UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLÁUDIA RIBEIRO SANTANA

Equações de Schrödinger quase lineares com potencial não negativo

RECIFE
2014

CLÁUDIA RIBERIRO SANTANA

Equações de Schrödinger quase lineares com potencial não negativo [1]

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

RECIFE

2014

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da Universidade Estadual de Santa Cruz-Ilhéus-Bahia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

João Marcos Bezerra do Ó, *UFPB*
Orientador

____

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

____

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, *UFPB*

____

Olimpio Hiroshi Miyagaki , *UFJF*

EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER QUASILINEARES
COM POTENCIAL NÃO NEGATIVO

Por

Cláudia Ribeiro Santana

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
17 de Fevereiro – 2014

Aos meus pais

Calixto Silva Santana (In memorian) e

Djanira Ribeiro Santana

Agradecimentos

A Deus por ter me concedido a bênção de ter uma belíssima família, força para superar as dificuldades que encontrei no caminho e fornecer a paz que eu precisava para seguir em frente.

Aos meus pais, Calixto Silva Santana (In Memorian) e Djanira Ribeiro Santana, por toda a dedicação e empenho que tiveram na minha criação e por sempre investirem na minha educação. Todas as minhas conquistas só foram possíveis devido ao suporte de vocês.

Ao meu irmão, Menandro Ribeiro Santana, pelo companheirismo, por ser verdadeiramente irmão e pela capacidade de se manter racional em meio à turbulências.

Ao meu orientador, Profº João Marcos do Ó, pela minha formação em Análise, pelos ensinamentos, incentivos, dedicação e compreensão durante todo o doutorado.

A Profª Elisandra Gloss (DM-UFPB) pela paciência, pelas discussões, críticas e sugestões que possibilitaram o desfecho desta tese.

Aos professores do DMAT-UFPE e DM-UFPB pelo excelente ambiente acadêmico.

A todos os meus professores do CEFET-Ba, da UFBA, do IMPA, da UFPE e da UFPB, por terem contribuído para o meu crescimento intelectual e profissional. Em especial: Profª Zulmira (In Memorian), por ter sido uma figura inspiradora; Profº José Fernandes (DMAT-UFBA) e Profª Ednalva Vergasta (DMAT-UFBA), meus orientadores de iniciação científica, que me incentivaram a seguir a carreira acadêmica; Profº Aron Simis (DMAT-UFPE), pela minha formação na área de Álgebra, pelo apoio e sábios conselhos; Profº Bruno Scárdua (IM-UFRJ), pela sua excelente orientação durante o mestrado e por ser uma pessoa simples, íntegra e generosa;

A todos os amigos que me ajudaram durante essa jornada, em especial, ao meu estimado amigo Profº Enio Jelihovschi (DCET-UESC), pelo apoio em momentos difíceis e na resolução de assuntos burocráticos junto à UESC e ao Profº Joseph Yartey (DMAT-

UFBA), pela sincera amizade desde os tempos de mestrado no IMPA e pelo auxílio na ferramenta Latex.

A minha amiga Thays Mendonça (DMAT-UFMS) que me acompanha desde os tempos da graduação em Matemática na UFBA.

Aos meus queridos três mosqueteiros: Eudes Barbosa, Esteban Perreira e Ricardo Pinheiro pelas conversas regadas a café que tornaram ainda mais prazerosa a minha estadia em João Pessoa.

A Tânia Maranhão, Antônio Brandão e Nilza Serafim pela diligência e dedicação com que exercem suas atividades profissionais na UPFE.

A UESC pela liberação das minhas atividades como professora assistente nesta Instituição e apoio financeiro durante o período do doutorado.

"Invictus"

Do fundo desta noite que persiste
A me envolver em breu - eterno e espesso,
A qualquer deus - se algum acaso existe,
Por mi'alma insubjugável agradeço.
Nas garras do destino e seus estragos,
Sob os golpes que o acaso atira e acerta,
Nunca me lamentei - e ainda trago
Minha cabeça - embora em sangue - ereta.
Além deste oceano de lamúria,
Somente o Horror das trevas se divisa;
Porém o tempo, a consumir-se em fúria,
Não me amedronta, nem me martiriza.
Por ser estreita a senda - eu não declino,
Nem por pesada a mão que o mundo espalma;
Eu sou dono e senhor de meu destino;
Eu sou o comandante de minha alma.

Autor: William E Henley

Tradutor: André C S Masini

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre algumas classes de equações de Schrödinger não lineares com potenciais que podem, eventualmente, se anular no infinito e com não linearidade subcrítica. Provamos a existência de pelo menos uma solução do tipo passo da Montanha para cada uma destas classes de EDP's usando métodos puramente variacionais, a saber, o Teorema do passo da Montanha, o método de penalização e o esquema de iteração de Moser.

Palavras-chave: p-Laplaciano. Crescimento subcrítico. Métodos Variacionais. Teorema do Passo da Montanha. Funções p-harmônicas

Abstract

This paper presents a study of some classes of nonlinear Schrödinger equations with potential that can eventually vanish at infinity and subcritical nonlinearity. We prove the existence of at least one Mountain-Pass type solution for each step of of these classes of PDE's using purely variational methods, namely the Mountain Pass Theorem, the method of penalization and Moser iteration scheme.

Keywords: p-Laplacian. Subcritical growth. Variational Methods. Mountain Pass Theorem. Functions p-harmonic.

Lista de Símbolos

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

- $c, C, C_0, C_1, \cdots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $\operatorname{supp}(f)$ denota o suporte da função f;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e o raio R;
- $A(x;\, r,\, R)$ denota o anel $\{y \in \mathbb{R}^N :\, r \leq |x-y| \leq R\}$;
- $\rightharpoonup$ e $\rightarrow$ denotam convergência fraca e forte, respectivamente, num espaço normado X;
- $\langle \cdot\,,\ \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre o espaço X e o seu dual X';
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\Delta_p u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ denotam respectivamente o laplaciano de u e o $p-$laplaciano de u, para $1 < p < \infty$;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável: } \displaystyle\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty\right\}$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ conjunto aberto, com norma dada por

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p \ \mathrm{d}x\right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \, \text{mensurável: } \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\}$ com norma dada por

$$||u||_\infty = \inf\{C > 0 : \ |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C^0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_c(\Omega)$ são funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega)$, $k \leq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$;

- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais de ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;

- $C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ são as funções que pertencem a $C^{0,\alpha}(K)$ para todo compacto K de Ω, onde α depende de K;

- $C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ são as funções $C^{k,\alpha}(\Omega)$ tais que as derivadas de ordem k estão em $C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$;

- Para $1 \leq p < \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \varphi \, \mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \cdots, N \end{array} \right\}$$

com norma dada por

$$||u||_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, \mathrm{d}x \right]^{1/p}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i = \partial u / \partial x_i$;

- Para $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p < \infty$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \cdots, N \right\};$$

- Para $1 \leq p < \infty$, $W{-1}, p'(\Omega)$ denota o dual de $W^{1,p}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

- O exponente crítico de Sobolev é dado por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p}, & \text{se } 1 \leq p < N \\ \infty, & \text{se } p \geq N \end{cases};$$

- $D'(\Omega)$ denota os espaços das distribuições;

- Se E é um espaço de Banach e $A \subset E$ denotamos $A^\delta = \{x \in E : \text{dist}(x, A) \leq \delta\}$ e $A_\delta = \{x \in E : \delta_x \in A\}$ para qualquer $\delta > 0$.

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$, munido do produto interno

$$\int_{R^N} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x.$$

  e da sua norma usual correspondente

$$||u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{R^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

- $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}) : \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$, sua norma usual

$$||u||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

- $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) :$ existe $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u(x) = v(|x|)$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^N\}$, sua norma usual

$$||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = ||u||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho estudamos questões relacionadas à existência de soluções para as seguintes classes de equações elípticas não lineares

$$-\Delta_p u + V(x) \mid u \mid^{p-2} u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

$$-\Delta_p u - \Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

$$-\Delta u + V(x)u - [\Delta(u^2)]u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)F_u(u,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)F_v(u,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4}$$

onde $N \geq 3$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa, $f, h, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $F : ([0,\infty) \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$ função p-homogênea de classe C^1 que satisfazem determinadas condições a serem descritas em cada capítulo. Tais equações estão relacionadas com a seguinte equação diferencial parcial, proposta em 1925 pelo físico Erwin Schrödinger,

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + W(x)\psi - \eta(|\psi^2|)\psi - \kappa[\Delta\rho(|\psi^2|)]\rho^{'}(|\psi^2|)\psi, \tag{5}$$

onde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função potencial dada e $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções suaves. Tais equações modelam diversos fenômenos físicos a depender da função ρ adotada como, por exemplo, na física do plasma estuda-se a equação (5) com $\rho(s) = s$ e é denominada equação da membrana de superfluído. Equações de Schrödinger aparecem também na mecânica dos fluídos, na teoria de ferromagneto de Heisenberg, bem como, na mecânica quântica dissipativa e na teoria da matéria condensada. Para motivação física e saber mais detalhes sobre o desenvolvimento de tais equações sob o aspecto físico citamos os seguintes artigos [18, 32, 44] e as referências lá contidas.

Do ponto de vista matemático, estes problemas estão relacionados a busca por soluções do tipo ondas solitárias para a equações de Schrödinger e em geral, supõe-se que o potencial $W(x)$ seja ser coercivo ou que tenha ínfimo postivo, ou seja, $\inf_{\mathbb{R}^N} W(x) > 0$. Citamos alguns trabalhos relevantes que foram desenvolvidos sob estas hipóteses: Berestycki & Lions [12], Costa [21] e suas referências. Alguns recentes trabalhos buscaram enfraquecer a hipótese de que o potencial $W(x)$ tenha ínfimo positivo. Destacamos os seguintes artigos: Ambrosetti, Felli & Malchiodi [5]; Ambrosetti, Malchiodi & Ruiz [6]; Benci, Grisanti & Micheletti [10] e Alves & Souto [4]. Usando métodos puramente variacionais, a saber o Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti, Felli & Malchiodi [5] estudaram a seguinte classe de equações de Schrödinger não-lineares com potenciais que podem se anular no infinito

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = K(x)u^p \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{6}$$

onde $N \geq 3$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ e os potenciais $V(x)$, $K(x)$ são limitados, C^∞, e podem decair a zero quando $|x| \to \infty$. Mostraram que para cada $\varepsilon > 0$ dado existe uma solução v_ε de energia mínima e que tais soluções se concentram em torno do ponto de máximo global da função $\mathcal{A}(x) := [V(x)]^\theta \, [K(x)]^{-2/(p-1)}$ onde $\theta = ((p+1)/(p-1)) - (N/2)$ quando $\varepsilon \to 0$. Neste trabalho pioneiro, os autores modelam o problema (6) no seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right] \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

e mostram que o mergulho $\mathcal{H}_\varepsilon \hookrightarrow L_K^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ é compacto para $\sigma < p < (N+2)/(N-2)$, onde σ é uma constante que depende de N e dos graus de decaimento dos potenciais V e K. O caso em que $V(x)$ é não negativo, podendo se anular no infinito e satisfazendo a condição $|\{x \in R^N : V(x) > 0\}| > 0$ foi analisado por Benci, Grisanti & Micheletti em [10]. Neste caso, os autores mostraram que a seguinte equação de Schrödinger não-linear com potencial podendo se anular no infinito

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f'(u) \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \\ \qquad u(x) > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{7}$$

onde f tem crescimento subcrítico, não tem solução de energia mínima. No caso do potencial $V(x)$ ser não-positivo, se anulando no infinito e satisfazendo a condição $|\{x \in R^N : V(x) < 0\}| > 0$ então a equação (7) tem solução de energia mínima. Neste artigo, os autores modelaram o problema em um subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, neste caso, é visto como subespaço do espaço de Orlicz $L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$, observando que o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ pode ser imerso continuamente no espaço de Orlicz $L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $2 < p < 2^* < q$, fato que segue da imersão de Sobolev e da propriedade de interpolação, ou seja, $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) + L^q(\mathbb{R}^N)$. Além disso, utilizaram métodos variacionais de minimização na variedade de Nehari de Classe C^1

$$\mathcal{N}^V = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \int \mathbb{R}^N |\nabla u|^2 + V(x)u^2 - f'(u)\, \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Alves & Souto [4], resolveram o problema de existência para a seguinte classe de EDP's com potencial podendo se anular no infinito

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \\ \qquad u(x) > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{8}$$

onde f tem crescimento subcrítico e o potencial $V(x)$ é contínuo, não negativo e satisfaz a seguinte condição

(V_1) Existem números reais $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \mu.$$

Nesta tese provaremos a existência de soluções para as classe de equações (1), (2),(3), (4). Aqui consideramos o caso onde $\rho(s) = s$, $\kappa = 0$, 1 e estamos interessados principalmente na existência de ondas solitárias, isto é, soluções do tipo $\psi(t, x) = \exp(-iEt)u(x)$, onde $E \in \mathbb{R}$ e u é uma função real positiva. É fato conhecido que ψ satisfaz (5) se, e somente se, a função $u(x)$ é solução da equação elíptica do tipo (9), a seguir, onde $V(x) = W(x) - E$ é o novo potencial.

$$-\Delta u + W(x)u - \kappa[\Delta(|u^2|)]u = \eta(u), \tag{9}$$

Os nossos argumentos seguem a estratégia adotada por Alves & Souto em [4], primeiramente usamos a técnica do truncamento e nos concentramos a estudar um problema auxiliar para o qual podemos garantir que o funcional associado satisfaz a condição de Palais-Smale. Para garantir que soluções do tipo minimax para este problema auxiliar sejam de fato positivas, precisamos mostrar que tais soluções pertencem a $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, para conseguir este resultado usamos o método de iteração de Moser. A condição (V_1) serve para podermos mostrar que soluções do problema auxiliar são também soluções do problema original. Notemos que a condição (V_1) acima permite que o potencial seja coercivo ou constante, e assim generaliza outros problemas já tratados na literatura. Citaremos alguns deles: Miyagaki [39] e Assunção, Carrião & Miyagaki [8]. Alves & Souto [4] modelaram o problema no subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$E := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

já que o potencial V é não negativo. Neste artigo, os autores usaram métodos variacionais, a saber o Teorema do Passo da Montanha e o método de iteração de Moser para obter a existência de solução para o problema (8). No caso em que o potencial V é coercivo, citamos o trabalho de Costa [20], Omana & Willem [45]. Neste artigo, foi mostrado que a imersão do espaço de Hilbert $E = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int \left(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\right) \, \mathrm{d}x\}$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ é compacta onde $1 < p < (N+2)/(N-2)$, $N \geq 3$, $2 \leq s < p+1$ e o potencial $b(x)$ é $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e coercivo.

