um complemento, existe uma bijeção entre dois complementos quaisquer de Y e portanto todo complemento de Y tem a mesma dimensão. □

Proposição 7.1.9. *Se X é um espaço um espaço de Banach e V é um subespaço com dimensão finita de X, então V admite um complemento topológico em X.*

Prova: Se m é a dimensão de V e $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ é uma base para V, cada vetor $x \in V$ pode ser unicamente representado como combinação linear dos vetores dessa base; ou seja, existe uma única $m-$upla $(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i.$$

Com esta representação, definimos os funcionais lineares $\xi_i : V \to \mathbb{K}$ por $\xi_i(x) = x_i$, $1 \leq i \leq m$. Como V tem dimensão finita, ξ_i é contínuo para cada $1 \leq i \leq m$ e pelo Teorema de Hahn-Banach (Corolário 1.3.11) existe $\tilde{\xi}_i \in X^*$ que estende ξ_i.

Se $N_i = N(\xi_i) = \xi_i^{-1}(0)$ e $N = \cap_{i=1}^m N_i$, então N é um complemento topológico de V. De fato:

1) N é um subespaço vetorial fechado pois é interseção de um número finito de espaços vetoriais fechados;

2) $V \cap N = \{0\}$ pois, se $x \in V$, então $x = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i$ e se $x \in N$, então $\xi_i(x) = x_i = 0$, $1 \leq i \leq m$ provando que $x = 0$ e que $V \cap N = \{0\}$ e

3) $X = V + N$ pois, se $x \in X$ escrevemos $v = \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}_i(x)\mathbf{v}_i$ e $w = x - v$. Segue que $v \in V$ e como $\tilde{\xi}_j(w) = \tilde{\xi}_j(x) - \tilde{\xi}_j(x) = 0$, $1 \leq j \leq m$, temos que

$X = V + N$. Isto conclui a demonstração da proposição. $\square$

Observação 12. *Vimos em Análise I que se M é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H e N é o seu ortogonal, então $H = M \oplus N$. Isto mostra que todo subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert admite complemento topológico.*

Proposição 7.1.10. *Se X é um espaço de Banach e N é um subespaço vetorial de X^* com dimensão finita m, então $N^\perp$ tem codimensão m.*

Prova: Se $\xi_1, \cdots \xi_m$ é uma base para N, então, $N^\perp = \bigcap_{i=1}^m \xi_i^{-1}(0)$. Como $\xi_1, \cdots, \xi_m$ é uma família linearmente independente de vetores existem vetores linearmente independentes $x_1, \cdots, x_m$ de X tais que $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$. Isto segue da seguinte forma:

Primeiramente note que $T : X \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$Tx = (\xi_1(x), \cdots, \xi_m(x))$$

é sobrejetora. Se este não fosse o caso, existiria $\mathbb{K}^m \ni \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \neq 0$ tal que $\alpha \cdot Tx = 0$, $\forall x \in X$; ou seja,

$$\Big(\sum_{i=1}^m \alpha_i \xi_i\Big)(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Isto é equivalente à $\sum_{i=1}^m \alpha_i \xi_i = 0$ e contradiz a independencia linear de $\xi_1, \cdots, \xi_m$. Disto segue a existência de vetores $x_1, \cdots, x_m$ tais que $\xi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Mostremos agora que os vetores $x_1, \cdots, x_m$ são linearmente independentes. Se $\mathbb{K}^m \ni (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ é tal que $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$, então $\xi_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) = \alpha_j = 0$, $1 \leq j \leq m$ o que conclui a prova da independência linear de $x_1, \cdots, x_m$.

Finalmente, mostremos que $M = [x_i, \cdots, x_m]$ é um complemento topológico de $N^\perp$. Se $x \in N^\perp \cap M$, então $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ (pois $x \in M$) e $\alpha_j = \xi_j(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i) = \xi_j(x) = 0$, $1 \leq j \leq m$ (pois $x \in N^\perp$) e segue que $x = 0$. Agora, se $x \in X$, $y = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) x_i$ e $z = x - y$, então $y \in M$ e $z \in N^\perp$ pois $\xi_j(z) = \xi_j(x) - \xi_j(y) = 0$, $1 \leq j \leq m$. Com isto concluímos a demonstração da proposição. $\square$

Corolário 7.1.11. *Seja X um espaço de Banach e $0 \neq \xi \in X^*$. Então $N = \xi^{-1}(0)$ tem codimensão um.*

Vigésima Aula (100 minutos) $\uparrow$

Vigésima Primeira Aula (100 minutos) ↓

7.2 A Teoria de Riesz-Fredhohm

O nosso próximo resultado refere-se à resolubilidade da equação $(I-T)x = y$.

Teorema 7.2.1 (Alternativa de Fredholm)**.** *Se X é um espaço de Banach e $T \in K(X)$, então*

a) $\dim(N(I-T)) < \infty$,

b) $\operatorname{Im}(I-T)$ *é fechada e portanto* $\operatorname{Im}(I-T) = N(I-T^*)^\perp$,

c) Se $N(I-T) = \{0\}$ *se, e somente se,* $\operatorname{Im}(I-T) = X$,

d) $\dim(N(I-T)) = \dim(N(I-T^*)) = n$.

Observação 13. *Dito de outra forma, a Alternativa de Fredholm nos diz que, ou a equação $(I-T)x = y$ tem uma única solução para todo $y \in X$ ou a equação $(I-T)x = 0$ admite n soluções linearmente independentes e neste caso*

$$(I-T)x = y$$

tem solução se, e somente se, $u \in N(I-T^*)^\perp$.

Prova: a) Seja $X_1 = N(I-T)$. Mostremos que X_1 tem dimensão finita. Se $x \in B_{X_1}$, então $\|x\| \leq 1$ e $x = Tx$. Isto implica que $x \in T(B_X)$ e como $T(B_X)$ é relativamnete compacto temos que B_{X_1} é relativamente compacta. Segue do Teorema de Riesz (Teorema 3.1.2) que $\dim X_1 < \infty$.

b) Se $\operatorname{Im}(I-T)$ for fechada, então $\operatorname{Im}(I-T) = N(I-T^*)^\perp$ do Teorema 2.6.1 e o resultado estará provado. Seja $y_n = u_n - Tu_n \to y$ e mostremos que $y \in \operatorname{Im}(I-T)$. Seja $d_n = \operatorname{dist}(u_n, N(I-T))$. Como $\dim(N(I-T)) < \infty$, existe $v_n \in N(I-T)$ tal que $d_n = \|u_n - v_n\|$ e

$$y_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n).$$

Mostremos que $\{\|u_n - v_n\|\}$ é limitada. Se existe subseqüência $\{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|\}$ tal que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \to \infty$, fazendo $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$ teríamos $w_{n_k} - Tw_{n_k} \to 0$. Da compacidade de T poderíamos extrair uma outra subseqüência tal que

$Tw_{n_k} \to z$. Logo, para esta subseqüência, $w_{n_k} \to z$ e $z \in N(I-T)$. Por outro lado

$$\mathrm{dist}(w_n, N(I-T)) = \frac{\mathrm{dist}(u_n, N(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

e $\mathrm{dist}(z, N(I-T)) = 1$. Isto é um absurdo! Logo $\|u_n - v_n\|$ é limitada. Extraindo subseqüência $u_{n_k} - v_{n_k} \to z$ e $y = z - Tz$ e isto implica que $y \in \mathrm{Im}(I-T)$.

c) Suponha que $N(I-T) = \{0\}$ e que $X_1 = \mathrm{Im}(I-T) \subsetneq X$. Já vimos na parte b) que X_1 é um subespaço fechado de X e portanto um espaço de Banach com a norma herdada de X. Como $T(X_1) \subset X_1$ podemos tomar a restrição $T|_{X_1}$ de T a X_1 e $T|_{X_1} \in K(X_1)$. Segue que $X_2 = (I-T)X_1$ é um subespaço fechado de X_1. Vamos mostrar que a injetividade de $(I-T)$ implica que $X_2 \subsetneq X_1$. Se $X_2 = X_1$, para todo $y \in X$ existe $x \in X$ tal que $(I-T)(I-T)x = (I-T)y$. Logo $(I-T)x = y$ e consequentemente $\mathrm{Im}(I-T) = X$.

Seja $X_n = (I-T)^n X$. Obtemos assim uma seqüência estritamente decrescente de subespaços fechados. Pelo Lema de Riesz (Lema 3.1.1) existe uma seqüência $\{x_n\}$ com $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$ e $\mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Logo

$$Tx_n - Tx_m = -(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + x_n - x_m$$

e se $n > m$, $X_{n+1} \subset X_n \subset X_{m+1} \subset X_m$ e

$$-(x_n - Tx_n) + (x_m - Tx_m) + x_n \in X_{m+1}$$

logo $\|Tx_n - Tx_m\| \geq 1/2$ o que contradiz a compacidade de T e prova o resultado.

Reciprocamente, se $\mathrm{Im}(I-T) = X$, segue do Teorema 2.6.1 que $N(I - T^*) = \mathrm{Im}(I-T)^\perp = \{0\}$. Como $T^* \in K(X^*)$ aplicando o que acabamos de provar à T^* temos que

$$\mathrm{Im}(I - T^*) = X^*.$$

Logo

$$N(I-T) = \mathrm{Im}(I-T^*)^\perp = \{0\}.$$

d) Seja $d = \dim(N(I-T))$ e $d^* = \dim(N(I-T^*))$. Mostremos que $d^* \leq d$. Suponha que não; isto é, suponha que $d < d^*$. Como $\dim(N(I-T)) < \infty$

temos que $N(I-T)$ admite um complemento topológico (veja Proposição 7.1.8) em X e portanto existe $P : X \to X$ projeção contínua tal que $PX = N(I-T)$. Por outro lado, da Proposição 7.1.10, $\mathrm{Im}(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$ tem codimensão finita d^* e daí admite um complemento topológico em X denotado por Y, $\dim Y = d^*$. Como $d < d^*$, existe $\Lambda : N(I-T) \to Y$ injetora e não sobrejetora. Se

$$S = T + (\Lambda \circ P),$$

então $S \in K(X)$ e $N(I-S) = \{0\}$ pois se

$$0 = x - Sx = \underbrace{x - Tx}_{\in \mathrm{Im}(I-T)} - \underbrace{(\Lambda \circ P)x}_{\in Y}.$$

Segue que $x - Tx = 0$ e $\Lambda \circ Px = 0$ ou seja $x \in N(I-T)$ e $\Lambda x = 0$ o que implica $x = 0$. Aplicando c) a S temos que $\mathrm{Im}(I-S) = X$ o que é um absurdo pois existe $y \in Y$, $y \notin \mathrm{Im}(\Lambda)$ e portanto $x - Sx = y$ não admite solução. Logo $d^* \leq d$.