Neste trabalho, buscamos solucionar EDP's estendendo o resuldado obtido em [4] para o operador p-laplaciano, operadores quase lineares e sistemas de equações não-linares, tendo como foco o fato do potencial poder se anular no infinito. Os nossos principais problemas foram encontrar uma estrutura variacional adequada para tratar tais problemas, obter soluções harmônias para operadores mais gerais do que o p-laplaciano e o método de iteração de Moser, que não pode ser aplicado, por exemplo, para estudar a existência de soluções EDP's de operadores biharmônicos ou poliharmônicos. Nos restrigimos a estudar o caso subcrítico, pois existem exemplos de EDP's, (cf. Pohozaev [41]), com potenciais constantes que não possuem solução não-trivial para o caso onde a não-linearidade tem crescimento crítico. Notemos que foi mostrado por Berestycki & Lions [13], usando a identidade de Pohozaev (cf. [41]), que se o potencial V é a função identicamente nula, a seguinte classe de equação elíptica

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{10}$$

não tem solução positiva de energia finita em $H^1(\mathbb{R}^N)$ onde $N \geq 3$, $f(u) = |u|^{p-1}u$ com $p \geq (N+2)/(N-2)$. Provaram ainda que se $V(x) \equiv 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, uma condição necessária para a existência de soluções é que f se comporte como $|u|^q$ para u próximo de 0 e como $|u|^p$ para u suficientemente grande onde $p < 2^* < q$. Contudo, com pertubações do termo crítico por uma não-lineriadade subcrítica é possível reverter a situação de não-existência de soluções não-triviais abordada por Pohozaev em domínios estrelados. No artigo clássico de Brézis & Nirenberg [17] foi estudada a seguinte classe de EDP's: $-\delta u + u^p = f(x,u)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado com $N \geq 3$, $p = (N+2)/(N-2)$ e $f(x,t)$ com crescimento subcrítico. os autores obtiveram condições de existência de soluções e unicidade de soluções para casos particulares da não-linearidade $f(x,t)$. Em Miyagaki [39], obteve-se solução positiva para a classe de EDP's onde o potencial V é contínuo, não negativo e tem ínfimo positivo e a não-linearidade $f(z) \equiv \lambda z|z|^{q-1} + z|z|^{p-1}$ onde $z \in \mathbb{R}$, λ é uma constante positiva e $1 < q < p \leq (N+2)/(N-2)$. Assim, talvez, ainda reste esperanças de encontramos soluções para algumas classes de EDP's com $V(x)$ potencial se anulando no infinito e a não-lineariade $f(x)$ com crescimento crítico, mas ainda há uma escassez de ferramentas para atacarmos tais problemas. Este trabalho está dividido em quatro capítulos:

No capítulo 1, estudamos a existência de soluções fracas positivas para a seguinte classe de equações elípticas

$$-\Delta_p u + V(x) \mid u \mid^{p-2} u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{P1}$$

onde f tem crescimento subcrítico e o potencial V é não negativo e, que pode, eventualmente se anular no infinito, isto é, $V(x) \to 0$ quando $\mid x \mid \to \infty$, ou simplismente denotamos, $V(\infty) = 0$. O estudo de tais classes de problemas tem sido motivado em parte pela busca das soluções, ondas solitárias, para a equação de Schrödinger não-linear:

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\varepsilon^2}{2m}\Delta\psi + V(y)\psi - \gamma|\psi|^{r-1}\psi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{11}$$

Ou seja, soluções da forma $\psi(x,t) = \exp(-iEt/\varepsilon)v(x)$, onde ε, m, γ e p são constantes positivas, $r > 1$, $E \in \mathbb{R}$ e v é real. De fato, ψ satistaz (11) se, e somente se, a função $v(x)$ satisfaz a equação elíptica semilinear:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2m}\Delta\psi + (V(x) - E)v = \gamma|v|^{r-1}v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{12}$$

O caso semilinear, corresponde a $p = 2$, já foi bastante estudado por muitos matemáticos nos últimos anos, veja por exemplo Berestycki & Lions [13], Jeanjean & Tanaka [34], Rabinowitz [43], Strauss [47] e algumas de suas referências. Mais precisamente, supomos

as seguintes hipóteses sobre o potencial $V(x)$:
$V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa que satisfaz a seguinte condição:

(V_1) Existem números reais $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{p^2/(p-1)}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{p^2/(p-1)} V(x) \geq \mu.$$

e supomos que a não-linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\limsup_{s\to 0^+} \dfrac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty$,

(f_2) Existe $\gamma \in (p, p^*)$ tal que $\limsup_{s\to +\infty} \dfrac{sf(s)}{s^{\gamma}} = 0$,

(f_3) Existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \equiv \theta \displaystyle\int_0^s f(t)dt \leq sf(s) \quad \text{para todo} \quad s > 0.$

Temos como resultado principal deste capítulo o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *Suponhamos que V satisfaça a hipótese* (V_1) *e a não-linearidade f, as hipóteses $(f_1) - (f_3)$. Então, existe uma constante $\mu^* > 0$ tal que o problema* (P1) *tem pelo menos uma solução fraca positiva para todo $\mu \geq \mu^*$.*

Devido ao fato de não termos a condição $\inf_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0$ ou a hipótese que o potencial $V(x)$ é coercivo, temos incialmente a dificuldade de encontrar um espaço de Banach, o mais abrangente possível, que possa ser mergulhado continuamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ou $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e onde possamos estabelecer uma estrutura variacional para o problema (P1). Desta forma, apenas com a hipótese que o potencial $V(x)$ é contínuo e não negativo, o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (cf. Ben-Naoum, C. Troestler & M. Willem [11]) é o ambiente natural no qual podemos tratar o problema (P1). O subespaço vetorial de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ambiente natural e mais abrangente possível, no qual buscamos encontrar pelo menos uma solução positiva será o espaço E definido a seguir

$$E := \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

No capítulo 2, generalizamos o problema estudado no capítulo 2, trabalhamos com uma perturbação linear do p-laplaciano, ou seja, nos dedicamos a estudar a existência de soluções fracas positivas para o problema subcrítico quasilinear da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta u + V(x)u = f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u \in \; D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P2}$$

onde $2 < p < N$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa que satisfaz as seguintes condições:

(V_1) Existem números reais $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}} V(x) \geq \mu.$$

(V_2) V é radial, ou seja, $V(x) = V(|x|),\ x \in \mathbb{R}^N$.

Supomos ainda que a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty$,

(f_2) Existe $\gamma \in (p, p^*)$ tal que $\displaystyle\limsup_{s\to+\infty} \frac{sf(s)}{s^\gamma} = 0$,

(f_3) Existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \equiv \theta \displaystyle\int_0^s f(t)dt \leq sf(s)$ para todo $s > 0$.

Nossos argumentos concentram-se nas técnicas de penalização, métodos variacionais e esquema de iteração de Moser usadas no capítulo 2. A principal dificuldade deste capítulo foi encontar funções radiais harmônicas em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para superar tal problema trabalhamos no seguinte subespaço de $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$E := \left\{ u \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

O principal resultado deste capítulo é enunciado a seguir:

Teorema 0.2. *Suponhamos que as hipóteses* $(V_1)-(V_2)$ *e* $(f_1)-(f_3)$ *sejam satisfeitas. Então, existe uma constante* $\mu^*>0$ *tal que o problema* (P2) *tem pelo menos uma solução fraca positiva para todo* $\mu \geq \mu^*$.

No capítulo 3, estudamos a existência de soluções fracas positivas para a seguinte classe de equações elípticas

$$-\Delta u + V(x)u - [\Delta(u^2)]u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{P3}$$

onde h satisfaz algumas condições do tipo "passo da montanha" e V é uma função contínua não negativa. Estamos interessados especialmente quando o potencial V não tem ínfimo positivo nem é limitado. Nós damos uma atenção especial ao caso em que o potencial de V pode eventualmente anular-se no infinito. Nossos argumentos são baseados em técnicas de penalização, métodos variacionais e esquema de iteração de Moser.

Assumimos que $N \geq 3$, e o potencial V e a função h são tais que:

(V_1) Existem $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{N+2}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{N+2} V(x) \geq \mu.$$

$h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(h_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{sh(s)}{s^{4N/(N-2)}} = 0.$

(h_2) Exite $p \in (4, 4N/(N-2))$ tal que

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{sh(s)}{s^{p-1}} < \infty.$$

(h_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta H(s) := 2\theta \int_0^s h(t)dt \leq sh(s), \quad \forall\, s > 0.$$

O problema (P3) surge em vários ramos da Física-Matemática e tem sido objeto de estudo aprofundado nos últimos anos. Uma parte do interesse é devido ao fato de que tais soluções de (P3) estarem relacionadas com a existência de ondas solitárias para equações de Schrödinger quase linear da forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(y)\psi - h(|\psi|^2)\psi - \kappa[\Delta\rho(|\psi|^2)]\rho^{'}(|\psi|^2)\psi \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde V é um potencial dado, κ é uma constante real e h, ρ são funções reais. O caso semilinear correspondente a $\kappa = 0$ tem sido estudado amplamente nos últimos anos, ver por exemplo [5, 6, 12, 37, 43] e referências lá contidas. Para equações quase lineares da forma (P3), ou seja, $\kappa = 1$, nos referimos o leitor aos artigos recentes [19, 27, 28, 30, 38] e suas referências para uma discussão sobre o assunto. Todas as obras mencionadas acima são construídas no pressuposto de que o potencial de V é limitado a partir de zero. O problema (P) foi modelado no espaço de Orlicz

$$E = \left\{ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

O principal objetivo deste capítulo é estudar equações de Schrödinger quase lineares da forma (P) com potenciais ilimitados ou se anulando no infinito. Estabelecemos a seguir o principal resultado deste capítulo:

Teorema 0.3. *Suponhamos que* (V_1) *e* $(h_1) - (h_3)$ *são satisfeitas. Então, existe* $\mu^* > 0$ *tal que o problema* (P3) *tem, pelo menos, uma solução positiva para todo* $\mu \geq \mu^*$.

No capítulo 4, estudamos a existência de soluções para sistemas de equações de Schrödinger acopladas não-lineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)F_u(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)F_v(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, \quad v \quad \in \quad H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{S}$$

onde $N \geq 3$ e $F : ([0,\infty) \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea de classe C^1 com $2 < p < 2^*$, e $2^* = 2N/(N-2)$ o expoente crítico de Sobolev. Assumiremos, neste capítulo que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, limitada e não negativa que satisfaz as seguintes condições:

(V_0)

$$\lambda_1 := \inf_{\{(u,v)\in H, ||(u,v)||_L = 1\}} ||(u,v)||_H^2 > 0,$$

Para o potencial V e a função K, primeiramente, assumimos que

(V_1) Existem $\lambda > 0$ e $R > 0$, tais que

$$\begin{cases} K(x) \neq 0 \ \text{ para algum } x \in B_R(0) \text{ e} \\ 0 < \mu \leq \ K(x) \leq V(x) \leq \lambda, \quad \forall\, |x| \geq R, \end{cases}$$

onde $B_R(0)$ denota uma bola unitária em $\mathbb{R}^N$ com raio R centrada na origem. Impomos também para a função K, uma hipótese similar usada em [4], denominada,

(V_2) Existem $\gamma > \mu$ e $R > 0$, tais que $\displaystyle\sup_{|x|\geq R} K(x)\frac{R^{2(N-2)}}{|x|^{2(N-2)}} \leq \gamma$.