Aplicando este resultado a T^*

$$\dim N(I-T^{**}) \leq \dim N(I-T^*) \leq \dim N(I-T).$$

mas $N(I-T^{**}) \supset N(I-T)$ pois

$$\begin{aligned}\langle (I-T^{**})Jx, y^*\rangle &= \langle Jx, (I-T^*)y^*\rangle = \langle (I-T^*)y^*, x\rangle = \langle y^*, (I-T)x\rangle \\ &= \langle J((I-T)x), y^*\rangle.\end{aligned}$$

Logo $(I-T^{**})Jx = J((I-T)x)$ e isto implica que $N(I-T^{**}) \supset N(I-T)$. Resulta que $d = d^*$. □

7.3 Espectro de Um Operador Compacto

Definição 7.3.1. *Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : D(T) \subset X \to X$ um operador fechado. Diremos que o conjunto resolvente de T é o conjunto*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : (\lambda - T) : D(T) \to X \text{ é bijetora } \}$$

e que espectro de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{K}\backslash\rho(T)$. Se $\lambda \in \rho(T)$ diremos que $(\lambda - T)^{-1}$ é o operador resolvente de T em λ.

Proposição 7.3.2. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e $T : D(T) \subset X \to X$ um operador fechado. Então $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{K}$ e consequentemente $\sigma(T)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{K}$.*

Prova: Mostremos que $\rho(T)$ é aberto. Se $\lambda_0 \in \rho(T)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dado $y \in X$, queremos mostrar que, para $|\lambda - \lambda_0|$ pequeno e $y \in X$ dado, existe um único $x \in X$ tal que $(\lambda - T)x = y$. Ou seja, dado $y \in X$ e λ suficientemente próximo de λ_0, o operador

$$Sx = (\lambda_0 - T)^{-1}(y - (\lambda - \lambda_0)x)$$

tem um único ponto fixo. Note que, se $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$, então

$$\|Sx - Sx'\| \leq \underbrace{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\||\lambda - \lambda_0|}_{<1} \|x - x'\|.$$

Segue que S é uma contração e portanto tem um único ponto fixo. Disto segue que $(\lambda - T) : D(T) \subset X \to X$ tem inversa limitada para $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$. Logo $\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado. $\square$

O espectro de um operador linear T divide-se em três partes mutualmente exclusivas:

a) O espetro pontual $\sigma_p(T)$ consiste de todos os pontos $\lambda \in \mathbb{K}$ para os quais $(\lambda - T)$ não é injetora.

b) O espetro residual $\sigma_r(T)$ consiste de todos os pontos $\lambda \in \mathbb{K}$ para os quais $(\lambda - T)$ é injetora mas sua imagem não é densa.

c) O espectro contínuo $\sigma_c(T)$ é o conjunto de todos os pontos $\lambda \in \mathbb{K}$ para os quais $(\lambda - T)$ é injetora, sua imagem é densa mas sua inversa não é contínua.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ então existe $0 \neq x \in X$ tal que $(\lambda - T)x = 0$. Neste caso diremos que λ é um auto-valor de T, x é um auto-vetor de T e que $N(\lambda - T)$ é o auto-espaço associado a λ.

Observação 14. *Segue do Teorema do Gráfico Fechado que, se $(\lambda - T)$ é injetora e $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ é fechada, então $(I - T)^{-1} : \mathrm{Im}(I - T) \to X$ é limitada.*

Reciprocamente, se $(I-T)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda - T) \to X$ *é limitada, então* $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ *é fechada. Desta forma,* $\lambda \in \sigma_c(T)$ *se, e somente se,* $(\lambda - T)$ *é injetora,* $\overline{\mathrm{Im}(\lambda - T)} = X$ *e* $\mathrm{Im}(\lambda - T) \subsetneq X$*.*

Exemplo 7.3.1. *Seja* $X = \ell_2$ *e*

$$T(\{u_n\}) = (0, u_1, u_2, \ldots).$$

Note que, se $T(\{u_n\}) = 0$*, então* $\{u_n\} = 0$*; isto é* $N(T) = \{0\}$*, no entanto* $\overline{\mathrm{Im}(T)} \subsetneq \ell_2$ *pois* $(1, 0, \ldots) \notin \overline{\mathrm{Im}(T)}$*. Segue que* $0 \in \sigma_r(T)$*.*

Exemplo 7.3.2. *Seja* $X = \ell_2$ *e*

$$T(\{u_n\}) = \{n^{-1} u_n\}.$$

Note que, se $T(\{u_n\}) = 0$*, então* $\{u_n\} = 0$*; isto é* $N(T) = \{0\}$*. Note ainda que* $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \ell_2$ *no entanto* $\ell_2 \ni \{n^{-1}\} \notin \mathrm{Im}(T)$*. Segue que* $0 \in \sigma_c(T)$*. Por outro lado* $\lambda_k = \frac{1}{k}$ *é auto-valor de* T *com auto-vetor* $e_k = \{\delta_{kn}\}$ *e auto-espaço* $N(\lambda_k - T) = [e_k]$*.*

Proposição 7.3.3. *Seja* X *um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T \in L(X)$ *uma transformação linear contínua. O espectro* $\sigma(T)$ *de* $T \in L(X)$ *é um conjunto compacto e*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Prova: Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| > \|T\|$ e provemos que $(\lambda - T)$ é bijetora; ou seja, que dado $y \in X$, $(\lambda - T)x = y$ tem uma única solução. Seja

$$Sx = \frac{1}{\lambda}(Tx - y).$$

Segue que, $\|Sx - Sx'\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}\|T\|\|x - x'\|$ e portanto S é uma contração. Isto implica que S tem um único ponto fixo. O restante da demonstração segue do fato que $\rho(T)$ é aberto. $\square$

Vigésima Primeira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Teorema 7.3.4. *Seja X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T \in K(X)$. Se X tem dimensão infinita, então*

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$ *e*

c) uma das situações a seguir

1. $\sigma(T) = \{0\}$ *ou*
2. $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é finito ou*
3. $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é uma seqüência que tende a "0".*

Prova:

a) Se $0 \notin \sigma(T)$, então T é bijetiva e $I_X = T \circ T^{-1}$ é compacta. Logo $\overline{B}_X$ é compacta. Segue que $\dim X < \infty$. Isto mostra que $0 \in \sigma(T)$ sempre que $T \in K(X)$ e $\dim(X) = \infty$.

b) Seja $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Da parte a) da Alternativa de Fredholm (Teorema 7.2.1) segue que $\dim(N(\lambda - T)) < \infty$ e da parte b), se $N(\lambda - T) = \{0\}$, então $\mathrm{Im}(\lambda - T) = X$ e $\lambda \in \rho(T)$. Com isto, $\dim(N(\lambda - T)) < \infty$ e $N(\lambda - T) \neq 0$.

Antes de podermos provar a parte c) do teorema necessitamos do seguinte resultado

Lemma 7.3.5. *Seja X um espaço de Banach com dimensão infinita e $T \in K(X)$. Se $\{\lambda_n\}$ é uma seqüência de números distintos tais que*

$$\begin{aligned} &\lambda_n \longrightarrow \lambda \\ &\lambda_n \in \sigma(T)\backslash\{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Então $\lambda = 0$; isto é, todo ponto de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é isolado.

Prova: Segue da parte b) do Teorema 7.3.4 que $\lambda_n \in \sigma_p(T)$. Seja $x_n \neq 0$ tal que $(\lambda_n - T)x_n = 0$ e $X_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Mostremos que $X_n \subsetneq X_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por indução, que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores e mostremos que $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ também o é. Se $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, então

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \lambda_{n+1} \alpha_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} = T x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i.$$

Disto segue que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) x_i = 0 \text{ e consequentemente } \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Com isto $x_{n+1} = 0$, o que é uma contradição. Portanto $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores. Como $x_1 \neq 0$ obtemos que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ é um conjunto linearmente de independente de vetores para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X_n \subsetneq X_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado é claro que $(\lambda_n - T)X_n \subset X_{n-1}$ (pois $(\lambda_n - T)x_n = 0$). Aplicando o Lema de Riesz (Lema 3.1.1), construímos $\{y_n\}$ tal que $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ e $\text{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ para $n \geq 2$. Se $2 \leq m < n$, então

$$X_{m-1} \subset X_m \subset X_{n-1} \subset X_n.$$

Logo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Ty_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m}{\lambda_m} \right\| &= \left\| \overbrace{\frac{Ty_n - \lambda_n y_n}{\lambda_n} - \frac{Ty_m - \lambda_m y_m}{\lambda_m} - y_m}^{\in X_{n-1}} + y_n \right\| \\ &\geq \text{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, então a seqüência $\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ é limitada e, do fato que T é compacta, $\left\{ \frac{Ty_n}{\lambda_n} \right\}$ tem uma subseqüência convergente, o que nos leva a uma contradição. Logo $\lambda = 0$. $\square$

c) Para todo $n \geq 1$ o conjunto

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

é fechado e limitado e portanto finito pois, caso contrário, teria um ponto de acumulação diferente de zero contradizendo o lema anterior. Segue que o conjunto $\sigma(T)\backslash\{0\}$ é uma seqüência, vazia, finita ou que converge a zero. $\square$

7.4 Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Sejam H um espaço de Hilbert real, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{R}$ o seu produto interno e $T\in L(H)$. Em toda esta seção identificaremos H e H^* de forma que escreveremos $T^*\in L(H)$.

Definição 7.4.1. *$T\in L(H)$ é auto-adjunto se $T^*=T$; isto é,*

$$\langle Tu,v\rangle=\langle u,Tv\rangle,\quad \forall u,v\in H.$$

Proposição 7.4.2. *Sejam $T\in L(H)$ um operador auto-adjunto e*

$$m=\inf_{\substack{u\in H\\ \|u\|=1}}\langle Tu,u\rangle,\quad M=\sup_{\substack{u\in H\\ \|u\|=1}}\langle Tu,u\rangle.$$

Então, $\sigma(T)\subset[m,M]$ e $\{m,M\}\subset\sigma(T)$.

Prova: Da definição de M temos que

$$\langle Tu,u\rangle\le M\|u\|^2,\ \ \forall u\in H.$$

Disto segue que, se $\lambda>M$, então

$$\langle\lambda u-Tu,u\rangle\ge\underbrace{(\lambda-M)}_{>0}\ \|u\|^2. \tag{7.2}$$

Com isto, é fácil ver que $a(u,v)=\langle\lambda u-Tu,v\rangle$ é uma forma bilinear, simétrica, contínua e coerciva. Segue do Teorema de Lax-Milgram que

$$\langle\lambda u-Tu,v\rangle=\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in H,$$

tem uma única solução u_f para cada $f\in H$. É fácil ver que esta solução satisfaz

$$(\lambda-T)u_f=f.$$

Disto e de (7.2), segue que $(\lambda - T)$ é bijetora. Logo $(M, \infty) \subset \rho(T)$.

Mostremos que $M \in \sigma(T)$. A forma bilinear $a(u,v) = (Mu - Tu, v)$ é bilinear, contínua e simétrica tal que $a(u,u) \geq 0$, $\forall u \in H$. Logo, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq a(u,u)^{1/2} a(v,v)^{1/2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} |(Mu - Tu, v)| &\leq (Mu - Tu, u)^{1/2} (Mv - Tv, v)^{1/2} \quad \forall \ u, v \in H \\ &\leq C (Mu - Tu, u)^{1/2} \|v\| \end{aligned}$$

e que

$$\|Tu - Mu\| \leq C(Mu - Tu, u)^{1/2}, \quad \forall u \in H.$$

Seja $\{u_n\}$ uma seqüência de vetores tais que $\|u_n\| = 1$, $\langle Tu_n, u_n \rangle \to M$. Segue que $\|Mu_n - Tu_n\| \to 0$. Se $M \in \rho(T)$

$$u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$$

o que está em contradição com $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue que $M \in \sigma(T)$.
Do resultado acima aplicado a $-T$ obtemos o resultado para m. □

Corolário 7.4.3. *Seja $T \in L(H)$ auto adjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.*

Prova: Pela proposição anterior $\langle Tu, u \rangle = 0$, $\forall u \in H$. Segue que

$$2\langle Tu, v \rangle = \langle T(u+v), (u+v) \rangle - \langle Tu, u \rangle - \langle Tv, v \rangle = 0, \quad \forall u, v \in H$$

e $T = 0$. □

Teorema 7.4.4. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in L(H)$ um operador compacto e auto adjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por auto-vetores de T .*

Prova: Seja $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ a seqüência dos auto-valores distintos de T, excluindo o zero, e $\lambda_0 = 0$. Então

$$\begin{aligned} V_0 &= N(T), & 0 \leq \dim V_0 \leq \infty, \\ V_n &= N(\lambda_n - T), & 0 < \dim V_n < \infty. \end{aligned}$$

Mostremos que $H = \bigoplus_n V_n$.

i) Os V_n's são dois a dois ortogonais. De fato, se $u \in V_m$ e $v \in V_n$ com $m \neq n$, $Tu = \lambda_m u$ e $Tv = \lambda_n v$. Segue que

$$\langle Tu, v\rangle = \lambda_n \langle u, v\rangle = \lambda_m \langle u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$$

e portanto

$$(\lambda_n - \lambda_m)\langle u, v\rangle = 0, \quad \text{ou seja} \quad \langle u, v\rangle = 0.$$

ii) Seja F o subespaço de H gerado por $\bigcup_{n\geq 0} V_n$. Mostremos que F é denso em H . É claro que $T(F) \subset F$ e mostremos que $TF^{\perp} \subset F^{\perp}$. De fato, se $u \in F^{\perp}$ e $v \in F$, então

$$\langle Tu, v\rangle = \langle \underset{\in F^{\perp}}{u}\,,\ \underset{\in F}{Tv} \rangle = 0; \text{ isto é, } Tu \in F^{\perp}.$$

O operador $T_0 = T|_{F^{\perp}}$ é auto-adjunto e compacto. Ainda:

a) $\sigma(T_0) = \{0\}$. De fato, se $\lambda \in \sigma(T_0)\setminus\{0\}$, então $\lambda \in \sigma_p(T_0)$ e portanto existe $u \in F^{\perp}$, $u \neq 0$ tal que $T_0 u = \lambda u = Tu$. Portanto, λ é auto-valor de T e $\lambda = \lambda_n$ e $u \in V_n \cap F^{\perp}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Segue que $u = 0$ o que nos dá uma contradição.

b) Segue do Lema anterior que $T_0 = 0$ e portanto $F^{\perp} \subset N(T) \subset F$ o que nos dá $F^{\perp} = \{0\}$.

Com isto mostramos que F é denso em H.

Finalmente, elege-se uma base Hilbertiana de V_n para cada $n \in \mathbb{N}$ e em seguida toma-se a união dessas bases para obter uma base Hilbertiana de H formada por auto-valores de T. $\square$

Observação 15. *Se $T \in K(H)$ é auto-adjunto e H separável e V_n, $n \geq 0$, é como na prova do Teorema 7.4.4*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \ \ u_n \in V_n \quad e \quad Tu = \sum_{n=1}^{\infty} Tu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n$ *é tal que* T_k *tem posto finito e*

$$
\begin{aligned}
\|T_k u - Tu\|^2 &= \sum_{n=k+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 \leq \sup\left\{|\lambda_n|^2,\ n \geq k+1\right\} \sum_{n=k+1}^{\infty} \|u_n\|^2 \\
&\leq \sup\left\{|\lambda_n|^2, n \geq k+1\right\} \|u\|^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Disto segue que $\|T_k - T\|_{L(H)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Vigésima Segunda Aula (100 minutos) ↑

7.5 Teoria Espectral de Operadores Dissipativos e a Imagem Numérica

Vigésima Terceira Aula (100 minutos) ↓

Definição 7.5.1. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. A aplicação dualidade $J : X \to 2^{X^*}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2, \ \|x^*\| = \|x\|\}.$$

$J(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é **dissipativo** *se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\,\langle x^*, Ax\rangle \leq 0$.*

Exercício 7.5.1. *Mostre que se X^* é uniformemente convexo e $x \in X$, então $J(x)$ é unitário.*

Lemma 7.5.2. *O operador linear A é dissipativo se e somente se*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\| \tag{7.3}$$

para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Prova: Seja A dissipativo, $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se $x^* \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ então

$$\begin{aligned}\|\lambda x - Ax\|\|x\| &\geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \\ &\geq \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \geq \lambda\|x\|^2\end{aligned}$$

e (7.3) segue. Reciprocamente, dado $x \in D(A)$ suponha que (7.3) vale para todo $\lambda > 0$. Se $f_\lambda^* \in J((\lambda - A)x)$ e $g_\lambda^* = f_\lambda^*/\|f_\lambda^*\|$ temos

$$\begin{aligned}\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, g_\lambda^*\rangle = \lambda\mathrm{Re}\langle x, g_\lambda^*\rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, g_\lambda^*\rangle \\ \leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}\langle Ax, g_\lambda^*\rangle\end{aligned} \tag{7.4}$$

Como a bola unitária de X^* é compacta na topologia fraca* temos que existe $g^* \in X^*$, $\|g^*\| \leq 1$, e sequência $\lambda_n \to \infty$ tais que $g_{\lambda_n}^* \xrightarrow{w^*} g^*$. De (7.4) segue que $\mathrm{Re}\langle Ax, g^*\rangle \leq 0$ e $\mathrm{Re}\langle x, g^*\rangle \geq \|x\|$. Mas $\mathrm{Re}\langle x, g^*\rangle \leq |\langle x, g^*\rangle| \leq \|x\|$ e portanto $\langle x, g^*\rangle = \|x\|$. Tomando $x^* = \|x\|g^*$ temos $x^* \in J(x)$ e $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. Portanto, para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$ e A é dissipativo. □

Teorema 7.5.3 (G. Lumer). *Suponha que A é um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X. Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \ \forall\, \lambda > 0.$$

Prova: Se $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, do Lemma 7.5.2 temos que

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Agora $R(\lambda_0 - A) = X$, $\|(\lambda_0 - A)x\| \geq \lambda_0 \|x\|$ para $x \in D(A)$, logo λ_0 está no conjunto resolvente de A e A é fechado. Seja $\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$. Λ é um conjunto aberto em $(0, \infty)$ já que $\rho(A)$ é aberto, provaremos que Λ é também fechado em $(0, \infty)$ para concluir que $\Lambda = (0, \infty)$. Suponha que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda > 0$, se n é suficientemente grande temos que $|\lambda_n - \lambda| \leq \lambda/3$ então, para n grande, $\|(\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq |\lambda_n - \lambda| \lambda_n^{-1} \leq 1/2$ e $I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1}$ é um isomorfismo de X. Então

$$\lambda - A = \left\{ I + (\lambda - \lambda_n)(\lambda_n - A)^{-1} \right\} (\lambda_n - A) \tag{7.5}$$

leva $D(A)$ sobre X e $\lambda \in \rho(A)$, como queríamos. □

Corolário 7.5.4. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \ \forall\, \lambda > 0.$$

Prova: Pelo Teorema 7.5.3 é suficiente provar que $R(I - A) = X$. Como A é dissipativo e fechado $R(I - A)$ é um subespaço fechado de X. Seja $x^* \in X^*$, tal que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Isto implica que $x^* \in D(A^*)$ e $x^* - A^* x^* = 0$. Como A^* é também dissipativo segue do Lema 7.5.2 que $x^* = 0$. Segue que $R(I - A)$ é denso em X e, como $R(I - A)$ é fechado, $R(I - A) = X$. □

Em muitos exemplos a técnica utilizada para obter estimativas sobre o operador resolvente de de um operador dado bem como localizar o seu espectro é a determinação de sua **imagem numérica** (definida a seguir).

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo X a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{\langle x^*, Ax\rangle : x \in D(A),\ x^* \in X^*,\ \|x\| = \|x^*\| = 1,\ \langle x^*, x\rangle = 1\}. \tag{7.6}$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Teorema 7.5.5. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}\backslash W(A)$. Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\|_{L(X)} \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \tag{7.7}$$

Adicionalmente, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{7.8}$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.