E para a não linearidade F supomos que:

(F_0) $F : ([0, \infty) \times [0, \infty)) \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea de classe C^1 com $2 < p < 2^*$, e que existe uma constante real $0 < c_0 < \mu^{p/2}$ tal que

$$|\ F_u(u, v)\ | + |\ F_v(u, v)\ | \leq c_0\,(u^{p-1} + v^{p-1}), \quad \forall\, u,\ v \geq 0.$$

(F_1) $F_u(0, 1) = F_v(1, 0) = 0.$

(F_2) $F_u(1, 0) = F_v(0, 1) = 0.$

(F_3) $F_{uv}(u, v) > 0, \quad \forall\, u, v > 0.$

Esta classe de sistemas surge em vários ramos da física-matemática e têm sido objecto de estudo aprofundado nos últimos anos. Parte do interesse se deve ao fato de que as soluções de (S) estão relacionadas com a existência de soluções de ondas solitárias para equações Schr ödinger e Klein-Gordon não lineares (para uma discussão ver, por exemplo [12]). De fato, (u, v) é uma solução de (S) se, e somente se,

$$\begin{cases} \psi(x, t) = & \exp(i\lambda t)u(x), \\ \varphi(x, t) = & \exp(i\lambda t)v(x), \end{cases}$$

soluciona o sistema de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + \hat{V}(y)\psi - \dfrac{\psi}{|\psi|}F_\psi(|\psi|, |\varphi|) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ i\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\Delta\psi + \widehat{V}(y)\varphi - \dfrac{\varphi}{|\varphi|}F_\varphi(|\psi|, |\varphi|) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\hat{V}(y) = V(y) + \lambda$. Procuramos por soluções $u,\ v\ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ pois ondas solitárias u, v que tem norma L^2 finita são mais relevantes do ponto de vista físico devido a sua correpondência com soluções de energia limitada. A seguir, estabelecemos o resultado principal deste capítulo, que irá garantir, sob certas condições, a existência de soluções para o sistema (S).

Teorema 0.4. *Suponhamos que* $(V_0) - (V_2)$ *e* $(F_0) - (F_3)$ *são satisfeitas. Então, existe* $\gamma^* > 0$ *tal que* (S) *possue pelo menos uma solução fraca positiva* (u, v) *para todo* $0 < \gamma \leq \gamma^*$.

Nosso trabalho foi motivado por alguns artigos que surgiram nos últimos anos sobre o estudo de equações de Schrödinger não lineares usando abordagem puramente variacional desde o trabalho seminal de Rabinowitz [43]. Remetemos o leitor para [2, 3, 5, 6, 7, 21, 26, 46] e sua bibliografia para maiores estudos. A fim de aplicar os argumentos variacionais e para superar a falta de compacidade dos funcionais de energia associados alguns autores supõem que o potencial é coercivo e limitado a partir de zero. Aqui, neste artigo, o nosso objetivo principal é ampliar e complementar os resultados em [4] para sistemas (S) com potencial decaindo e se anulando possivelmente no infinito. Esta classe de problemas tratada aqui tem várias dificuldades. Em primeiro lugar, há a habitual falta de compacidade da imersão de Sobolev, já que o nosso domínio é o conjunto espaço $\mathbb{R}^N$. Em segundo lugar, uma vez que estamos interessados em potenciais que se anulam no infinito, é um desafio encontrar uma estrutura adequada variacional com uma energia funcional associado que pontos críticos correspondem a soluções fracas do sistema (S).

Capítulo 1

Equação do tipo p-Laplaciano com potencial que pode se anular no infinito

O principal objetivo deste capítulo é estudar a existência de soluções fracas positivas para o problema subcrítico quase linear onde o potencial $V(x)$ é uma função contínua não negativa que satisfaz certas condições de decaimento no infinito. Nossos argumentos baseiam-se no método de penalização o que nos permite estudar um problema auxiliar que satisfaz a condição de Palais-Smale. Passado o estudo a este problema auxiliar, nos preocupamos em garantir a existência de pelo menos uma solução fraca usando o Teorema Clássico do passo da Montanha. Mostramos ainda que tais soluções são $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e assim garantimos que as soluções do tipo passo da Montanha do problema auxiliar são positivas via o Princípio do máximo fraco. A condição (V_1) é usada apenas para mostramos que soluções do problema auxiliar (AP_1) são, de fato, soluções do problema original (P_1). Precisamente, estudamos o seguinte problema subcrítico quase linear

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u \in \; D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P1}$$

onde $1 < p < N$, $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o p-Laplaciano, $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa que satisfaz a seguinte condição:

(V_1) Existem números reais $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{p^2/(p-1)}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{p^2/(p-1)} V(x) \geq \mu.$$

Assumimos que a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty$,

(f_2) Existe $\gamma \in (p, p^*)$ tal que $\displaystyle\limsup_{s\to +\infty} \frac{sf(s)}{s^{\gamma}} = 0$,

(f_3) Existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \equiv \theta \displaystyle\int_0^s f(t)dt \leq sf(s) \quad$ para todo $\quad s > 0$.

O resultado principal deste capítulo é estabelecido a seguir:

Teorema 1.1. *Suponhamos que V satisfaça a hipótese (V_1) e a não linearidade f, as hipóteses $(f_1) - (f_3)$. Então, existe uma constante $\mu^* > 0$ tal que o problema* (P1) *tem pelo menos uma solução fraca positiva para todo $\mu \geq \mu^*$.*

Apresentamos, a seguir, um exemplo de não linearidade que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_3)$.

Exemplo 1.2.

$$f(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & \text{se} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\gamma-2} \frac{1}{\gamma-1} s^i, & \text{se} \quad s \geq 1, \end{cases}$$

com $\alpha \geq p^*$ e a constante $\gamma \in (p, p^*)$.

Exemplo 1.3. Sejam μ e R números reais positivos. Observemos que se $V(x)$ é uma função contínua não negativa em $\mathbb{R}^N$ e além disso, é tal que $V(x) \geq \mu$ para todo $|x| \geq R$, então $V(x)$ satisfaz a condição (V_1). Desta forma, temos dois casos a considerar:

(i) se $V(x)$ é uma função limitada tal que $V(x) \geq \mu$ para todo $|x| \geq R$.

(ii) se $V(x)$ é coercivo, isto é,

$$V(x) \to +\infty, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty,$$

então, em ambos os casos, $V(x)$ satisfaz a condição (V_1). De fato, dado $\mu > 0$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $V(x) > \mu$ para todo $|x| > R$. Portanto, podemos escolher $\mu > 0$ satisfazendo

$$\frac{1}{R^{p^2/(p-1)}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{p^2/(p-1)} V(x) \geq \inf_{|x|\geq R} V(x) \quad \geq \mu.$$

Isto, portanto, completa a prova.

Exemplo 1.4. Sejam $\mu > 0$, $R > 0$ e $\alpha \geq 0$ tais que $\alpha \leq p^2/(p-1)$. Considere $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 0$ em $B_{R/2}(0)$ e $\eta = 1$ em $B_R^c(0)$. Definimos a seguir mais alguns tipos de potenciais $V(x)$

$$V(x) = 4\mu\eta(x)\frac{R^{p^2/(p-1)}}{1+|x|^{\alpha/2}} \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$V(x) = \begin{cases} \mu\eta(x) & \text{se} \quad |x| < R, \\ \\ \dfrac{\mu R^{p^2/(p-1)}}{|x|^{p^2/(p-1)}} & \text{se} \quad |x| \geq R, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} \mu\dfrac{|x|}{R} & \text{se} \quad |x| < R, \\ \\ \dfrac{\mu R^{p^2/(p-1)}}{|x|^{p^2/(p-1)}} & \text{se} \quad |x| \geq R. \end{cases}$$

Observação 1.5. *1. As condições (f_1) e (f_2) garantem que $f(u) \in L^{p^*/(p^*-1)}(\mathbb{R}^N)$ se $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.*

2. Usando as hipóteses (f_1) e (f_2) concluímos que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|sf(s)| \leq c_o|s|^{p^*} \quad e \quad |sf(s)| \leq c_o|s|^\gamma \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

3. A hipótese (V_1) assegura que $\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\} \subset B_R(0)$, isto é, $\mathcal{Z}$ é um conjunto compacto.

1.1 Preliminares

Nosso objetivo é provar a existência de soluções positivas para o problema principal (P1). Observemos que pelas condições $(f_1)-(f_2)$ e pelo fato de f ser contínua, podemos concluir que $f(0) = 0$. Desta forma, podemos redefinir, de forma contínua, a não linearidade f da seguinte maneira

$$f(t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t \leq 0.$$

Neste capítulo, estudamos a equação (P1) supondo a não linearidade $f(t)$ satisfazendo apenas as condições $(f_1) - (f_2)$ que garantem crescimento subcrítico e a hipótese, (f_3), a famosa condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Apenas com a hipótese que o potencial $V(x)$ é contínuo e não negativo, o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o ambiente natural no qual podemos tratar o problema (P1). Modelamos nosso problema no seguinte subespaço vetorial de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, ou seja, buscamos encontrar pelo menos uma solução positiva no espaço E definido a seguir

$$E := \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Lema 1.6. *O espaço E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Prova: De fato, sejam $u, v \in E$ e λ uma escalar real. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + \lambda v|^p \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x)^{1/p}|u + \lambda v|\right)^p \,\mathrm{d}x.$$

Uma vez que, $V(x)^{1/p}u$, $\lambda V(x)^{1/p}v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ segue pela desigualdade de Minkowski que

$$\begin{aligned} ||V(x)^{1/p}\left(u + \lambda v\right)||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x)^{1/p}|u + \lambda v|\right)^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\leq ||V(x)^{1/p}u||_p + |\lambda|||V(x)^{1/p}v||_p. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u + \lambda v|^p \,\mathrm{d}x < +\infty$ e portanto, segue que E é um subespaço vetorial de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$. ■

Com o intuito de tornar o espaço vetorial E um espaço de Banach, consideremos a seguinte função

$$\begin{aligned} || \cdot ||_E &: E \to \mathbb{R} \\ u &\longmapsto ||u||_E = \left(||\nabla u||_p^p + ||V(x)^{1/p}u||_p^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Lema 1.7. *A função* $||\cdot||_E$ *definida acima é uma norma para o espaço vetorial* E.

Prova: De fato, observemos que

1. $||\lambda u||_E = |\lambda| ||u||_E$ para todo $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $||u||_E \geq 0$. Suponhamos que $||u||_E = 0$ então $||\nabla u||_p = ||u||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = 0$ e, neste caso, temos que u é a função identicamente nula em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

3. $$\begin{aligned} ||u+v||_E &= \left(||\nabla (u+v)||_p^p + ||V(x)^{1/p}(u+v)||_p^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left((||\nabla u||_p + ||\nabla v||_p)^p + \left(||V(x)^{1/p}u||_p + ||V(x)^{1/p}v||_p\right)^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$
   Usando a desigualdade de Minkowski para somas finitas (cf. [29]) temos
   $$||u+v||_E \leq \left(||\nabla u||_p^p + ||V(x)^{1/p}u||_p^p\right)^{1/p} + \left(||\nabla v||_p^p + ||V(x)^{1/p}v||_p^p\right)^{1/p}.$$
   Então, podemos concluir que $||u+v||_E \leq ||u||_E + ||v||_E$, ou seja, vale a desigualdade triangular.

■

Lema 1.8. *O espaço vetorial* E *com a norma* $||\cdot||_E$ *definida acima é um espaço de Banach reflexivo.*

Prova: De fato, seja (v_n) uma sequência de Cauchy em E. Usando o mergulho contínuo

$$E \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 3, \tag{2.1}$$

segue que (v_n) é uma sequência de Cauchy em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Daí existe $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \to v$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Além disso, como $\left(V(x)^{1/p}v_n\right)$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C$$

e portanto, pelo Lema de Fatou segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|^p \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^p \,\mathrm{d}x \leq C$$

para alguma constante $C > 0$. Consequentemente $v \in E$. Usando, novamente, o fato de $\left(V(x)^{1/p}v_n\right)$ ser uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^N)$, temos que para todo $\varepsilon \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n - v_m|^p \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n, m \geq n_0.$$

Fixando $m > n_0$ e aplicando o Lema de Fatou temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_m - v|^p \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n - v_m|^p \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon,$$

o que implica em

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_m - v|^p \,\mathrm{d}x = 0.$$

e consequentemente $v_n \to v$ em E, ou seja, E é um espaço de Banach em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para mostrar que E é um espaço de Banach reflexivo, consideremos a seguinte isometria

$$\begin{aligned} &E \to L^p(\mathbb{R}^N) \times L^P(\mathbb{R}^N) \\ &v \mapsto (\nabla v, \quad V(x)v) \end{aligned}$$

Desta forma, como E é subespaço fechado em $L^p(\mathbb{R}^N)\times L^P(\mathbb{R}^N)$ que é um espaço reflexivo, concluímos que E é também reflexivo. ■

A equação de Euler-Lagrange (P1) está associada ao funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{p}||u||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,\mathrm{d}x, \quad u \in E.$$

É fato conhecido que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ com derivada de Gâteaux dada por

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2}uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad u, v \in E,$$

e, além disso, os pontos críticos de I são soluções fracas do problema (P1).

Observação 1.9. *1. As hipóteses (f_1) e (f_2) asseguram que o funcional I dado acima está bem definido.*

2. A hipótese (f_3), a famosa condição de Ambrosetti-Rabinowitz, é usada para garantir a geometria do Passo da Montanha do funcional I, bem como a limitação da sequência (P.–S.).

1.2 O problema auxiliar

A fim de obter uma solução do problema (P1) utilizaremos o método introduzido por del Pino e Felmer (cf. [25]) que consiste em truncar a não linearidade f com o intuito de garantir que o funcional energia associado ao problema auxiliar obtido com esta nova não linearidade satisfaça a condição de Palais-Smale. Desta forma faremos, a seguir, algumas considerações:

Sejam $\Lambda = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ e a constante real $k = p\theta/(\theta - p) > p$. Considere a seguinte função $\widehat{f} : (\mathbb{R}^N \setminus \Lambda) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{f}(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad kf(t) \le V(x)t^{p-1} \quad \text{e} \quad t \ge 0, \\ \dfrac{V(x)}{k} t^{p-1}, & \text{se} \quad kf(t) > V(x)t^{p-1} \quad \text{e} \quad t \ge 0, \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Podemos reescrever a função $\widehat{f}$ da seguinte maneira: $\widehat{f} : \big(\mathbb{R}^N \setminus \Lambda\big) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x,t) := \min\{f(t), (V(x)/k)|t|^{p-1}\}.$$

Observemos que $\widehat{f}$ está bem definida e é uma função contínua não negativa pois é o mínimo de funções contínuas não negativas. Definimos a função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,t) = \chi_\Lambda(x) f(t) + (1 - \chi_\Lambda(x))\, \widehat{f}(x,t) \tag{2.3}$$

onde χ_Λ é a função característica do conjunto Λ. Convém, observar que g é uma função de Carathéodory, $g(x,t)$ não negativa e $g(x,t) = 0$ para $t \le 0$.

Reformulamos o problema (P1) e passamos a estudar o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in \ D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AP1}$$

Sejam $\widehat{F}(x,s) = \displaystyle\int_0^s \widehat{f}(x,t)dt$ e

$$G(x,s) = \int_0^s \widehat{g}(x,t)dt = \chi_\Lambda(x) F(s) + (1 - \chi_\Lambda(x))\, \widehat{F}(x,s).$$

Lema 1.10. *As funções g e G satisfazem as seguintes estimativas:*

1. $g(x,t) = f(t)$ *e* $G(x,t) = F(t)$ *para todo* $x \in \Lambda$.
2. $0 \leq G(x,t) \leq \dfrac{V(x)}{pk}|t|^p$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$.
3. $g(x,t) \leq f(t)$ *e* $G(x,t) \leq F(x,t)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $t \in \mathbb{R}$.
4. $0 \leq |t|g(x,t) \leq \dfrac{V(x)}{k}|t|^p$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$.

Prova: É suficiente usar a definição de $\hat{f}$ e g. ∎

1.3 O funcional modificado

Nesta seção definiremos o funcional de energia associado ao problema auxiliar e mostraremos que J é de classe C^1. O funcional de energia associado ao problema auxiliar (AP1) é dado por

$$J(u) = \frac{1}{p}||u||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x, \quad u \in E.$$

Observemos ainda que os pontos críticos do funcional J correspondem as soluções fracas do problema auxiliar (AP1).

Lema 1.11. *O funcional J possui as seguintes propriedades:*

1. *J está bem definido.*
2. *J é contínuo em E.*
3. *J é classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2}uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,\mathrm{d}x$$

para todo $u, v \in E$.

Prova: Para provar o Item 1, notemos que pelas hipóteses $(f_1) - (f_3)$, para cada $u \in E$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |uf(u)|\,\mathrm{d}x \leq c_o \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x.$$

Logo, o funcional J está bem definido.

A seguir, provaremos o Item 2. Seja $u_n \to u$ em E. Pela continuidade do mergulho (2.1) temos $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Usando o Item 2 da Observação 1.5 e o teorema da Convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, $J(u_n) \to J(u)$, ou seja, o funcional J é contínuo em E.

Para provar o Item 3, notemos que para $u, v \in E$ fixados, temos pelo teorema do valor médio que

$$\frac{G(x,u+tv) - G(x,u)}{t} = g(x,\xi)v$$

onde

$$\min\{u(x), u(x)+tv(x)\} \leq \xi(x) \leq \max\{u(x), u(x)+tv(x)\}, \text{ para } 0 < |t| < 1.$$

Observemos que $g(x,\xi) \to g(x,u(x))$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}|g(x,\xi)v| &\leq f(\xi)|v| \leq |\xi|^{p^*-1}|v| \leq \max(|u(x)|, |u(x)+tv(x)|)^{p^*-1}|v(x)| \\ &\leq (|u|+|v|)^{p^*-1}|v|.\end{aligned}$$

Notemos ainda que $(|u|+|v|)^{p^*-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, de fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u|+|v|)^{p^*-1}|v|\,\mathrm{d}x \leq \quad ||\max(u(x),v(x))||_{p^*/(p^*-1)}||v||_{p^*} + ||v||_{p^*}.$$

Considere $q = p/(p-1)$. Usando as hipóteses $(f_1)-(f_2)$ e o teorema da Convergência dominada de Lebesgue concluímos que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,u+tv) - G(x,u)}{t}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,\mathrm{d}x.$$

Resta mostrar a continuidade do funcional J' em E. Vamos definir $h_1(u) := |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ e $h_2(u) := V(x)^{(p-1)/p}|u|^{p-2}u$. Suponhamos que $u_n \to u$ em E, consequentemente, $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ e $V(x)^{(p-1)/p}|u_n|^{p-2}u_n \to V(x)^{(p-1)/p}|u|^{p-2}u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $h_1(u_n) \to h_1(u)$ e $h_2(u_n) \to h_2(u)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Observemos ainda que $g(x,u_n) \to g(x,u)$ em $L^{p^*/(p^*-1)}(\mathbb{R}^N)$. Consideremos $q_1 = p^*/(p^*-1)$. Desta forma, obtemos pela desigualdade de Hölder, a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle| &\leq ||h_1(u_n) - h_1(u)||_q||\nabla v||_p + ||h_2(u_n) - h_2(u)||_q||V(x)^{1/p}v||_p \\ &\quad + ||g(x,u_n) - g(x,u)||_{q_1}||v||_{p^*}\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}||J'(u_n) - J'(u)||_{E'} &\leq ||h_1(u_n) - h_1(u)||_q + ||h_2(u_n) - h_2(u)||_q \\ &\quad + C||g(x,u_n) - g(x,u)||_{q_1} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

para alguma constante real C positiva. ∎

1.4 Condições de compacidade

Nesta seção provaremos que o funcional do J associado ao problema auxiliar (AP1) possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, mostraremos que uma sequência (P.–S.) de J, a menos de uma subsequência, converge fortemente em E, ou seja, mostraremos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Deste modo, poderemos utilizar a versão clássica do Teorema do Passo da Montanha para encontrar uma solução do problema auxiliar (AP1).

Lema 1.12. *(Geometria-Passo da Montanha) O funcional J tem a geometria do Passo da Montanha, isto é, J satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existem ρ, $\alpha > 0$, tal que $J(u) \geq \alpha$ se $||u||_E = \rho$,*

2. *Para $u \in C_0^\infty(\Lambda, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ com u não negativa temos $J(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.*

Prova: Provaremos o Item 1. Em virtude da definição da função G e da Observação (1.5) temos

$$G(x,u) \leq F(u) \leq \ c_0\,|u|^{p^*} \text{ para todo } \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

e, então pelo mergulho de Sobolev concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,\mathrm{d}x \leq C_1||\nabla u||_p^{p^*} \leq C_1||u||_E^{p^*},$$

onde C_1 é uma constante positiva. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}||u||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}||u||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{p}||u||_E^p - C_1||u||_E^{p^*} \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - C_1||u||_E^{p^*-p}\right)||u||_E^p. \end{aligned}$$

Escolha $\rho > 0$ tal que $D = \left(\dfrac{1}{p} - C_1\rho^{p^*-p}\right) > 0$ e considere $\alpha = D\rho^p$. Daí, existem ρ, $\alpha > 0$ tal que $J(u) \geq \alpha$, para todo $u \in \partial B_\rho := \{u \in E : ||u||_E = \rho\}$.

Agora, provaremos o Item (2). Segue da definição de G, que $G(x,u) = F(u)$ para $x \in \Lambda$. Pela hipótese (f_3) temos

$$F(s) \geq C_2 s^\theta - C_3, \quad s > 0,$$

onde C_2, C_3 são constantes positivas. Já que $\theta > p$, para $u \in C_0^\infty(\Lambda, \mathbb{R})$ com $u \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^p}{p}||u||_E^p - \int_\Lambda F(tu)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^p}{p}||u||_E^p - C_2 t^\theta \int_\Lambda |u|^\theta\,\mathrm{d}x + C_3\int_\Lambda 1\,\mathrm{d}x \\ &\longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \end{aligned}$$

E portanto, completamos a prova. ■

Lema 1.13. *Suponhamos que as hipóteses $(f_1) - (f_3)$ sejam satisfeitas. Se $(u_n) \subset E$ é uma sequência arbitrária que satisfaz a condição de Palais-Smale, i.e.,*

$$|J(u_n)| \leq c \quad e \quad J'(u_n) \to 0 \quad em \quad E', \quad quando\ n \to \infty$$

onde c é uma constante real positiva, então (u_n) é limitada em E.

Prova: Seja $(u_n) \in E$ uma sequência que satisfaz a condição de Palais-Smale. Buscamos estabelecer uma estimativa para

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)||u||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n\,\mathrm{d}x \quad (2.4)$$

De acordo com o Lema 1.10 obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x &= \int_\Lambda \left(\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda}\left(\frac{1}{\theta}g(x, u_n)u_n - G(x, u_n)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

que associada a hipótese (f_3) e o Lema 1.10 nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n)u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x &\geq \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} g(x, u_n)u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x \geq -\frac{1}{pk}||u||_E^p. \end{aligned}$$

Utilizando esta última desigualdade temos a seguinte estimativa

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle J^{'}(u_n), u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)||u||_E^p - \frac{1}{pk}||u||_E^p = \frac{(p-1)}{pk}||u_n||_E^p. \quad (2.5)$$

Isto é,

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J^{'}(u_n)\cdot u_n \geq \left(\frac{p-1}{pk}\right)||u_n||_E^p. \quad (2.6)$$

Como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J^{'}(u_n)\cdot u_n \quad \leq \quad c + ||u_n||_E \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \quad (2.7)$$

Combinando as propriedades (2.6) e (2.7), obtemos a seguinte desigualdade

$$\left(\frac{p-1}{pk}\right)||u||_E^p \quad \leq \quad c+||u_n||_E \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{2.8}$$

Como a desigualdade acima não é válida se $||u_n||_E \to \infty$ quando $n \to \infty$. Temos que (u_n) é uma sequência limitada em E. ■

Para encontrar uma solução do problema auxiliar (AP1), precisamos garantir a existência de um ponto crítico positivo $\varphi \in E$ associado ao funcional J, e para isto utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha-versão clássica. Primeiramente, mostraremos que uma sequência (P.–S.) de J, a menos de uma subsequência, converge fortemente em E, ou seja, mostraremos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale.

Enunciaremos, a seguir, um importante resultado devido a Boccardo e Murat (cf. [14]) que garante a convergência q.t.p do gradiente para sequências fracamente convergentes em $W^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é subconjunto limitado. Este resultado é relevante em nossos argumentos.

Lema 1.14. *Sejam E e J respectivamente o espaço e o funcional definidos nas Seções 2.1 e 2.3. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência (P.–S.) para o funcional J. Então, a menos de subsequência, $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p $x \in R^N$.*

Para consultar a prova deste Lema citamos como referência [14] e [8].

Lema 1.15. *Sob as hipóteses do Lema 1.13, temos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: O Lema 1.13 assegura que existe $u \in E$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \quad \text{e} \quad u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Notemos que vale a seguinte identidade

$$||u_n||_E^p - ||u||_E^p = \langle J'(u_n) + J'(u), u_n - u\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} (g(x,u_n) + g(x,u))\,(u_n - u)\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^{p-2}u_n u\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u_n u\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2} - |\nabla u|^{p-2}\right)\nabla u_n \nabla u\,\mathrm{d}x.$$

Temos como objetivo mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_E^p = ||u||_E^p$ para tal dividiremos a prova em quatro etapas:

Afirmação (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\langle J^{'}(u_n)+J^{'}(u), u_n-u\rangle = 0.$

Afirmação (2)

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u_n\nabla u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x$$

quando $\quad n\to\infty.$

Afirmação (3)

$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u_n|^{p-2}u_n u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^{p-2}u_n u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^p\,\mathrm{d}x$$

quando $\quad n\to\infty.$

Afirmação (4)

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int ug(x,u)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\int ug(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int ug(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Observemos que é suficiente provarmos estas quatro afirmações.