Prova: Seja $\lambda \notin \overline{W(A)}$. Se $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ e $\langle x^*, x\rangle = 1$ então

$$0 < d(\lambda, W(A)) \leq |\lambda - \langle x^*, Ax\rangle| = |\langle x^*, \lambda x - Ax\rangle| \leq \|\lambda x - Ax\| \tag{7.9}$$

e portanto $\lambda - A$ é um-a-um, tem imagem fechada e satisfaz (7.7). Se adicionalmente $\lambda \in \rho(A)$ então (7.9) implica (7.8).

Resta mostrar que se Σ intersepta $\rho(A)$ então $\rho(A) \supset \Sigma$. Para este fim considere o conjunto $\rho(A) \cap \Sigma$. Este conjunto é obviamente aberto em Σ. Mas também é fechado já que $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma$ e $\lambda_n \to \lambda \in \Sigma$ implica que para n suficientemente grande $|\lambda - \lambda_n| < d(\lambda_n, W(A))$. De (7.8) segue que para n grande, $|\lambda - \lambda_n|\ \|(\lambda_n - A)^{-1}\| < 1$ e, como na prova da Proposição 7.3.3, temos que $\lambda \in \rho(A)$ e portanto $\rho(A) \cap \Sigma$ é fechado em Σ. Segue que $\rho(A) \cap \Sigma = \Sigma$ ou seja $\rho(A) \supset \Sigma$, como queríamos. □

Definição 7.5.6. *Seja H um espaço de Hilbert e $\langle \cdot, \cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ o seu produto interno. Um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é simétrico se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $x, y \in D(A)$. A é auto-adjunto se $A = A^*$.*

Exercício 7.5.2. *Mostre que se H é um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador simétrico e sobrejetor então A é auto-adjunto.*

Exemplo 7.5.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador auto-adjunto. Então A é fechado e densamente definido. Suponha que A seja limitado superiormente; isto é, que exista uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\langle Au, u\rangle \leq a\langle u, u\rangle$. Então $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$, e existe uma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ tal que*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) \leq \varphi\}$, $\varphi < \pi$.

Prova: Vamos começar localizando a imagem numérica de A. Primeiramente note que

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\} \subset (-\infty, a].$$

Note que $A - a = A^* - a$ são dissipativos e portanto, do Corolário 7.5.4, $\rho(A-a) \supset (0, \infty)$. Do Teorema (7.5.5) temos que $\mathbb{C}\backslash(-\infty, a] \subset \rho(A)$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])}.$$

Adicionalmente, se $\lambda \in \Sigma_a$ temos que $\frac{1}{d(\lambda,(-\infty,a])} \leq \frac{1}{\sin\varphi}\frac{1}{|\lambda - a|}$ e o resultado segue. $\square$

Vigésima Terceira Aula (100 minutos) $\uparrow$

Capítulo 8

Espaços de Sobolev e Formulação Variacional de Problemas de Valor de Contorno em Dimensão Um

Vigésima Quarta Aula (100 minutos) ↓

8.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os Espaços de Sobolev em dimensão um e os aplicaremos à solução do seguinte problema. Sejam a, b números reais com $a < b$. Dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ encontrar uma função $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Definição 8.1.1. *Uma solução clássica (ou forte) do problema* (8.1) *é uma função* $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ *que verifica* (8.1) *no sentido usual.*

Observação 16. *É claro que podemos resolver* (8.1) *explicitamente mas ignoraremos este fato para ilustrar um método que pode ser utilizado também para dimensões maiores que um.*

Se $\varphi \in C_c^1(a, b)$, multiplicando (8.1) por φ e integrando por partes, temos que

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi. \tag{8.2}$$

Note que, cada termo na expressão acima ainda faz sentido se u, u', f estão em $L^1_{\text{loc}}(a, b)$.

Provisoriamente, diremos que uma função $u \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ que satisfaz $u(a) = u(b) = 0$ e (8.2) é uma solução fraca de (8.1).

O programa a seguir descreve em linhas gerais o enfoque variacional da teoria de equações diferenciais parciais.

A) Precisar a noção de solução fraca o que torna necessário o desenvolvimento da noção de Espaços de Sobolev (ferramenta básica).

B) Estabelecer a existência e a unicidade de uma solução fraca com o método variacional (Teorema de Lax Milgram).

C) Mostrar que a solução fraca é, por exemplo, de classe C^2 (regularidade).

D) Recuperar a solução clássica, mostrando que toda solução fraca de classe C^2 é clássica.

A etapa D é muito simples. De fato, suponha que $u \in C^2([a, b])$, $u(a) = u(b) = 0$ que satisfaz (8.2) para toda $\varphi \in C^1_c((a, b))$. Integrando por partes, obtemos

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c((a, b)).$$

Segue do Corolário 5.3.9 que $-u'' + u = f$ quase sempre e de fato em todo ponto já que $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$.

8.2 Os Espaços de Sobolev $\mathbf{W^{1,p}(I)}$

Sejam a, b números reais estendidos e $I = (a, b)$.

Definição 8.2.1. *Para $1 \leq p \leq \infty$, o Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists\, g \in L^p(I) \text{ satisfazendo } \int_I u\varphi' = -\int g\varphi,\ \forall \varphi \in C^1_c(I) \right\}.$$

Escrevemos $H^1(I)$ em lugar de $W^{1,2}(I)$ e se $u \in W^{1,p}(I)$ a função g é dita derivada fraca no sentido de $W^{1,p}(I)$ de u e é denotada por u'.

O espaço $W^{1,p}(I)$ é dotado da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}.$$

O espaço $H^1(I)$ é dotado do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} = \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(I)} \tag{8.3}$$

e da norma

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\textit{equivalente a } \|u\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}\right).$$

Observação 17.

- *As funções φ que aparecem na Definição 8.2.1 são chamadas funções teste.*
- *Podemos utilizar $C^1_c(I)$ ou $C^\infty_c(I)$ como conjunto de funções teste. (se $\varphi \in C^1_c(I)$, $\rho_n * \varphi \in C^\infty_c(I)$ para n grande e $\rho_n * \varphi \to \varphi$ em $C^1_c(I)$)*
- *Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e $u' \in L^p(I)$ (derivada usual), então $u \in W^{1,p}(I)$ e u' coincide com a derivada de u no sentido de $W^{1,p}(I)$.*
- *Se I é limitado $C^1(\bar{I})$ então $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$.*
- *Se $u \in W^{1,p}(I)$ claramente a derivada de u é independente do representante de u utilizado na Definição 8.2.1.*

Exemplos: Se $I = (-1, 1)$.

i) Seja $u : I \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x) = \dfrac{1}{2}(|x| + x)$. Então u está em $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e $u' = H$ onde

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

Mais geralmente, toda função contínua em $\bar{I}$ e continuamente diferenciável por partes em $\bar{I}$ pertence a $W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ii) A função H não pertence a $W^{1,p}(I)$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$. Se existe $g \in L'_{\text{loc}}(I)$ tal que

$$\int_{-1}^{1} g\varphi = -\int_{-1}^{1} H\varphi' = -\int_{0}^{1} \varphi' = +\varphi(0)$$

$$= \begin{cases} 0, & \forall\varphi \in C_c^1(0,1), \text{ logo } g = 0 \text{ quase sempre em } , (0,1) \\ 0, & \forall\varphi \in C_c^1(-1,0), \text{ logo } g = 0 \text{ quase sempre em } (-1,0). \end{cases}$$

Segue que $g = 0$ quase sempre em $(-1,1)$ e portanto $\varphi(0) = 0$, para toda $\varphi\in C_c^1((-1,1))$. Isto é um absurdo e portanto não existe tal função g.

Proposição 8.2.2. *Para $p \in [1,\infty]$ seja $W^{1,p}(I)$ como na Definição 8.2.1. As seguintes propriedades valem*

- *Para $1 \leq p \leq \infty$ o espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach.*
- *Para $1 < p < \infty$ o espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de reflexivo.*
- *Para $1 \leq p < \infty$ o espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de separável.*
- *$H^1(I)$ é um espaço de Hilbert.*

Prova: Mostremos em primeiro lugar que $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach. Se $\{u_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em $W^{1,p}(I)$ então $\{u_n\}$ e $\{u'_n\}$ são seqüências de Cauchy em $L^p(I)$. Consequentemente $u_n \to u$ em $L_p(I)$ e $u'_n \to g$ em $L^p(I)$. Disto seque que

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_I u_n\varphi' & = & -\displaystyle\int u'_n\varphi\,, & \forall & \varphi \in C_c^1(I), \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \displaystyle\int_I u\varphi' & = & -\displaystyle\int_I g\varphi\,, & \forall & \varphi \in C_c^1(I). \end{array}$$

Logo $g = u' \in L^p$, $u \in W^{1,p}(I)$ e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$.

Em seguida, mostremos que $W^{1,p}(I)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$. De fato, se $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$, então X_p é reflexivo e

$$\begin{array}{rcl} T : W^{1,p}(I) & \to & X_p \\ u & \to & (u, u') \end{array}$$

é uma isometria e portanto $T(W^{1,p}(I))$ é um subespaço fechado de X. Segue da Proposição 4.1.7 que $T(W^{1,p}(I))$ é reflexivo e consequentemente $W^{1,p}(I)$ é reflexivo (Veja Exercício 4.1.2).

Para mostrar que $W^{1,p}(I)$ é separável se $1 \leq p < \infty$. Considere novamente o espaço X_p e a isometria T definidos acima. Do Exercício 4.2.1 e do fato que $L^p(I)$;e separável segue que X_p é separável. Da Proposição 4.2.2 segue $T(W^{1,p}(I))$ é separável e como T é uma isometria concluímos que $W^{1,p}(I)$ é separável.

Finalmente, é fácil ver que (8.3) define um produto interno em $H^1(I)$. Como $H^1(I)$ é completo com a norma dada por este produto interno segue que $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert. $\square$

Exemplo 8.2.1. *Considere a transformação linear $T : W^{1,p}(I) \subset L^p(I) \to L^p(I)$ definida por*

$$Tu = u'$$

então T é fechado. De fato, se $u_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} u$ e $Tu_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} g$, então

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_I u_n\varphi' & = & -\displaystyle\int u_n'\varphi\,, \quad \forall \;\; \varphi \in C_c^1(I), \\ \downarrow & & \quad\downarrow \\ \displaystyle\int_I u\varphi' & = & -\displaystyle\int_I g\varphi\,, \quad \forall \;\; \varphi \in C_c^1(I), \end{array}$$

ou seja $g = u'$.