Prova: Afirmação (1)

$$\langle J^{'}(u_n)+J^{'}(u), u_n-u\rangle \leq ||J^{'}(u_n)||_{E'}||u_n-u||_E + \langle J^{'}(u), u_n-u\rangle \leq C||J^{'}(u_n)||_{E'} + \langle J^{'}(u), u_n-u\rangle$$

onde C é uma constante real positiva. Usando que $u_n \rightharpoonup u$ concluímos $\lim\limits_{n\to\infty}\langle J^{'}(u), u_n-u\rangle = 0$ e, como $||J^{'}(u_n)||_{E'} \to 0$ temos que $\lim\limits_{n\to\infty}\langle J^{'}(u_n)+J^{'}(u), u_n-u\rangle = 0$ como queríamos. ■

Prova: Afirmação (2) Notemos que $w_n = |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ e que $||w_n||_{p/(p-1)}$ é limitada. Usando o Lemma 2.11 temos que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p $x\in\mathbb{R}^N$. Notemos que $w_n\to w$, $w = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ q.t.p $\ x\in R^N$, segue de [cf. [33], Teorema 13.44] que $w_n \rightharpoonup w$ em $L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Agora, usando que $u_n \rightharpoonup u$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Logo, a prova desta Afirmação está completa. ■

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $r > R$ tal que

$$2C\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\omega_N^{1/N}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*} \;<\; \varepsilon \tag{2.9}$$

$$\max\left(\left(||u||_{p^*}^{(p^*-1)}+||u_n||_{p^*}^{(p^*-1)}\right)||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)},||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}^{(p^*-1)}||u_n||_{p^*}\right)<\varepsilon \tag{2.10}$$

e

$$\max\left(||V(x)^{1/p}u_n||_p^{p-1}||V(x)^{1/p}u||_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus B_r)},||V(x)^{1/p}u_n||_p||V(x)^{1/p}u||_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}^{p-1}\right)<\varepsilon \tag{2.11}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e a constante real positiva C é tal que $C \geq ||u_n||_E^{p-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Afirmação (3)

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r}\left|V(x)|u_n|^{p-2}u_nu-V(x)|u|^{p-2}u_nu\right|\,\mathrm{d}x\\&\leq ||V(x)^{1/p}u_n||_p^{p-1}||V(x)^{1/p}u||_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}+||V(x)^{1/p}u_n||_p||V(x)^{1/p}u||_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}^{p-1}<2\varepsilon\end{aligned} \tag{2.12}$$

Mais ainda segue do Teorema de Rellich-Kondrachov que $|u_n|^{p-2}u_n \to |u|^{p-2}u$ em $L^{p/(p-1)}(B_{2r})$. Daí, $V(x)^{(p-1)/p}|u_n|^{p-2}u_n \to V(x)^{(p-1)/p}|u|^{p-2}u$ em $L^{p/(p-1)}(B_{2r})$. E portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\left(|u_n|^{p-2}u_nu-|u|^p\right)\,\mathrm{d}x=0.$$

Notemos que de $u_n \rightharpoonup u$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\left(|u|^{p-2}u_nu-|u|^p\right)\,\mathrm{d}x=0$$

. ■

Prova: Afirmação (4) Seja $\eta(x)=\eta_r(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$, uma função que satisfaz as seguintes propriedades $supp\,\eta \subseteq B_r^c(0)$, $\eta(x)\equiv 1$ em $B_{2r}^c(0)$, $0<\eta(x)<1$ se $r<|x|<2r$ e

$$|\nabla\eta(x)| \;\leq\; \frac{1}{r},\quad \text{para todo } x\in\mathbb{R}^N.$$

Como (u_n) é uma sequência limitada em E e a função η é uma função limitada em $\mathbb{R}$, temos que a sequência (ηu_n) também é limitada em E, e portanto $J^{'}(u_n)\cdot(\eta u_n)=o_n(1)$, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(\eta u_n)+V(x)|u_n|^{p-2}u_n(\eta u_n)\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)(\eta u_n)\,\mathrm{d}x\\&+o_n(1).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando que $\eta \equiv 0$ in $B_r(0)$, combinando a última equação com o Lema 1.10 segue que

$$\int_{|x|\geq r}(|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}\int_{|x|\geq r} V(x)|u_n|^p\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\geq r} u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta\,\mathrm{d}x$$
$$+\, o_n(1),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{|x|\geq r}\left(|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p\right)\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{1}{r}\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}\,\mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pela desigualdade de Hölder, asseguramos que

$$\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}\,\mathrm{d}x \leq \ ||\nabla u_n||_p^{p-1}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Como estamos num anel (domínio limitado) podemos utilizar o Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov e concluir que $u_n \to u$ em $L^p(B_{2r}\setminus B_r)$, daí

$$\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}\,\mathrm{d}x \leq C\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}. \tag{2.15}$$

Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}|B_{2r}\setminus B_r|^{1/N}. \tag{2.16}$$

Observando que $|B_{2r}\setminus B_r| \leq |B_{2r}| = \omega_N 2^N r^N$, de (2.15) e (2.16) segue que

$$\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n|\,\mathrm{d}x \leq 2\omega_N^{1/N} r\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}. \tag{2.17}$$

Escolhendo $r > 0$ em (2.9), (2.14) e (2.17), implicam que

$$\limsup_n \int_{|x|\geq r}(|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p)\,\mathrm{d}x < \ \varepsilon.$$

Usando (2.13), temos

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq 2r} u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n g(x,u_n)\eta\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(\eta u_n) + V(x)|u_n|^{p-2}u_n(\eta u_n)\Big)\,\mathrm{d}x + o_n(1)\\ &\leq \int_{|x|\geq r}(|\nabla u_n|^p + V(x)|u_n|^p)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{B_{2r}\setminus B_r}|u_n||\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n|\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.18}$$

e pelo que já vimos segue que $\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x < 2\varepsilon$. Por outro lado, (2.10) nos permite concluir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u_n g(x,u)\,\mathrm{d}x \leq &\quad ||u||^{p^*-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u_n||_{p^*} \leq \quad \varepsilon \\
\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u g(x,u_n)\,\mathrm{d}x \leq &\quad ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u_n||^{p^*-1}_{p^*} \leq \quad \varepsilon \\
\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u g(x,u)\,\mathrm{d}x \leq &\quad ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u||^{p^*-1}_{p^*} \leq \quad \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ainda, pela escolha de r, obtemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} |g(x,u_n)u_n - g(x,u)u|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} |g(x,u_n)||u_n|\,\mathrm{d}x + \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} |g(x,u)||u|\,\mathrm{d}x < 3\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Agora, usando o Item 2 da Observação 1.5, o teorema da Convergência dominada de Lebesgue e o mergulho compacto de Rellich-Kondrachov concluímos que

$$g(x,u_n) \to g(x,u) \quad \text{em} \quad L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r}),$$

onde γ é dado em (f_2). Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\leq 2r} (g(x,u_n)u_n - g(x,u)u)\,\mathrm{d}x \leq ||g(x,u_n)||_{L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r})} ||u_n - u||_{L^{\gamma}(B_{2r})} \\
&+ ||g(x,u_n) - g(x,u)||_{L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r})} ||u||_{L^{\gamma}(B_{2r})} \to 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Assim, (2.20) e (2.21) resultam em

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int u g(x,u)\,\mathrm{d}x \tag{2.22}$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \int u g(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int u g(x,u)\,\mathrm{d}x \tag{2.23}$$

■

As Afirmações (1)–(4) nos permitem concluir que $||u_n||^p_E \to ||u||^p_E$ e, portanto $||u_n||_E \to ||u||_E$ como queríamos demonstrar. ■

Definiremos a seguir o nível minimax, d, do funcional I_0 que será importante para controlar a norma das soluções do tipo "passo da montanha" para o problema (AP1) e as estimativas desenvolvidas adiante. Denotaremos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$ e por $I_0 : W^{1,p}_0(B) \to \mathbb{R}$ o funcional

$$I_0(u) = \frac{1}{p} \int_B (|\nabla u|^p + \max(V(x),1)\,|u|^p)\,\mathrm{d}x - \int_B F(u)\,\mathrm{d}x.$$

Denotaremos, também por d o nível do Passo da Montanha associado ao funcional I_0, isto é,

$$d = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_0(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], W_0^{1,p}(B)\right) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = e\},$$

com $e \in W_0^{1,p}(B) \setminus \{0\}$ verificando $I_0(e) < 0$. Nosso resultado de existência será obtido aplicando-se a seguinte versão clássica do Teorema do Passo da Montanha (cf. [22], [50]).

Proposição 1.16. *(Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973) Sejam X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tais que $||e|| > r$ e*

$$b := \inf_{||u||=r} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Se Φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Então c é um valor crítico de Φ.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (cf.[50]).

Observação 1.17. *Notemos que $J(u) \leq I_0(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(B)$. Em particular, $J(e) \leq I_0(e) < 0$. Denotamos por m_J o nível do passo da montanha associado a J, isto é,*

$$m_J = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\right) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Mais ainda, temos que $m_J \leq d$.

Enunciaremos abaixo uma proposição que estabelece uma estimativa para normas das soluções do tipo "Passo da Montanha" do problema auxiliar independentemente do raio $R > 1$ dado. Notemos que controlamos as normas de tais soluções a partir do nível minimax do funcional fixado I_0.

Lema 1.18. *Seja $R > 1$, qualquer ponto crítico positivo u associado ao funcional J no nível crítico minimax m_J satisfaz a seguinte estimativa*

$$||u||_E^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) kd.$$

Prova: Segue da desigualdade obtida em (2.5) e da definição do nível minimax d. ∎

Notemos que, até o momento, mostramos o seguinte resultado:

Proposição 1.19. *Existe um ponto crítico $\varphi \in E$ associado ao funcional*

$$J(\varphi) \quad = \quad \frac{1}{p}||\varphi||_E^p - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, \varphi)\, \mathrm{d}x, \quad \varphi \in E.$$

no nível crítico

$$m_J = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

1.5 Estimativas a priori

Nesta seção, estabeleceremos uma importante estimativa envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ da solução u de (AP1) que será fundamental para garantirmos a regularidade $C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, das soluções do problema auxiliar (AP1). Notemos que como consequência do Teorema do Máximo, teremos que tais soluções são positivas. Vamos, agora, adaptar nosso problema, com o objetivo de usar algumas ideias encontradas em Brézis & Kato (cf. [16]).

Proposição 1.20. *Seja $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $pq > N$, e $v \in E \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema*

$$-\Delta_p v + b(x)|v|^{p-2}v = \quad H(x, v) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.24}$$

Onde $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory que satisfaz a seguinte condição

$$|H(x,s)| \quad \leq \quad |h(x)||s|^{p-1}, \; para\ todo \quad s \in \mathbb{R}$$

e b é uma função contínua não negativa em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $M = M(q, ||h||_q) > 0$ tal que

$$||v||_\infty \quad \leq \quad M||v||_{p^*}. \tag{2.25}$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$, seja

$$A_m := \quad \{x \in \mathbb{R}^N : |v|^{\beta-1} \leq m\},$$

e

$$v_m = \begin{cases} v|v|^{p(\beta-1)} & \text{em } A_m \\ m^p v & \text{em } B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Segue da definição de v_m, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v|_m^p(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad v_m|_{\partial B_m} = v_m|_{\partial A_m}.$$

Calculando a derivada fraca ∇v_m, temos

$$\nabla v_m = \begin{cases} (p\beta - (p-1))|v|^{p(\beta-1)}\nabla v & \text{em } A_m \\ m^p \nabla v & \text{em } B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Desta forma usando a definição de v_m segue que $v_m \in E$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m\,\mathrm{d}x = (p\beta - (p-1)) \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x \\ + m^p \int_{B_m} |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aplicando esta função teste v_m em (2.24), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b(x)|v|^{p-2}v v_m\right)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v)v_m\,\mathrm{d}x.$$

Agora, definimos

$$\omega_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1} & \text{em } A_m \\ mv & \text{em } B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Desta forma, temos que

$$\nabla \omega_m = \begin{cases} \beta|v|^{\beta-1}\nabla v & \text{em } A_m \\ m\nabla v & \text{em } B_m. \end{cases}$$

Segue da definição de ω_m, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\omega_m^p(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \omega_m|_{\partial B_m} = \omega_m|_{\partial A_m},$$

e, portanto segue que $\omega_m \in E$. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^p\,\mathrm{d}x = \beta^p \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x + m^p \int_{B_m} |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Devido a (2.26) e (2.27) temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_m|^p + \ b(x)\omega_m^p \,\mathrm{d}x) \ \ &- \ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b(x)|v|^{p-2} v v_m\right) \,\mathrm{d}x = \\ &= \ \int_{A_m} \left(\beta^p - p\beta + (p-1)\right) |v|^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Notemos que $\beta^p - p\beta + (p-1) > 0$. Usando (2.26), obtemos a seguinte desigualdade

$$\Big(p\beta - (p-1)\Big) \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b(x)|v|^{p-2} v v_m\right) \,\mathrm{d}x,$$

à qual implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_m|^p + b(x)\omega_m^p \,\mathrm{d}x) \ \ \leq$$

$$\leq \ \ \left[\frac{(\beta^p - p\beta + (p-1))}{(p\beta - (p-1))} + 1\right] \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + b(x)|v|^{p-2} v v_m\right) \,\mathrm{d}x.$$

Como estamos supondo que v é solução de (2.24), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \omega_m|^p + b(x)\omega_m^p \,\mathrm{d}x) \leq \ \ &\frac{\beta^p}{(p\beta - (p-1))} \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x. \\ \leq \ \ & \qquad\qquad \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Considere S a constante de Sobolev, a qual satisfaz

$$\| \ u \ \|_{p^*}^p \ \ \leq \ \ S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a definição de ω_m e a estimativa $|H(x,s)| \leq |h(x)||s|^{p-1}$, para todo $s > 0$, concluímos que

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{p^*}\right]^{(N-p)/N} \ \ \leq \ \ S\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\omega_m^p \,\mathrm{d}x.$$

Se $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q} = 1$, então pela desigualdade de Hölder

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{p^*}\right]^{(N-p)/N} \ \ \leq \ \ S\beta^p ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{pq_1} \,\mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.$$

Como $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$ e $|\omega_m| = |v|^\beta$em A_m, obtemos

$$\left[\int_{A_m} |v|^{p^*\beta}\right]^{(N-p)/N} \ \ \leq \ \ S\beta^p ||h||_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p\beta q_1} \,\mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos pelo Teorema da Convergência Monótona que

$$||v||_{p^*\beta}^{p\beta} \ \ \leq \ \ S\beta^p ||h||_q ||v||_{p\beta q_1}^{p\beta},$$

ou seja,

$$||v||_{p^*\beta} \quad \leq \quad \beta^{1/\beta}\left(S||h||_q\right)^{1/(p\beta)}||v||_{p\beta q_1}. \tag{2.28}$$

Como $q > N/p$ implica $\dfrac{N}{N-p} > q_1$, podemos considerar $\sigma = \dfrac{N}{q_1(N-p)} > 1$. E iniciamos o processo de iteração considerando $\beta = \sigma$ em (2.28), temos: $pq_1\beta = p^*$ e

$$||v||_{p^*\sigma} \quad \leq \quad \sigma^{1/\sigma}\left(S||h||_q\right)^{1/(p\sigma)}||v||_{p^*}. \tag{2.29}$$

Agora, fazendo $\beta = \sigma^2$ em (2.28) obtemos $pq_1\beta = p^*\sigma$ e

$$||v||_{p^*\sigma^2} \quad \leq \quad \sigma^{2/\sigma^2}\left(S||h||_q\right)^{1/(p\sigma^2)}||v||_{p^*\sigma}. \tag{2.30}$$

Observemos que desigualdades (2.29) e (2.30) implicam que

$$||v||_{p^*\sigma^2} \quad \leq \quad \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}}\left(S||h||_q\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)}||v||_{p^*}. \tag{2.31}$$

Continuando o processo de iteração, tomando β em (2.28) igual σ^j, podemos concluir que

$$||v||_{p^*\sigma^j} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\frac{3}{\sigma^3}+\cdots+\frac{j}{\sigma^j}}\left(S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^3}+\cdots+\frac{1}{\sigma^j}\right)}||v||_{p^*}. \tag{2.32}$$

Sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\sigma^j} \quad = \quad \frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}$$

segue portanto de (2.32) que

$$||v||_{p^*\sigma^j} \quad \leq \quad \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2}\left(S||h||_q\right)^{1/(p(\sigma-1))}||v||_{p^*},$$

para todo $j \geq \mathbb{N}$. Além disso, temos que

$$||v||_\infty \quad = \quad \lim_{i\to\infty}||v||_i,$$

então mostramos que a proposição 1.20 é válida para

$$M \quad = \quad \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2}\left(S||h||_q\right)^{1/(p(\sigma-1))}$$

com

$$\sigma \quad = \quad \frac{N(q-1)}{q(N-p)}.$$

■

Lema 1.21. *Se $v \in E$ é um ponto crítico do funcional J, então $v > 0$.*

Prova: Como $v \in E$ é um ponto crítico para J temos

$$0 = \langle J'(v), v^- \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v^- + V(x)|v|^{p-2}vv^-)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)v^-\, \mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^p \mathrm{d}x,$$

E concluímos que, $||v^-||_{D^{1,p}} = 0$ e consequentemente, $v \geq 0$. Pelo lema anterior sabemos que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando os argumentos de regularidade desenvolvidos em (cf. [24], [49]) temos que $v \in H^2_{loc}(B) \cap H^1_{loc}(B)$ mais ainda, $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(B)$ e o resultado segue da Versão fraca do Princípio do Máximo. ∎

Lema 1.22. *Seja $R > 1$, toda solução de energia finita u de* (AP1) *tal que $J(u) = m_J$ satisfaz*

$$||u||_\infty \leq \tilde{M} := M\left(S\left(p/(p-1)\right)kd\right)^{1/p}.$$

Prova: Considere as funções

$$H(x,t) := g(x,t) \quad \text{e} \quad b(x) := V(x),$$

Onde a função g é a função considerada em (2.3). Observemos que se u é uma solução positiva para o problema auxiliar (AP1), então u satisfaz a seguinte igualdade

$$-\Delta_p u + b(x)|u|^{p-2}u = H(x,u) \quad in \quad \mathbb{R}^N,$$

Das hipóteses (f_1) e (f_3), concluímos $|H(x,t)| \leq |f(t)| \leq c_0|t|^{\gamma-1}$, e portanto,

$$|H(x,u)| \leq h(x)|u|^{p-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

onde a função h é descrita por

$$h(x) = c_0|u(x)|^{\gamma-p}.$$

Notemos que como $\gamma < p^*$ segue que $1/(\gamma-p) \geq (N-p)/p^2$ dai, $p^*/(\gamma-p) \geq N/p$. Por cálculos diretos temos que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q = \dfrac{p^*}{\gamma-p}$ com

$$||h||_q \leq c_0\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)Skd\right)^{\frac{\gamma-p}{p}}.$$

O resultado segue da Proposição (1.20) com

$$M = \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2}\left(Sc_0\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)Skd\right)^{\frac{\gamma-p}{p}}\right)^{1/(p(\sigma-1))}$$

com

$$\sigma = \frac{N(q-1)}{q(N-p)}.$$

■

Para obtermos o decaimento para R suficientemente grande das soluções do problema auxiliar (AP1), precisaremos caracterizar as funções harmônicas radiais. O caso $p = 2$ do seguinte Lema pode ser encontrado em [29].

Lema 1.23. *Seja $1 < p < N$. A função $v : \left(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}}$$

é p-harmônica, isto é , satisfaz $-\Delta_p v = 0$.

Prova: Buscamos soluções radiais $u(x) = v(r)$ para obter soluções da equação do p-Laplaciano. Isto é,

$$u(x) = v(r) \quad \text{onde} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Para $i = 1, \cdots, n$ temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \cdot \frac{\partial r}{x_i} = v'(r) \cdot \frac{x_i}{r}.$$

Ou seja,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = v'(r)\left(\frac{x_1}{r}, \cdots, \frac{x_n}{r}\right) = \frac{v'(r)}{r}(x_1, \cdots, x_n).$$

Desta forma, podemos concluir que

$$|\nabla u|^{p-2} = \frac{|v'(r)|^{p-2}}{r^{p-2}}\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)^{p-2} = \frac{|v'(r)|^{p-2}}{r^{p-2}} \cdot r^{p-2} = |v'(r)|^{p-2}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\right)\nabla u e_i + \sum_{i=1}^{n} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla u e_i\right).
\end{aligned}$$

Por cálculos diretos, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|v'(r)|^{p-2}\Big) = (p-2)|v'(r)|^{p-4}v'(r)\cdot v''(r)\cdot \frac{x_i}{r}.$$

Portanto, podemos dizer que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2})\cdot \nabla u e_i = (p-2)|v'(r)|^{p-2}\cdot v''(r)\cdot \frac{x_i^2}{r^2}.$$

Daí, temos

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2})\cdot \nabla u\, e_i = (p-2)|v'(r)|^{p-2}\cdot v''(r).$$

Além disso, observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla u\, e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v'(r))\cdot\frac{x_i}{r} + v'(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = v''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

E portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla u\ e_i) = &\ \sum_{i=1}^{n}|v'(r)|^{p-2}\left[v''(r)\cdot\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right]\\ = &\ \ |v'(r)|^{p-2}v''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)|v'(r)|^{p-2}v'(r).\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \Leftrightarrow (p-1)|v'(r)|^{p-2}v''(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)|v'(r)|^{p-2}v'(r) = 0.$$

Suponhamos que $v'(r)\neq 0$, então

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{v''(r)}{|v'(r)|} = \frac{1-n}{p-1}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\log\Big(v'(r)\Big) = \left(\frac{1-n}{p-1}\right)\log r.$$

Assim, concluímos que

$$v(r) = \begin{cases} \dfrac{b}{r^{\frac{n-p}{p-1}}} + c, & \text{para} \quad n\neq p\\[2em] b\log r + c, & \text{para}\quad n = p\end{cases}$$

é a solução fundamental da equação $-\triangle_p\,\psi = 0$. ■

Observação 1.24. *Para $1<p<N$. Temos que $\nabla\left(\dfrac{1}{r^{(N-p)/(p-1)}}\right)\in L^p(\mathbb{R}^N\setminus B_R(0))$.*

De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}\frac{1}{\left(r^{(N-p)/(p-1)+1}\right)^p}r^{N-1}dr = \frac{1}{R^{(N-p)/(p-1)}}.$$

Lema 1.25. *Para qualquer* $R_0 \geq R$*, seja* u *uma solução de energia limitada para o problema* (AP1) *onde o potencial* V *é uma função que satisfaz a condição* (V_1)*. Então* u *satisfaz a seguinte estimativa de decaimento:*

$$u(x) \;\leq\; \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} \parallel u \parallel_\infty}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}} \;\leq\; \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} \left(\tilde{M}\,(p/(p-1))\,Skd\right)^{\frac{1}{p}}}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}} \qquad \textit{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

Prova: Observemos que

$$-\Delta_p u + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x) u^{p-1} \;=\; g(x,u) - \frac{1}{k} V(x) u^{p-1} \leq 0, \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Considere a função p-harmônica $v : \left(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) \;=\; \frac{R^{\frac{N-p}{p-1}} \parallel u \parallel_\infty}{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}}.$$

Segue do Lema 1.23 que a função v satisfaz

$$-\Delta_p v \;=\; 0.$$

Portanto,

$$-\Delta_p v + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x) v^{p-1} \;\geq\; 0 \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Sendo $p > 1$, temos que a função $\zeta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\zeta(x) = |x|^p$ é convexa e satisfaz a seguinte desigualdade (cf. [40])

$$\left(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right)(x-y) \;\geq\; \begin{cases} C_p|x-y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\[2ex] C_p \dfrac{|x-y|^2}{\left(|x|+|y|\right)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2 \end{cases}$$

para alguma constante real positiva C_p e para quaisquer x, y em $\mathbb{R}^N$.

Considere, agora, a função teste definida a seguir

$$\eta \;=\; \begin{cases} (u-v)^+, & \text{se} \quad |x| \geq R \\ \quad 0, & \text{se} \quad |x| \leq R \end{cases}$$

Observemos que $u \leq v$ em ∂B_R e pela Observação 1.24 podemos concluir que $\eta \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como u é solução do problema auxiliar (AP1), temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} 0 \;&\geq\; \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\nabla\eta + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)(u^{p-1} - v^{p-1})\eta\,\mathrm{d}x \\ &\geq\; \int_{\{x\in\mathbb{R}^N : u > v\}} \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)\left(u^{p-1} - v^{p-1}\right)(u-v)\,\mathrm{d}x \quad \geq 0 \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geq R \quad \text{e} \quad u > v\}$ é vazio. E, concluímos a prova. ∎

1.6 Prova do Teorema 1.1

Prova: Pelos Lemas 1.13 e 1.15, o problema (AP1) tem pelo menos uma solução positiva de energia limitada $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto devido a definição de g dada em (2.3), é suficiente mostrar que u satisfaz a desigualdade

$$f(u) \leq \frac{V(x)}{k} u^{p-1} \quad \text{em} \quad |x| \geq R.$$

Segue do item 2 da Observação 1.5 que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|sf(s)| \leq c_o |s|^{p^*} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Em virtude do Lema 1.25 temos que

$$\frac{f(u)}{u^{p-1}} \leq c_0 |u|^{\frac{p^2}{N-p}} \leq c_0 \left(\tilde{M}(\left(\frac{p}{p-1} \right) Skd)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{p^2}{N-p}} \frac{R^{\frac{p^2}{p-1}}}{|x|^{\frac{p^2}{p-1}}} \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Considere $\mu^* = kc_0 \left(\tilde{M} \left(\left(\frac{p}{p-1} \right) Skd \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{p^2}{N-p}}$ e $\mu \geq \mu^*$. O resultado segue da hipótese (V_1). ∎

Capítulo 2

Equação quase linear com potencial que pode se anular no infinito

Neste capítulo estudamos a existência de soluções fracas positivas para o problema subcrítico quase linear da forma

$$-\Delta_p u - \Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

com o potencial V sendo uma função contínua não negativa. Ressaltamos que continuamos com as mesmas hipóteses do capítulo 2 sobre o potencial V e sobre a não linearidade f, contudo trabalhamos com uma perturbação linear do operador p-laplaciano, ou seja, estudamos a seguinte classe de operadores $-\Delta_p u - \Delta u$. Aqui, a temos uma dificuldade a mais em relação ao capítulo 2, que é encontrar caracterização de funções harmônicas radiais que pertença ao espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))$, superamos este empecilho trabalhando em $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))$, desta forma podemos usar o Lema radial (cf.[12]) para substituir o Lema 1.25 obtido no capítulo 2 e desta forma garantimos que as soluções, u, do tipo "Passo da Montanha"do problema auxiliar (AP2) satisfazem uma estimativa de decaimento a zero no infinito mais precisamente:

$$u(x) \leq C_N |x|^{(2-N)/2} \left(2kd\right)^{1/2}, \quad \text{q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N,\, |x| \geq 1.$$

Nossos argumentos fundamentais baseiam-se no método de penalização ou truncamento e interação de Moser.

Dedicaremos nos a estudar a existência de soluções fracas positivas para o problema subcrítico quase linear da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta u + V(x)u = f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u > 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u \in \ D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P2}$$

onde $2 < p < N$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa que satisfaz as seguintes condições:

(V_1) Existem números reais $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} \inf_{|x| \geq R} |x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}} V(x) \geq \mu.$$

(V_2) V é radial, ou seja, $V(x) = V(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Assumimos que a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $\displaystyle\limsup_{s \to 0^+} \frac{sf(s)}{s^{p^*}} < \infty$,

(f_2) Existe $\gamma \in (p, p^*)$ tal que $\displaystyle\limsup_{s \to +\infty} \frac{sf(s)}{s^{\gamma}} = 0$,

(f_3) Existe $\theta > p$ tal que $0 < \theta F(s) \equiv \theta \displaystyle\int_0^s f(t)dt \leq sf(s)$ para todo $s > 0$.

O resultado principal deste capítulo é enunciado a seguir:

Teorema 2.1. *Suponhamos que as hipóteses* $(V_1) - (V_2)$ *e* $(f_1) - (f_3)$ *sejam satisfeitas. Então, existe uma constante* $\mu^* > 0$ *tal que o problema* (P2) *tem pelo menos uma solução fraca positiva para todo* $\mu \geq \mu^*$.

Vejamos alguns exemplos de potenciais satisfazendo nossas hipóteses.