Além disso, os mesmos argumentos acima nos levam a concluir que, se

- $u_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} u$ *e* $Tu_n \overset{w-L^p(I)}{\rightharpoonup} g$, *então* $g = u' \in L^p(I)$
- $u_n \overset{w-L^p(I)}{\rightharpoonup} u$ *e* $Tu_n \overset{w-L^p(I)}{\rightharpoonup} g$, *então* $g = u' \in L^p(I)$
- $u_n \overset{w-L^p(I)}{\rightharpoonup} u$ *e* $Tu_n \overset{L^p(I)}{\longrightarrow} g$, *então* $g = u' \in L^p(I)$

Veremos a seguir que toda função de $W^{1,p}(I)$ é igual quase sempre a uma função contínua. Para mostrar este resultado precisamos dos seguintes resultados auxiliares.

Lemma 8.2.3. *Se $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ é tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_c(I), \tag{8.4}$$

então existe uma constante C tal que $f = C$ quase sempre.

Prova: Se $\psi \in C^1_c(I)$ é tal que $\displaystyle\int_a^b \psi = 1$ e $w \in C_c(I)$, existe $\varphi \in C^1_c(I)$ tal que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w \right) \psi.$$

De fato, se $h = w - \left(\displaystyle\int_I w \right) \psi$, então h é contínua com suporte compacto e $\displaystyle\int_I h = 0$. Tomando $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x h(s)ds$ a afirmação segue.

De (8.4) temos que

$$\int_I f \left[w - \left(\int_I w \right) \psi \right] = 0, \quad \forall w \in C_c(I).$$

Como

$$\int_I f \left[w - \left(\int_I w \right) \psi \right] = \int_I fw - \int_I \left(\int_I f\psi \right) w = \int_I \left[f - \left(\int f\psi \right) \right] w = 0,$$

temos que

$$\int_I \left[f - \left(\int f\psi \right) \right] w = 0, \quad \forall w \in C_c(I).$$

Segue do Corolário 5.3.9 que $f - \displaystyle\int_I f\psi = 0$ quase sempre em I e o resultado está provado. $\square$

Lemma 8.2.4. *Se $g \in L^1_{\text{loc}}(I)$ e*

$$\nu(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \quad x \in I.$$

para algum $y_0 \in I$, então $\nu \in C(I)$ e

$$\int_I \nu\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Prova: Se

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,t):\ a \le x \le y_0 \text{ e } x \le t \le y_0\} \text{ e} \\ R_2 &= \{(x,t):\ y_0 \le x \le b \text{ e } y_0 \le t \le x\}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \int_I \nu\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right] \varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt \\ &= -\int_{R_1} g(t)\varphi'(x)dtdx + \int_{R_2} g(t)\varphi'(x)dtdx. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} \int_I \nu\varphi' &= -\int_{R_1} g(t)\varphi'(x)dtdx + \int_{R_2} g(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= -\int_a^{y_0} dt \int_a^t g(t)\varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b dt \int_t^b g(t)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^b g(t)\varphi(t)dt = -\int_a^b g\varphi. \ \square \end{aligned}$$

Observação 18. *Segue do Lema 8.2.4 que, se I é limitado, então a primitiva ν de uma função $g \in L^p(I)$ pertence a $W^{1,p}(I)$. Se permitimos que I seja ilimitado, então $\nu \in W^{1,p}(I)$ sempre que $\nu \in L^p(I)$.*

Teorema 8.2.5. *Se $u \in W^{1,p}(I)$, então u tem um representante $\widetilde{u} \in C(\bar{I})$ e*

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in I.$$

Prova: Fixamos $y_0 \in I$ e seja $\bar{u}(x) = \displaystyle\int_{y_0}^x u'(t)dt$.

Do Lema 8.2.4

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto $\displaystyle\int (u - \bar{u})\varphi' = 0$ para todo $\varphi \in C_c^1(I)$. Segue do Lema 8.2.3 que $u - \bar{u} = c$ quase sempre. A função $\bar{u} + c$ tem as propriedades desejadas observando-se que, $\lim_{x\to b^-} \tilde{u}(x)$ and $\lim_{x\to a^+} \tilde{u}(x)$ exist. $\square$

Observação 19.

- *Sempre que necessário utilizaremos o representante contínuo de* $u \in W^{1,p}(I)$ *e continuaremos a representá-lo por* u.
- *Dizer que* u *tem um representante contínuo não é dizer que* u *é contínuo quase sempre.*
- *Se* $u \in W^{1,p}(I)$ *e* $u' \in C(\bar{I})$, *então* $u \in C^1(\bar{I})$.

Vigésima Quarta Aula (100 minutos) $\uparrow$

Vigésima Quinta Aula (100 minutos) ↓

Proposição 8.2.6. *Se $u \in L^p(I)$, $1 < p \leq \infty$, então as propriedades a seguir são equivalentes*

i) $u \in W^{1,p}(I)$,

ii) Existe uma constante C tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

iii) Existe uma constante C tal que para todo $\omega \subset\subset I$ e para todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$ temos

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

Além disso, podemos eleger $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ em ii) e iii).

Prova: Mostraremos que $ii) \Rightarrow i) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii)$.
ii) $\Rightarrow$ i) O funcional linear

$$\varphi \in C_c^1(I) \longmapsto \int u\varphi' \in \mathbb{K}$$

definido em um subespaço denso de L^{p^*} é contínuo na norma de $L^{p^*}(I)$. Então este se estende a um funcional linear contínuo F de $L^{p^*}(I)$ em $\mathbb{K}$. Segue do teorema de representação de Riesz que existe $-g \in L^p$ tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in L^{p^*}(I).$$

Isto mostra que,

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

e que $u \in W^{1,p}(I)$.

i) $\Rightarrow$ iii) Do Teorema 8.2.5, temos que para $x \in \omega$ e $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$,

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds.$$

Disto segue que,

$$|u(x+h)-u(x)| \leq |h| \cdot \int_0^1 |u'(x+sh)|ds.$$

A conclusão agora é óbvia se $p=\infty$. Se $1<p<\infty$, aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$|u(x+h)-u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &= |h|^p \int_0^1 ds \int_\omega |u'(x+sh)|^p dx.\end{aligned}$$

Agora, se $0 \leq s \leq 1$, então

$$\int_\omega |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\omega+sh} |u'(x)|^p dx \leq \int_I |u'(x)|^p dx.$$

e

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \|u'\|_{L^p(I)}|h|.$$

iii) $\Rightarrow$ ii) Seja $\varphi \in C_c^1(I)$ escolha $\omega \subset\subset I$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \omega$. Para $h \in \mathbb{R}$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$ temos

$$\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]dx. \tag{8.5}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e iii) obtemos

$$\left|\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}.$$

dividindo (8.5) por h e fazendo $h \to 0$ deduzimos que

$$\left|\int u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p^*}(I)}, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

$\square$

Exercício 8.2.1. *Mostre que, se $p=1$, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).*

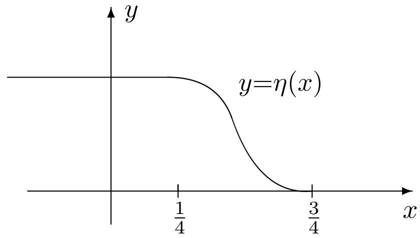
Corolário 8.2.7. *Uma função $u \in L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe $c > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \le c|x - y|, \qquad \textit{quase sempre para } x, y \in I.$$

Algumas ferramentas fundamentais em análise somente podem ser aplicadas para funções definidas em $\mathbb{R}$ (convolução e a transformada de Fourier). Por esta razão, em muitas situações é importante poder estender uma função de $W^{1,p}(I)$ a uma função de $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Antes de prosseguir, seja $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \le \eta \le 1$, tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; x < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{se } \; x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$



e, dada uma função f definida em $(0,1)$, definimos

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \; 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } \; x \ge 1. \end{cases}$$

Lemma 8.2.8. *Se $u \in W^{1,p}(0,1)$, então*

$$\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty) \quad e \quad (\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u'}$$

Prova: É claro que $\eta\widetilde{u}$ e $\eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u'}$ estão em $L^p(\mathbb{R})$. Basta mostrar a igualdade $(\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u'}$. Se $\varphi \in C_c^1((0,\infty))$, então $\eta\varphi \in C_c^1(0,1)$ e

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\,\widetilde{u}\,\varphi' &= \int_0^1 u\,\eta\varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= -\int_0^1 \eta\varphi\,u' - \int_0^1 \eta'\varphi\,u \\ &= -\int_0^\infty (\widetilde{u'}\,\eta + \widetilde{u}\,\eta')\varphi. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 8.2.9 (Operador Extensão)**.** *Seja $1 \le p \le \infty$. Então existe $E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ linear contínuo tal que* *i)* $Eu\big|_I = u$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$,

ii) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$ *e*

iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{(1,p)}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

Além disso, constante C somente depende de $|I| \leq \infty$.

Prova: Comecemos pelo caso $I = (0, \infty)$ e vamos demonstrar que a extensão por reflexão tem as propriedades acima. Vimos no Teorema 8.2.5 que existe o limite $\lim_{x \to 0^+} u(x)$. Considere o operador $E : W^{1,p}(0,\infty) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ definido por

$$(Eu)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} u(x) & \text{se} \quad x = 0 \\ u(-x) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

É fácil ver que

$$\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{L^p(I)}$$

e que

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se} \quad x < 0 \\ -u'(-x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

é tal que $v \in L^p(\mathbb{R})$. Do Lema 8.2.4,

$$(Eu)(x) - (Eu)(0) = \int_0^x v(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

e $(Eu)' = v \in L^p(\mathbb{R})$, logo $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(0,\infty)}$.

Consideremos agora o caso I limitado. Sem perda de generalidade, podemos considerar $I = (0, 1)$. Dada $u \in W^{1,p}(I)$ escrevemos

$$u = \eta u + (1 - \eta)u.$$

A função ηu é facilmente prolongada por $\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$ pelo Lemma 8.2.8 e em seguida pode ser prolongada a $\mathbb{R}$ por reflexão. Obtemos assim uma função $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga ηu e tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)} \text{ e}$$
$$\|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad (C \text{ depende de } \|\eta'\|_\infty).$$

Procedemos de forma análoga para $(1-\eta)u$, ou seja, primeiro prolongamos $(1-\eta)u$ a $(-\infty,1)$ por zero fora de (0,1) depois se prolonga a $\mathbb{R}$ por reflexão (relativamente ao ponto 1) assim obtemos $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ que prolonga $(1-\eta)u$ e tal que é tal que

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)},$$
$$\|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Então $Eu = v_1 + v_2$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Em seguida mostramos que $\{u_{|_I} : u \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$ é denso em $W^{1,p}(I)$ para $1 \leq p < \infty$. Para isto necessitamos do seguinte resultado

Lemma 8.2.10. *Se $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e $\nu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$, então $\rho * \nu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $(\rho * \nu)' = \rho * \nu'$.*

Prova: Suponha primeiramente que ρ tem suporte compacto. Sabemos que $\rho * \nu \in L^p$. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho * \nu)\varphi' = \int_{\mathbb{R}} \nu(\check{\rho} * \varphi') = \int_{\mathbb{R}} \nu \overbrace{(\check{\rho} * \varphi)'}^{\in C_c^1(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} \nu'(\check{\rho} * \varphi) = -\int_{\mathbb{R}} (\rho * \nu')\varphi.$$

Se ρ não tem suporte compacto introduzimos uma seqüência (ρ_n) de $C_c(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ em $L^1(\mathbb{R})$. Pelo que acabamos de provar

$$\rho_n * \nu \in W^{1,p} \;\text{ e }\; (\rho_n * \nu)' = \rho_n * \nu',$$

mas, do Teorema 5.6.1 $\rho_n * \nu \to \rho * \nu$ em $L^p(\mathbb{R})$ e $(\rho_n * \nu)' = \rho_n * \nu' \to \rho * \nu'$ em $L^p(\mathbb{R})$. Segue que $(\rho * \nu)' = \rho * \nu'$ e $\rho * \nu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. $\square$

Vigésima Quinta Aula (100 minutos) ↑

Vigésima Sexta Aula (100 minutos) $\downarrow$

Teorema 8.2.11 (Densidade). *Se $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \le p < \infty$, então existe uma seqüência (u_n) em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|_I} \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Prova: Podemos sempre supor que $I = \mathbb{R}$ pois, se este não é o caso, primeiramente estendemos u a uma função de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ utilizando o Teorema 8.2.9. Utilizaremos uma técnica importante de convolução (que proporciona funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$) e truncamento (que proporciona funções com suporte compacto).

TRUNCAMENTO: Fixamos $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \xi \le 1$ e

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \ge 2. \end{cases}$$

Definimos a seqüência $\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x}{n}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema da Convergência Dominada que, se $f \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 \le p < \infty$, então $\xi_n f \to f$ em $L^p(\mathbb{R})$.

CONVOLUÇÃO: Elegemos uma seqüência regularizante $\{\rho_n\}$. Demonstraremos que a seqüência $u_n = \xi_n(\rho_n * u) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ converge para u quando $n \to \infty$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Primeiramente temos $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. De fato, se escrevemos

$$u_n - u = \xi_n[(\rho_n * u) - u] + [\xi_n u - u].$$

Segue do fato que $0 \le \xi_n \le 1$, do Teorema 5.6.9 e de $\|\xi_n f - f\|_{L^p(I)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|(\rho_n * u) - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0.$$

Do Lemma 8.2.10 temos que $(\rho_n * u)' = (\rho_n * u')$. Isto nos dá

$$u_n' = \xi_n'(\rho_n * u) + \xi_n(\rho_n * u')$$

e

$$\begin{aligned} \|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\le \|\xi_n'(\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\le \frac{C}{n}\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\xi_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

onde $C = \|\xi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. $\square$

Observação 20. *É evidente do teorema a seguir que, se $I \subsetneq \mathbb{R}$, então $C_c^\infty(I)$ não é denso em $W^{1,p}(I)$. De fato, qualquer função $u \in W^{1,p}(I)$ que não é identicamente nula na fronteira de I, não pode ser aproximada em $W^{1,p}(I)$ por funções $C_c^\infty(I)$.*

O Resultado a seguir foi provado em Análise I e será útil para obtenção do nosso próximo resultado.

Lemma 8.2.12 (A desigualdade de Young)**.** *Se $1 < p < \infty$, p^* é o seu expoente conjugado e a, b são números reais não negativos, então*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p^*}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{p^*} b \tag{8.6}$$

a igualdade só ocorre quando $a = b$.

Teorema 8.2.13. *Existe uma constante C (dependendo só de $|I| \leq \infty$) tal que*

i) $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, dito de outra forma $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}) \hookrightarrow L^\infty(I)$ com inclusão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, quando I é limitado.

ii) a inclusão $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ é compacta para $1 < p \leq \infty$.

iii) a inclusão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para $1 \leq q < \infty$.

Prova: Começamos provando i) para o caso $I = \mathbb{R}$. O caso geral segue deste graças ao Teorema 8.2.9. Seja $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Se $1 \leq p < \infty$ e $G(s) = |s|^{p-1}s$. A função $w = G(v)$ pertence a $C_c^1(\mathbb{R})$ e

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Portanto, para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt$$

e utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Logo, da desigualdade de Young (Lema 8.2.12)

$$|v(x)| \leq p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p^*}} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p^*} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \frac{1}{p} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \right) \leq e^{\frac{1}{e}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}.$$

e

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Para completar a prova de i) argumetamos por densidade tomando, para cada $u \in W^{1,p}$, uma seqüência $\{u_n\} \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (Teorema 8.2.11). Aplicando a desigualdade acima obtemos que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R})$. Portanto $u_n \to u$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\begin{array}{ccc} \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} & \leq & C\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} & \leq & C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \end{array}$$

provando i).

Prova de ii): Seja $\mathcal{F}$ a bola unitária de $W^{1,p}(I) \quad 1 < p \leq \infty$. Para $u \in \mathcal{F}$ temos que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| &\leq \|u'\|_{L^p} |x-y|^{1/p^*}, \quad \forall \ x, y \in I \\ &\leq |x-y|^{1/p^*}, \quad \forall \ x, y \in I. \end{aligned}$$

Segue do Teorema de Arzelá-Ascoli que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $C(\overline{I})$.

Prova de iii): Seja $\mathcal{F}$ a bola unitária de $W^{1,1}(I)$. Para mostrar que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^q(I)$, $1 \leq q < \infty$ aplicamos o Corolário 5.7.2 (do Teorema de Fréchet-Kolmogorov). Verifiquemos suas hipóteses.

Seja $\omega \subset\subset I$, $u \in \mathcal{F}$ e $|h| < \operatorname{dist}(\omega, I^c)$.
Segue da Proposição 8.2.6 que iii)

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq |h| \|u'\|_{L^1(I)} \leq |h|.$$

Portanto

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q dx \leq \left(2^{q-1} \|u\|_{L^\infty}^{q-1} \right) \int_\omega |u(x+h) - u(x)| dx \leq C|h|$$

e consequentemente

$$\left(\int_{\omega} |u(x+h)-u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C^{\frac{1}{q}}|h|^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \quad \text{se} \quad h < \delta$$

Para verificar a condição restante note que, para $u \in \mathcal{F}$

$$\|u\|_{L^q(I\backslash w)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)}|I\backslash\omega|^{\frac{1}{q}} < \varepsilon$$

se $|I\backslash\omega|$ é pequeno.

O Corolário 5.7.2 implica o resultado. $\square$

Observação 21.

- $W^{1,1} \hookrightarrow C(\overline{I})$ *e contínua mas nunca é compacta* (*mesmo se* $|I| < \infty$).
- *Se* I *não é limitado* $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(I)$ *não é compacta.*
- *Se* I *é um intervalo limitado e* $1 \leq q \leq \infty$ *o teorema anterior prova que*

$$\|u\| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

é equivalente a mesma de $W^{1,p}(I)$.

- *Se* I *é ilimitado e se* $u \in W^{1,p}(I)$ *então* $u \in L^q(I) \;\; \forall \;\; q \in [p,\infty)$ *pois*

$$\int \|u\|^q \;\leq\; \|u\|_{L^\infty}^{q-p}\;\|u\|_{L^p}^p$$

mas em geral $u \notin L^q(I)$ *para* $q \in [1,p)$.

Vigésima Sexta Aula (100 minutos) ↑

Corolário 8.2.14. *Se I for um intervalo ilimitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$, então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

Prova: Do Teorema 8.2.11, existe uma seqüência $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|_I} \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Segue do Teorema 8.2.13 que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon$, para todo $n \geq N$. Disto segue que, $|u(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com $|x|$ suficientemente grande. □

Corolário 8.2.15 (Derivação do Produto)**.** *Sejam u e $v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in W^{1,p}(I)$ e*

$$(uv)' = u'v + uv' \ .$$

Além disso, do Teorema 8.2.5, vale a fórmula de integração por partes

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds \quad \forall \quad x, y \in \bar{I}.$$

Prova: Notemos que $u \in L^\infty(I)$ e portanto $uv \in L^p(I)$. Comecemos pelo caso $1 \leq p < \infty$. Se $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ são seqüências de $C_c^1(\mathbb{R})$ tais que $u_{n|_I}$ e $v_{n|_I}$ convergem para u e v respectivamente em $W^{1,p}(I)$, então $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $L^\infty(I)$. Logo $u_n v_n \to uv$ em $L^p(I)$. Temos então

$$(u_n v_n)' = {u_n}' v_n + u_n {v_n}' \to u'v + uv' \quad \text{em} \quad L^p(I).$$

Logo $u, v \in W^{1,p}(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$.
Suponha agora que $u, v \in W^{1,\infty}(I)$. Então,

$$uv \in L^\infty(I) \ \text{ e } \ u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Resta apenas mostrar que $u'v + uv'$ é a derivada fraca de uv. Seja $\varphi \in C_c^1(I)$ e $\widetilde{I}$ limitado tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \widetilde{I} \subset I$. Então $u, v \in W^{1,p}(\widetilde{I})$, $\forall p < \infty$ de onde segue que

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Como φ é arbitrária em $C_c^1(I)$ o resultado segue. □

Corolário 8.2.16 (Derivação da Composição). *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'$$

Prova: Seja $M = \|u\|_{L^\infty(I)}$. Como $G(0) = 0$ exite C tal que $|G(s)| \leq C|s|$ para $s \in [-M, M]$. Então $G \circ u \in L^p(I)$ pois $|G \circ u| \leq C|u|$. Da mesma forma $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Resta mostrar que

$$\int (G \circ u)\varphi' = -\int (G' \circ u)u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$. Então existe uma seqüência $\{u_n\} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|_I} \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e, do Teorema 8.2.13, em $L^\infty(I)$. Isto, juntamente com a continuidade uniforme de G e G' em intervalos limitados de $\mathbb{R}$, nos dá que $G \circ u_n \to G \circ u$ e $G' \circ u_n \to G' \circ u$ em $L^\infty(I)$. Consequentemente $(G' \circ u_n){u_n}' \to (G' \circ u)u'$ em $L^p(I)$ e, de

$$\int (G \circ u_n)\varphi' = -\int (G' \circ u_n)u_n'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

resulta que

$$\int (G \circ u)\varphi' = -\int (G' \circ u)u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

O caso $p = \infty$ segue como no Corolário 8.2.15. □

8.3 Os Espaços $\mathbf{W^{m,p}(I)}$

Definição 8.3.1. *Dados $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$ definimos por recorrência o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

Escrevemos $H^m(I) = W^{m,2}(I)$.