Exemplo 2.2. Sejam μ e R números reais positivos. Observemos que se $V(x)$ é uma função radial, contínua em $\mathbb{R}^N$ e além disso, $V(x) \geq \mu$ para todo $|x| \geq R$, então $V(x)$ satisfaz a condição (V_1). Desta forma, temos dois casos a considerar:

(i) se $V(x)$ é uma função limitada tal que $V(x) \geq \mu$ para todo $|x| \geq R$ então satisfaz a condição (V_1).

(ii) se $V(x)$ é coercivo, isto é,

$$V(x) \to +\infty, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty,$$

então, em ambos os casos, $V(x)$ satisfaz a condição (V_1). De fato, dado $\mu > 0$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $V(x) > \mu$ para todo $|x| > R$. Portanto,

$$\frac{1}{R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}} V(x) \geq \inf_{|x|\geq R} V(x) \quad \geq \mu.$$

Exemplo 2.3. Sejam $\mu > 0$, $R > 0$ e $\alpha \geq 0$ tais que $\alpha \leq \dfrac{N-2}{2}\dfrac{N(p-2)+2p}{N-p}$. Considere $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 0$ em $B_{R/2}(0)$ e $\eta = 1$ em $B_R^c(0)$. Definimos a seguir outros exemplos de potenciais que satisfazem nossas hipóteses:

$$V(x) = 4\mu\eta(x)\frac{R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}}{1+|x|^{\alpha/2}} \quad \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$V(x) = \begin{cases} \mu\eta(x) & \text{se} \quad |x| < R, \\[2ex] \dfrac{\mu R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}}{|x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} & \text{se} \quad |x| \geq R, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} \mu\dfrac{|x|}{R} & \text{se} \quad |x| < R, \\[2ex] \dfrac{\mu R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}}{|x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} & \text{se} \quad |x| \geq R. \end{cases}$$

Observação 2.4. *Notemos que as considerações feitas em Observação 1.5 no capítulo 2 continuam válidas para a não linearidade f.*

2.1 Preliminares

Temos o intuito de provar a existência de soluções positivas para o problema principal (P2). Observemos que pela condição (f_1) e pelo fato de f ser contínua, podemos concluir que $f(0) = 0$. Desta forma é conveniente redefinir, de forma contínua, a não lineridade f da seguinte maneira

$$f(t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t \leq 0.$$

Analogamente ao capítulo 2, notemos que apenas com a hipótese que o potencial $V(x)$ é contínuo e não negativo, o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (cf. [11]) é o ambiente natural no qual podemos tratar o problema (P2). Contudo, já mencionamos que nos nossos argumentos, é necessário estabelecermos certas estimativas de decaimento no infinito para soluções do problema auxiliar (AP2) e com base nestas estimativas a priori e a condição (V_1) podemos garantir a existência de pelo menos uma solução fraca para o problema (P2). Assim, restringimos o problema (P2) ao subespaço das funções radias (cf. [47], [12], [23]). Enfim, neste trabalho, consideraremos como espaço ambiente o subespaço $E \subset D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ definido a seguir

$$E := \left\{ u \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Considere o seguinte subespaço de $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$E_1 := \left\{ u \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Notemos E_1 um espaço de Hilbert, consideremos a seguinte norma

$$\begin{aligned} ||\cdot||_{E_1} &: E_1 \to \mathbb{R} \\ u \longmapsto ||u||_{E_1} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Além disso, se considerarmos em E a seguinte função

$$\begin{aligned} ||\cdot||_E &: E \to \mathbb{R} \\ u \longmapsto ||u||_E &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &= ||u||_{E_1} + ||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Temos que é E é um espaço normado.

Observação 2.5. *Notemos que valem os seguintes mergulhos contínuos:*

$$i_1 : E \hookrightarrow D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \qquad i_2 : E \hookrightarrow D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad N \geq 3. \tag{3.1}$$

Com relação ao espaço normado E podemos afirmar que:

Lema 2.6. *O espaço E é um espaço de Banach reflexivo.*

Como a prova do Lema anterior é análoga a prova feita no capítulo 2 com apenas poucos detalhes a acrescentar, a prova será omitida.

A equação de Euler-Lagrange (P2) está associada ao funcional de energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\big(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x\big) + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}F(u)\,\mathrm{d}x, \quad u \in E.$$

É fato conhecido que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com derivada de Gâteaux dada por

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + \nabla u\nabla v + V(x)uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}f(u)v\,\mathrm{d}x \quad \text{para todo } u, v \in E.$$

além disso, os pontos críticos de I são soluções fracas do problema (P2).

2.2 O problema auxiliar

Com o intuito de utilizar o método introduzido por del Pino e Felmer [25], faremos a seguir, algumas considerações: Sejam $\Lambda = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ e a constante $k = \dfrac{p\theta}{\theta - p} > p$. Considere a seguinte função $\widehat{f} : (\mathbb{R}^N \setminus \Lambda) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{f}(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{se} \quad kf(t) \leq V(x)t \quad \text{e} \quad t \geq 0, \\ \dfrac{V(x)}{k}t, & \text{se} \quad kf(t) > V(x)t \quad \text{e} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Podemos reescrever a função $\widehat{f}$ da seguinte maneira: $\widehat{f} : \big(\mathbb{R}^N \setminus \Lambda\big) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x,t) := \min\{f(t), (V(x)/k)|t|\}.$$

Observemos que $\widehat{f}$ está bem definida e é uma função contínua não negativa pois é o mínimo de funções contínuas não negativas. Definimos a função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,t) = \chi_\Lambda(x) f(t) + (1 - \chi_\Lambda(x))\, \widehat{f}(x,t) \tag{3.2}$$

onde χ_Λ é a função característica do conjunto Λ. Convém, observar que g é uma função de Carathéodory, não negativa e $g(x,t) = 0$ para $t \leq 0$.

Reformulamos o problema (P2), considerando o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta u + V(x)u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u \in \ D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AP2}$$

Sejam $\widehat{F}(x,s) = \displaystyle\int_0^s \widehat{f}(x,t)dt$ e

$$G(x,s) = \int_0^s \widehat{g}(x,t)dt = \chi_\Lambda(x) F(s) + (1 - \chi_\Lambda(x))\, \widehat{F}(x,s).$$

Lema 2.7. *As funções g e G satisfazem as seguintes estimativas:*

1. $g(x,t) = f(t)$ *e* $G(x,t) = F(t)$ *para todo* $x \in \Lambda$.
2. $g(x,t) \leq f(t)$ *e* $G(x,t) \leq F(t)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $t \in \mathbb{R}$.
3. $0 \leq G(x,t) \leq \dfrac{V(x)}{2k}|t|^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$ *e* $t \in \mathbb{R}$.
4. $0 \leq |t|g(x,t) \leq \dfrac{V(x)}{k}|t|^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Prova: É suficiente usar as definições de $\widehat{f}$ e g. ■

2.3 O funcional modificado

Como almejamos usar a versão mais geral (forte) do teorema do passo da montanha vamos mostrar que o funcional de energia associado ao problema de Euler-Lagrange auxiliar (AP2) tem os pré-requisitos que são exigidos por tal teorema. Nesta seção mostraremos que $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. O funcional de energia associado ao problema de Euler-Lagrange auxiliar (AP2) é dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x\big) + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x, \quad u \in E.$$

Notemos que os pontos críticos do funcional J correspondem as soluções fracas do problema auxiliar (AP2).

Lema 2.8. *O funcional J possui as seguintes propriedades:*

1. *J está bem definido.*

2. *J é contínuo em E.*

3. *J é de classe C^1 com derivada de Gâteaux dada por*

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + \nabla u\nabla v + V(x)uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,\mathrm{d}x$$

para todo $u, v \in E$.

Prova: Para provar o Item 1, notemos que pelas hipóteses $(f_1)-(f_3)$ e pelo Lema 2.7, para cada $u \in E$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x \le \int_\Lambda F(u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} \frac{V(x)}{2k}|u|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\le c_o\int_\Lambda |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} \frac{V(x)}{2k}|u|^2\,\mathrm{d}x \le c_0||u||_{p^*} + \frac{1}{2k}||u||_{E_1}^2.$$

Logo, o funcional J está bem definido.

A seguir, provaremos o Item 2. Seja $u_n \to u$ em E pela continuidade do mergulho (3.1) temos $u_n \to u$ em $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Usando a Observação 2.4 e o teorema da Convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, $J(u_n) \to J(u)$, ou seja, o funcional J é contínuo em E.

Para provar o Item 3, notemos que para $u, v \in E$ fixados, temos pelo teorema do valor médio que

$$\frac{G(x,u+tv) - G(x,u)}{t} = g(x,\xi)v$$

onde

$$\min\{u(x), u(x)+tv(x)\} \le \xi(x) \le \max\{u(x), u(x)+tv(x)\}, \text{ para } 0 < |t| < 1.$$

Observemos que $g(x,\xi) \to g(x,u(x))$ q.t.p $\;x \in \mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}|g(x,\xi)v| &\leq f(\xi)|v| \leq |\xi|^{p^*-1}|v| \leq \max(|u(x)|,|u(x)+tv(x)|)^{p^*-1}|v(x)| \\ &\leq (|u|+|v|)^{p^*-1}|v|.\end{aligned}$$

Notemos ainda que $(|u|+|v|)^{p^*-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$, de fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u|+|v|)^{p^*-1}|v| \,\mathrm{d}x \leq \quad ||\max(u(x),v(x))||_{p^*/(p^*-1)}||v||_{p^*} + ||v||_{p^*}.$$

Usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue concluímos que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x,u+tv)-G(x,u)}{t}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v\,\mathrm{d}x.$$

Resta mostrar a continuidade do funcional J' em E. Considere $q = p/(p-1)$. Vamos definir $h_1(w) := |\nabla w|^{p-2}\nabla w$, $w \in E$. Suponhamos que $u_n \to u$ em E. Consequentemente, $u_n \to u$ em $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e daí $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u\;$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $h_1(u_n) \to h_1(u)$ em $\;L^q(\mathbb{R}^N)$. Observemos ainda que $g(x,u_n) \to g(x,u)$ em $L^{p^*/(p^*-1)}(\mathbb{R}^N)$. Consideremos $q_1 = p^*/(p^*-1)$. Desta forma, obtemos pela desigualdade de Hölder, a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|\langle J'(u_n)-J'(u),v\rangle| \leq{}& ||h_1(u_n)-h_1(u)||_q||\nabla v||_p + ||\nabla u_n - \nabla u||_2||\nabla v||_2 \\ &+ ||V(x)^{1/2}(u_n-u)||_2||V(x)^{1/2}v||_2 + ||g(x,u_n)-g(x,u)||_{q_1}||v||_{p^*}\end{aligned}$$

e portanto, graças à imersão $E \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\begin{aligned}||J'(u_n)-J'(u)||_{E'} \leq{}& ||h_1(u_n)-h_1(u)||_q + ||\nabla u_n - \nabla u||_2 + ||V(x)^{1/2}(u_n-u)||_2 \\ &+ C||g(x,u_n)-g(x,u)||_{q_1} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.\end{aligned}$$

para alguma constante real C não negativa. ∎

2.4 Condições de compacidade

Nesta seção provaremos que o funcional do J associado ao problema auxiliar (AP2) possui a geometria do Passo da Montanha. Além disso, mostraremos que uma sequência (P.–S.) de J, a menos de uma subsequência, converge fortemente em E, ou seja, mostraremos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Deste modo, poderemos utilizar o Teorema do Passo da Montanha forte para encontrar uma solução do problema auxiliar (AP2).

Lema 2.9. *(Geometria-Passo da Montanha) O funcional J tem a geometria do Passo da Montanha, isto é, J satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existem ρ, $\alpha > 0$, tal que $J(u) \geq \alpha$ se $\;||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \rho$,*

2. *Para qualquer u não negativa, $u \in C_0^\infty(\Lambda, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, temos $J(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.*

Prova: Provaremos o Item 1. Em virtude da definição da função G e da Observação 2.4 temos que

$$G(x,u) \leq F(u) \leq \; c_0\, |u|^{p^*} \text{ para todo } \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

e, então pelo mergulho contínuo (3.1) concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u) \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \leq c_0 ||u||_{p^*}^{p^*} \leq C_1 ||\nabla u||_p^{p^*},$$

onde C_1 é uma constante real positiva. Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2 \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u) \, \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2} ||u||_{E_1}^2 + \frac{1}{p} ||\nabla u||_p^p - C_1 ||\nabla u||_p^{p^*} \geq \left(\frac{1}{p} - C_1 ||\nabla u||_p^{p^*-p} \right) ||\nabla u||_p^p. \end{aligned}$$

Escolha $\rho > 0$ tal que $D = \left(\dfrac{1}{p} - C_1 \rho^{p^*-p} \right) > 0$ e considere $\alpha = D\rho^p$. Daí, existem ρ, $\alpha > 0$ tal que $J(u) \geq \alpha$, para todo $u \in E$ tal que $||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = ||\nabla u||_p = \rho$.