- $u \in W^{m,p}(I) \iff$ existem m funções $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tais que

$$\int u D^j\varphi = (-1)^j \int g_j\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^m(I), \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m.$$

  Denotamos g_j por $D^j u$.

- O Espaço $W^{m,p}(I)$ é munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(I)}$$

e $H^m(I)$ é munido do produto interno

$$(u,v)_{H^m(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(I)}$$

- Pode-se mostrar que a norma $\|\cdot\|_{W^{m,p}(I)}$ é equivalente a norma $\|u\| = \|u\|_{L^p(I)} + \|D^m u\|_{L^p(I)}$ adicionalmente pode-se estabelecer que

$$\|D^j u\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon \|D^m u\|_{L^p(I)} + C\|u\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{m,p}(I)$$

- $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$.

8.4 O Espaço $\mathbf{W_0^{1,p}(I)}$

Definição 8.4.1. *Dado $1 \leq p < \infty$ designamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_c^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Denotaremos $W_0^{1,2}(I)$ por $H_0^1(I)$.*

- *$W_0^{1,p}(I)$ é separável se $1 \leq p < \infty$, reflexivo se $1 < p < \infty$ e $H_0^1(I)$ é Hilbert com o produto interno herdado de $H^1(I)$.*

- *$C_c^1(I)$ é denso em $W^{1,p}(I)$ se, e somente se, $I = \mathbb{R}$ ($W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$).*

- *Usando seqüências regularizantes concluímos que $C_c^\infty(I)$ é um subespaço denso em $W_0^{1,p}(I)$*

- *Se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$.*

Teorema 8.4.2. *Se $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Prova: Se $u \in W_0^{1,p}(I)$ existe uma seqüência $\{u_n\}$ de $C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$. Portanto $u_n \to u$ uniformemente em $\bar{I}$ e consequentemente $u = 0$ em ∂I.

Reciprocamente, seja $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u = 0$ em ∂I. Vamos fazer a prova apenas no caso $I = (a, \infty)$, os demais casos são análogos.

Se existe uma seqüência $a_n \in (a, \infty)$ tal que $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tomamos

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ x \in (a_n, \infty) \\ 0, \ x \in (a, a_n]. \end{cases}$$

Disto segue que $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I) \subset W_0^{1,p}(I)$ e

$$\|u - u_n\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{W^{1,p}(a,a_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Por outro lado, se existe $b > a$ tal que $u(x) \neq 0$ em $(a, b]$, tomamos $n > \frac{2}{|u(b)|}$

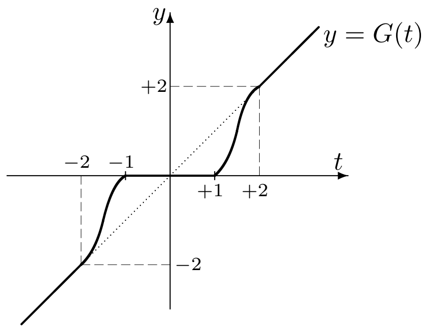
$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ x \in (b, \infty) \\ \dfrac{1}{n} G(nu(x)), \ x \in (a, b], \end{cases}$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ t & \text{se} \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

e

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$$



O Corolário 8.2.16 nos dá que $u_n \in W^{1,p}(I)$.

Por outro lado

$$\text{supp}(u_n) \subset \left\{ x \in (a, b) : |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \cup [b, \infty)$$

Consequentemente, $u_n \in W_0^{1,p}(I)$. Para ver que $u \in W_0^{1,p}(I)$, note que

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)| \quad &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0, \quad \forall x \in I \\ |u_n(x) - u(x)| \ &\leq \ 2\,|u(x)|, \quad \forall n \text{ e } \forall \ x \in I. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\|u_n - u\|_{L^p(I)}^p = \int_I |u_n(x) - u(x)|^p dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para as derivadas temos que existe uma constante C independente de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|G'(nu')\|_{L^\infty(I)} \leq C$ e assim, em (a,b),

$$u_n' = G'(nu)u' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u' \text{ quase sempre}$$

$$|u_n' - u'| = |G'(nu) - 1||u'| \leq (C+1)|u'|$$

e novamente aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\|u_n' - u'\|_{L^p(I)}^p = \int_a^b |u_n{}'(x) - u'(x)|^p dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e segue que $u \in W_0^{1,p}(I)$. □

Teorema 8.4.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Se I é um intervalo limitado, então*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq (1+|I|)\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Prova: Se $u \in W_0^{1,p}(I)$ e $I = (a,b)$, então

$$u(x) = u(x) - u(a) = \int_a^x u'(s)ds$$

de onde obtemos que $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq |I| \; \|u'\|_{L^\infty(I)}$ para o caso $p = \infty$ e

$$|u(x)|^p \leq |I|^{\frac{p}{p^*}} \int_I |u'|^p$$

para o caso $p < \infty$. Então

$$\left(\int_I |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |I| \left(\int_I |u'|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja $\|u\|_{L^p(I)} \leq |I| \; \|u'\|_{L^p(I)}$ e o resultado segue. □

Observação 22.

1) *$\langle u', v'\rangle_{L^2(I)}$ define um produto interno em $H_0^1(I)$ se $|I| < \infty$ e $\|u'\|_{L^2(I)}$ define uma norma equivalente à norma de $H^1(I)$ em $H_0^1(I)$.*

2) *Dado $m \geq 2$ definimos $W_0^{m,p}(I)$ como o fecho de $C_c^\infty(I)$ em $W^{m,p}(I)$. Note que $W_0^{2,p}(I) \neq W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I)$ e que*

$$W_0^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m,p}(I) : u = u' = \ldots = u^{m-1} = 0 \quad em \quad \partial I\right\}$$

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \left\{u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \quad em \quad \partial I\right\}$$

Vigésima Sétima Aula (100 minutos) ↑

Vigésima Oitava Aula (100 minutos) ↓

8.5 O Dual de $\mathbf{W_0^{1,p}(I)}$

Definimos

$$W^{-1,p^*}(I) := \left(W_0^{1,p}(I)\right)^*, \quad 1 \leq p < \infty$$

$H^{-1}(I) := (H_0^1(I))^*$. Se identificamos $L^2(I)$ com seu dual temos

$$H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I) \hookrightarrow H^{-1}(I)$$

com inclusões contínuas e densas. Se $|I| < \infty$

$$W_0^{1,p}(I) \hookrightarrow L^2(I) \hookrightarrow W^{-1,p^*}(I), \quad \forall 1 \leq p < \infty$$

e se $|I| = \infty$

$$W_0^{1,p}(I) \hookrightarrow L^2(I) \hookrightarrow W^{-1,p^*}, \quad \forall 1 \leq p \leq 2$$

com inclusões contínuas e densas.

Proposição 8.5.1. *Se $F \in W^{-1,p^*}(I)$, existem $f_0, f_1 \in L^{p^*}(I)$ tais que*

$$\langle F, v\rangle = \int_I f_0 v + \int_I f_1 v', \quad \forall v \in W^{1,p}(I)$$

e $\|F\| = \max\{\, \|f_0\|_{L^{p^*}}, \|f_1\|_{L^{p^*}}\}$. Se $|I| < \infty$ podemos tomar $f_0 = 0$.

Prova: Seja $X = L^p(I) \times L^p(I)$ com a norma $\|(h_0, h_1)\|_X = \|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)}$, $h = (h_0, h_1)$. A transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : W_0^{1,p}(I) & \to & X \\ u & \to & (u, u') \end{array}$$

é uma isometria de $W_0^{1,p}$ em X . Se $Y = T(W_0^{1,p}(I))$ com a norma induzida por X e $S : Y \to W^{1,p}(I)$ tal que $S(u, u') = u$. A transformação linear $Y \ni y \mapsto \langle F, Sh\rangle$ é um funcional linear contínuo sobre Y . Pelo Teorema de Hahn-Banach (Corolário 1.3.11) podemos estender este funcional a um funcional sobre $\phi \in X^*$, com $\|\phi\|_{X^*} = \|F\|$. Do Teorema de Representação de Riesz para espaços L^p (Teorema 5.2.10), existem $f_0, f_1 \in L^{p^*}(I)$ tais que,

$$\langle \phi, h\rangle = \int_I f_0 h_0 + \int_I f_1 h_1, \quad \forall h \in X.$$

Tomando $h = \left(\frac{f_0^{p^*-1}}{\|f_0\|_{L^{p^*}(I)}^{p^*-1}}, 0 \right)$ e $h = \left(0, \frac{f_1^{p^*-1}}{\|f_1\|_{L^{p^*}(I)}^{p^*-1}} \right)$, segue que

$$\|F\|_{W^{-1,p^*}(I)} = \|\phi\|_{X^*} = \max\{\ \|f_0\|_{L^{p^*}}, \|f_1\|_{L^{p^*}}\}\,.$$

Se I é limitado podemos colocar em $W_0^{1,p}(I)$ a norma $\|u'\|_{L^p(I)}$ e usar o argumento acima com $X = L^p(I)$ e

$$\begin{array}{rcl} T : W_0^{1,p} & \to & L^p(I) \\ u & \to & u' \end{array}$$

$\square$

Observação 23.

- *Em geral, as funções f_0 e f_1 não são únicamente determinadas por F.*
- *As conclusões acima continuam válidas para $W^{1,p}(I)$.*

8.6 Exemplos de Problemas de Contorno

O objetivo desta seção é estudar alguns problemas de valor de fronteira utilizando os Teoremas de Lax-Milgram e Stampacchia e os espaços de Sobolev.

Primeiramente vamos utilizar o **Teorema de Lax-Milgram** para mostrar que o problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

tem uma única "solução" u (em algum sentido) para cada f em $C(\bar{I})$ ou em $L^2(I)$. Além disso, esta solução depende continuamente de f.

Definição 8.6.1. *Uma solução clássica de* (8.7) *é uma função $u \in C^2(\bar{I})$ que verifica* (8.7). *Uma solução forte de* (8.7) *é uma função $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ tal que $-u'' + u = f$ quase sempre em I. Uma solução fraca de* (8.7) *é uma função $u \in H_0^1(I)$ que verifica*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Observação 24. *É fácil ver (do Corolário 8.2.15) que toda solução forte (clássica) é uma solução fraca.*

A proposição a seguir estabelece a existência e unicidade de solução fraca para o problema (8.7).

Proposição 8.6.2. *Para toda $f \in L^2(I)$, existe uma única $u \in H_0^1(I)$ solução fraca de* (8.7). *Além disso, u é caracterizado por*

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\} = \frac{1}{2} \int_I (u'^2 + u^2) - \int_I fu.$$

Esta caraterização é chamada Princípio de Dirichlet.

Prova: Se

$$a(u,v) = \langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \int_I u'v' + \int_I uv \quad \text{e} \quad \varphi : v \to \int_I fv : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$$

é fácil ver que as hipóteses do Teorema 6.2.3 (Teorema de Lax Milgram) estão satisfeitas. Segue que existe um único $u \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

e além disso, como $a(\cdot,\cdot)$ é simétrica, u é caracterizado pelo princípio de Dirichlet. □

Observação 25. *Se $\varphi \in H^{-1}(I) = (H_0^1(I))^*$, existe uma única função $u \in H_0^1(I)$ tal que*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \varphi(v), \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Além disso, o operador $\varphi \mapsto u : H^{-1} \to H_0^1$ é uma isomometria de $H^{-1}(I)$ sobre $H_0^1(I)$. Neste caso diremos que u é uma solução generalizada de $-u'' + u = \varphi$, $u(0) = u(1) = 0$.

O nosso próximo resultado estabelece que toda solução fraca de (8.7) é de fato uma solução forte de (8.7).

Proposição 8.6.3. *Se $f \in L^2(I)$ e $u \in H_0^1$ é a solução fraca de* (8.7), *então $u \in H^2(I)$. Além disso, $-u'' + u = f$ quase sempre em I. Isto mostra que toda solução fraca de* (8.7) *é uma solução forte de* (8.7)

Prova: Segue do fato que u é uma solução fraca de (8.7) que

$$\int_I u'v' = -\int_I (u-f)v, \quad \forall v \in C_c^1(I).$$

Desta forma, $u' \in H^1(I)$ (pois $u - f \in L^2(I)$) e portanto $u \in H^2(I)$. Além disso

$$\int_I (u')'v = \int_I (u-f)v, \quad \forall v \in C_c^1(I)$$

e portanto $u'' := (u')' = u - f$ quase sempre em I; ou seja, $-u'' + u = f$ quase sempre em I. $\square$

Já vimos que uma solução fraca $u \in C^2(\bar{I})$ é uma solução clássica. O resultado a seguir estabelece que a recíproca também vale sempre que $f \in C(\bar{I})$.

Corolário 8.6.4. *Se $f \in C(\bar{I})$ e $u \in H_0^1(I)$ é a solução fraca de* (8.7)*, então u é uma solução clássica de* (8.7)*.*

Prova: Se $f \in C(\bar{I})$ temos que $u'' \in C(\bar{I})$ e portanto $u' \in C^1(\bar{I})$ e $u \in C^2(\bar{I})$. $\square$

A seguir vamos utilizar o **Teorema de Stampacchia** para mostrar que o problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in I = (0,1), \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases} \tag{8.8}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem uma única "solução" (em algum sentido) u para cada f em $C(\bar{I})$ ou em $L^2(I)$. Além disso, essa solução depende continuamente de f.

Seja $K = \{u \in H^1(I) : u(0) = \alpha \text{ e } u(1) = \beta\}$. Definimos

Definição 8.6.5. *Uma solução clássica de* (8.7) *é uma função $u \in C^2(\bar{I})$ que verifica* (8.7)*. Uma solução fraca de* (8.7) *é uma função $u \in K$ que verifica*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Proposição 8.6.6. *Dados $f \in L^2(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe uma única $u \in H^2(I)$ que verifica* (8.8)*. Além disso u é caracterizada por*

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\} = \frac{1}{2} \int_I (u'^2 + u^2) - \int_I fu.$$

Se $f \in C(\bar{I})$, então $u \in C^2(\bar{I})$.

Prova: Se $a(u,v) = \displaystyle\int_I u'v' + \int_I uv = \langle u, v\rangle_{H^1(I)}$, $\varphi : v \to \displaystyle\int_I fv : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ e K é o subconjunto convexo fechado definido acima é fácil ver que as hipótese do Teorema 6.2.2 (Teorema de Stampacchia) estão satisfeitas. Segue do Teorema 6.2.2 que existe uma única $u \in K$ tal que

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u), \quad \forall v \in K.$$

Além disso, u é caracterizada por

$$\min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv\right\} = \frac{1}{2}\int_I (u'^2 + u^2) - \int_I fu.$$

Para mostrar que u é uma solução fraca de (8.8) fazemos $v = u \pm w$ com $w \in H_0^1(I)$ e obtemos que

$$\int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw, \quad \forall w \in H_0^1(I).$$

Procedendo exatamente como antes obtemos que $u \in H^2(I)$ e que $-u''+u = f$ quase sempre em I. É óbvio que se $f \in C(\bar{I})$, então $u \in C^2(\bar{I})$. $\square$

Inserir um exemplo onde a forma bilinear não é simétrica e outro para as condições de Neumann.

Vigésima Oitava Aula (100 minutos) $\uparrow$

8.7 Auto-Funções e Decomposição Espectral

Seja $I = (0,1)$ e denotemos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números inteiros positivos.

Teorema 8.7.1. *Seja $p \in C^1(\bar{I})$ com $p \geq \alpha > 0$ sobre I e $q \in C(\bar{I})$. Então existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de números reais e uma base Hilbertiana $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(I)$ tais que $u_n \in C^2(\bar{I})$ e*

$$\begin{cases} -(pu_n')' + qu_n = \lambda_n u_n, & \text{em } I \\ u_n(v) = u_n(1) = 0. \end{cases}$$

Além disso, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Diremos que $\{\lambda_n\}$ é a seqüência de auto-valores do operador diferencial $Au = -(pu')' + qu$ com condição de fronteira de Dirichlet e $\{u_n\}$ é a seqüência de auto-funções associadas.

Prova: Podemos sempre supor $q \geq 1$ pois, se este não é o caso, escolhemos C tal que $q + C \geq 1$ e substituímos λ_n por $\lambda_n + C$ na equação. Procedendo exatamente como fizemos para (8.7), é fácil ver que, dada $f \in L^2(I)$ existe uma única $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ tal que

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{8.9}$$

Designamos por T o operador que a cada $f \in L^2(I)$ associa a solução $u \in H^2 \cap H_0^1$ de (8.9). Mostraremos que $T : L^2(I) \to L^2(I)$ é um operador auto-adjunto e compacto.

Primeiramente mostremos que T é compacto. Se $f \in L^2(I)$ e $u = Tf$, temos que

$$\int_I pu'^2 + \int_I qu^2 = \int_I fu.$$

Disto segue que

$$\alpha\|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \leq \left(\int_I f^2\right)^{1/2} \left(\int_I u^2\right)^{1/2}$$

e portanto existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{H^1(I)} = \|u\|_{H^1(I)} \ \leq c\|f\|_{L^2}.$$

Isto implica que T leva limitados de $L^2(I)$ em limitados de $H^1(I)$ (que são compactos em $L^2(I)$). Logo T é compacta.

A seguir mostraremos que T é auto adjunta. Para este fim, mostremos que

$$\int (Tf)g = \int f(Tg), \quad \forall f, g \in L^2(I).$$

De fato, se $u = Tf$ e $v = Tg$, temos

$$\begin{cases} -(pu')' + gu = f, & \text{quase sempre em } I, \\ -(pv')' + qv = g, & \text{quase sempre em } I \end{cases}$$

e multiplicando a primeira equação por v e a segunda por u e integrando

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I f \overset{Tg}{\overset{\shortparallel}{v}} = \int_I g \overset{Tf}{\overset{\shortparallel}{u}} .$$

Por fim note que

$$\int_I (Tf)f = \int_I uf = \int_I (pu'^2 + qu^2) \geq 0, \quad \forall f \in L^2(I) \tag{8.10}$$

Por outro lado $N(T) = \{0\}$ pois se $Tf = u = 0$ então $f = 0$.

Do Teorema 7.4.4, $L^2(I)$ admite uma base Hilbertiana $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ formada de auto-vetores de T associados a auto-valores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Temos que $\mu_n > 0$ (de fato, $\mu_n \geq 0$ de (8.10) e $\mu_n \neq 0$ pois $N(T) = \{0\}$) e $\mu_n \to 0$. Escrevendo $Tu_n = \mu_n u_n$ temos que

$$-(\rho\mu_n {u_n}')' + q\mu_n u_n = u_n \ \Leftrightarrow \ -(p{u_n}')' + qu_n = \frac{1}{\mu_n}\, u_n.$$

Logo, $\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n}$. Por fim, $u_n \in C^2(\bar{I})$ pois $f = \lambda_n u_n \in C(\bar{I})$. $\square$

Exemplo 8.7.1. *Se* $p = 1, \quad q \equiv 0$, $u_n = \sqrt{2}\ sen(n\pi x)$ *e* $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Vigésima Nona Aula (100 minutos) $\uparrow$

Referências Bibliográficas

[1] **H. Brézis**, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid (1984) [Livro Texto].

[2] **G. B. Folland**, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Willey & Sons, New York, (1999) [Livro Texto].

[3] **C. Goffman and G. Pedrick**, *First Course in Functional Analysis*, Chelsea Publishing Company, New York, 1983.

[4] **W. E. Pfaffenberger**, A converse to a completeness theorem, *American Mathematical Monthly*, Vol. 87, 216 (1980).

[5] **H. L. Royden**, *Real Analysis*, Macmilan Publishing Company, New York, (1988).

[6] **G. F. Simmons**, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Tokyo (1963).