Agora, provaremos o Item 2. Segue da definição de G, que $G(x,u) = F(u)$ para $x \in \Lambda$. Pela hipótese (f_3) temos

$$F(s) \geq C_2 s^\theta - C_3, \quad s > 0,$$

onde C_2, C_3 são constantes reais positivas. Já que $\theta > p$, para $u \in C_0^\infty(\Lambda, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ com $u \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^p}{p} ||\nabla u||_p^p + \frac{t^2}{2} ||u||_{E_1}^2 - \int_\Lambda F(tu) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^p}{p} ||\nabla u||_p^p + \frac{t^2}{2} ||u||_{E_1}^2 - C_2 t^\theta \int_\Lambda |u|^\theta \, \mathrm{d}x + C_3 \int_\Lambda 1 \, \mathrm{d}x \\ &\longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \end{aligned}$$

Isto completa a prova. ■

Lema 2.10. *Suponhamos que as hipóteses $(f_1)-(f_3)$ sejam satisfeitas. Se $(u_n) \subset E$ é uma sequência arbitrária que satisfaz a condição de Palais-Smale, i.e.,*

$$|J(u_n)| \leq c \quad e \quad J'(u_n) \to 0 \quad em \quad E',$$

onde c é uma constante real positiva, então (u_n) é limitada em E.

Prova: Seja $(u_n) \in E$ uma sequência que satisfaz a condição de Palais-Smale. Buscamos estabelecer uma estimativa para

$$\begin{aligned} J(u_n) - \langle \frac{1}{\theta} J'(u_n), u_n \rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) ||\nabla u_n||_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) ||u_n||_{E_1}^2 \\ - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.3}$$

De acordo com o Lema 2.7 obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\Lambda} \left(\frac{1}{\theta} f(u_n) u_n - F(u_n)\right) \mathrm{d}x \\ + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Lambda} g(x, u_n) u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Lambda} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

que associada a hipótese (f_3) e o Lema 2.7 nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Lambda} g(x, u_n) u_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Lambda} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x \\ \geq - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u_n)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Utilizando esta última desigualdade temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} J(u_n) - \langle \frac{1}{\theta} J'(u_n), u_n \rangle &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) ||\nabla u_n||_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) ||u_n||_{E_1}^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)}{k} u_n^2\,\mathrm{d}x \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) ||\nabla u_n||_p^p + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2k}\right) ||u_n||_{E_1}^2. \end{aligned}$$

Notemos $k = \theta p/(\theta - p) > \theta 2/(\theta - 2) \Leftrightarrow p > 2$. Desta forma, concluimos que

$$J(u_n) - \langle \frac{1}{\theta} J'(u_n), u_n \rangle \geq \frac{1}{2k} \left(||u_n||_{E_1}^2 + ||\nabla u_n||_p^p\right). \tag{3.4}$$

Como (u_n) é uma sequência de Palais-Smale, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta} J'(u_n) \cdot u_n \quad \leq \quad c + ||u_n||_E \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{3.5}$$

Combinando as propriedades (3.4) e (3.5), obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2k} \left(||u_n||_{E_1}^2 + ||\nabla u_n||_p^p\right) \quad \leq \quad c + ||u_n||_{E_1} + ||\nabla u_n||_p \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{3.6}$$

Como a desigualdade acima, não é válida se $||u_n||_E \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos que (u_n) é uma sequência limitada em E. ■

Para encontrar uma solução do problema auxiliar (AP2), precisamos garantir a existência de um ponto crítico positivo $\varphi \in E$ associado ao funcional J, e para isto utilizaremos a versão forte do Teorema do Passo da Montanha. Primeiramente, mostraremos que uma sequência (P.–S.) de J, a menos de uma subsequência, converge fortemente em E, ou seja, mostraremos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale. Enunciaremos um importante resultado devido a Boccardo e Murat (cf. [14]) que garante a convergência q.t.p do gradiente para sequências (P.–S.).

Lema 2.11. *Sejam E e J respectivamente o espaço de Banach e funcional definidos nas Seções 3.1 e 3.3. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência (P.–S.) para o funcional J. Então, a menos de subsequência, $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p $x \in R^N$.*

Para consultar a prova deste Lema citamos como referência [14] e [8].

Lema 2.12. *Sob as hipóteses do Lema 2.10, temos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: O Lema 2.10 assegura que existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E, passando a uma subsequência se necessário. Notemos que vale a seguinte identidade

$$(||u_n||_{E_1} - ||u||_{E_1}) + \big(||u_n||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} - ||u||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\big) = \langle J'(u_n) + J'(u), u_n - u\rangle$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} (g(x,u_n) + g(x,u))\,(u_n - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n\,\mathrm{d}x.$$

Temos como objetivo mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n||_E = ||u||_E$ para tal dividiremos a prova em três etapas:

Afirmação (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle J'(u_n) + J'(u), u_n - u\rangle = 0.$

Afirmação (2)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Afirmação (3)

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int ug(x,u)\,\mathrm{d}x$$
$$\lim_{n\to\infty}\int ug(x,u_n)\,\mathrm{d}x = \int ug(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Notemos que é suficiente provar as Afirmações (1)–(3) já que $u_n \rightharpoonup u$ em E implica $u_n \rightharpoonup u$ em E_1 e $u_n \rightharpoonup u$ em $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)\cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $||u||_{E_1} \leq ||u_n||_{E_1}$ e $||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_n||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$. Assim, das Afirmações (1)–(3) temos que $||u_n||_{E_1} \to ||u_n||_{E_1}$ e $||u||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \to ||u_n||_{D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$.

Prova: Afirmação (1) Notemos que

$$\langle J^{'}(u_n)+J^{'}(u),u_n-u\rangle \leq ||J^{'}(u_n)||_{E'}||u_n-u||_E + \langle J^{'}(u),u_n-u\rangle \leq C||J^{'}(u_n)||_{E'}$$
$$+\langle J^{'}(u),u_n-u\rangle$$

onde C é uma constante real positiva. Notemos ainda que $u_n \rightharpoonup u$ implica diretamente que $\lim_{n\to\infty}\langle J^{'}(u),u_n-u\rangle = 0$ e, como $||J^{'}(u_n)||_{E'} \to 0$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}\langle J^{'}(u_n)+J^{'}(u),u_n-u\rangle = 0$$

como queríamos. ∎

Agora, mostraremos a Afirmação (2)

Prova: Afirmação (2) Notemos que $w_n = |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ e que $||w_n||_{p/(p-1)}$ é limitada. Usando o Lema 2.11 temos que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^N$. Notemos que $w_n \to w$, $w = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ q.t.p $x \in R^N$, segue de [33, Teorema 13.44] que $w_n \rightharpoonup w$ em $L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Por outro lado, usando que $u_n \rightharpoonup u$

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

∎

Para cada $\varepsilon > 0$, seja $r > R$ tal que

$$2C\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\omega_N^{1/N}\max\left\{||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)},||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.7}$$

$$\max\left\{\left(||u||_{p^*}^{p^*-1}+||u_n||_{p^*}^{p^*-1}\right)||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)},||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)}^{p^*-1}||u_n||_{p^*}\right\}<\varepsilon, \tag{3.8}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e a constante real positiva C, é tal que $C \geq \max(||u_n||_{E_1}, ||\nabla u_n||_p^{p-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Enfim, provaremos a Afirmação (3)

Prova: Afirmação (3) Seja $\eta(x) = \eta_r(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$, uma função que satisfaz as seguintes propriedades $supp\,\eta \subseteq B_r^c(0)$, $\eta(x) \equiv 1$ em $B_{2r}^c(0)$, $0 < \eta(x) < 1$ se $r < |x| < 2r$ e

$$|\nabla\eta(x)| \;\leq\; \frac{1}{r}, \quad \text{para todo}\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Como (u_n) é uma sequência limitada em E e a função η é uma função limitada em $\mathbb{R}$, temos que a sequência (ηu_n) também é limitada em E, e portanto $J^{'}(u_n)\cdot(\eta u_n) = o_n(1)$, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(\eta u_n)+\nabla u_n\nabla(\eta u_n)+V(x)u_n(\eta u_n)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)(\eta u_n)\,\mathrm{d}x+o_n(1).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando que $\eta \equiv 0$ in $B_r(0)$, combinando a última equação com o Lema 2.7 segue que

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq r}(|\nabla u_n|^p+|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2)\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{k}\int_{|x|\geq r}V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x-\int_{|x|\geq r}u_n\nabla u_n\nabla\eta\,\mathrm{d}x-\int_{|x|\geq r}u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\eta\,\mathrm{d}x+o_n(1).\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{|x|\geq r}\left(|\nabla u_n|^p+|\nabla u_n|^2+V(x)|u_n|^2\right)\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{r}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|\,\mathrm{d}x+\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n|\,\mathrm{d}x\right)+o_n(1).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Pela desigualdade de Hölder, asseguramos que

$$\begin{aligned}&\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|\,\mathrm{d}x\leq||\nabla u_n||_2\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\\&\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n||\nabla u_n|^{p-1}\,\mathrm{d}x\leq||\nabla u_n||_p^{p-1}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r}|u_n|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Como estamos num anel (domínio limitado) podemos utilizar o Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov e concluir que $u_n \to u$ em $L^p(B_{2r} \setminus B_r)$ e em $L^2(B_{2r} \setminus B_r)$, daí

$$\begin{aligned} \limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| \,\mathrm{d}x &\leq C\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \\ \limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|^{p-1} \,\mathrm{d}x &\leq C\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para C escolhido anteriormente limitando as normas de (u_n). Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*} |B_{2r} \setminus B_r|^{1/N} \\ \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{p^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*} |B_{2r} \setminus B_r|^{1/N}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observando que $|B_{2r} \setminus B_r| \leq |B_{2r}| = \omega_N 2^N r^N$, de (3.11) e (3.12) segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n| \,\mathrm{d}x &\leq 2C\omega_N^{1/N} r\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*} \\ \limsup_{n\to\infty} \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n| \,\mathrm{d}x &\leq 2C\omega_N^{1/N} r\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{p^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pela escolha de $r > 0$ em (3.7), segue de (3.10) e (3.13) que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2) \,\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Usando (3.9), temos

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\geq 2r} u_n g(x, u_n) \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_n g(x, u_n)\eta \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + \nabla u_n \nabla(\eta u_n) + V(x)u_n(\eta u_n)\Big) \,\mathrm{d}x + o_n(1) \\ &\leq \int_{|x|\geq r} (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2) \,\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{B_{2r}\setminus B_r} \big(|u_n||\nabla u_n|^{p-1} + |u_n||\nabla u_n|\big) \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.15}$$

e pelo que já vimos segue que $\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} u_n g(x, u_n) \,\mathrm{d}x < 2\varepsilon$.

Por outro lado, (3.8) nos permite concluir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u_n g(x, u) \,\mathrm{d}x &\leq ||u||^{p^*-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u_n||_{p^*} \leq \varepsilon, \\ \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u g(x, u_n) \,\mathrm{d}x &\leq ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u_n||^{p^*-1}_{p^*} \leq \varepsilon, \\ \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq r} u g(x, u) \,\mathrm{d}x &\leq ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} ||u||^{p^*-1}_{p^*} \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ainda, pela escolha de r, obtemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq 2r}|g(x,u_n)u_n-g(x,u)u|\,\mathrm{d}x\\&\leq \limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq 2r}|g(x,u_n)||u_n|\,\mathrm{d}x+\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geq 2r}|g(x,u)||u|\,\mathrm{d}x<3\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Agora, usando a Observação 2.4, o teorema da Convergência dominada de Lebesgue e o mergulho compacto de Rellich-Kondrachov concluímos que

$$g(x,u_n)\to g(x,u)\quad \text{em}\quad L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r}),$$

onde γ é dado em (f_2). Consequentemente,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leq 2r}&(g(x,u_n)u_n-g(x,u)u)\ \mathrm{d}x\leq ||g(x,u_n)||_{L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r})}||u_n-u||_{L^{\gamma}(B_{2r})}\\&+||g(x,u_n)-g(x,u)||_{L^{\gamma/(\gamma-1)}(B_{2r})}||u||_{L^{\gamma}(B_{2r})}\to 0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Assim, (3.17) e (3.18) resultam em

$$\lim_{n\to\infty}\int u_n g(x,u_n)\,\mathrm{d}x=\int ug(x,u)\,\mathrm{d}x\tag{3.19}$$

■

Logo, provamos as Afirmações (1)–(3) e $||u_n||_E\to||u||_E$ como queríamos demonstrar.

■

Denotaremos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B=B_1(0)$ e por $I_0:W^{1,p}_{0,r}(B)\to\mathbb{R}$ o funcional

$$I_0(u)=\frac{1}{p}\int_B|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_B(|\nabla u|^2+\max(V(x),1)\,u^2)\,\mathrm{d}x-\int_B F(u)\,\mathrm{d}x.$$

Notemos que o funcional I_0 tem a geometria do Passo da Montanha. Denotaremos, também por d o nível do Passo da Montanha associado ao funcional I_0, isto é,

$$d=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I_0(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma=\{\gamma\in C\left([0,1],W^{1,p}_{0,r}(B)\right):\gamma(0)=0\quad\text{e}\quad\gamma(1)=e\},$$

com $e\in W^{1,p}_{0,r}(B)\setminus\{0\}$ verificando $I_0(e)<0$.

Observação 2.13. *Notemos que* $J(u) \leq I_0(u)$ *para todo* $u \in W^{1,p}_{0,r}(B)$*. Em particular,* $J(e) \leq I_0(e) < 0$*. Denotamos por* m_J *o nível do Passo da Montanha associado a* J*, that is,*

$$m_J = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)\right) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Mais ainda, temos que $m_J \leq d$*.*

Notemos que mostramos na Proposição 2.9 que existem ρ, $\alpha > 0$, tais que

$$J(u) \geq \alpha \quad \text{se} \quad ||u||_{D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)} = \rho.$$

Como $||u||_{D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)} = \rho$ é um bola fechada em $D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)$ segue que $||u||_{D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)} = \rho$ é um subconjunto fechado em $D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)$. Usando o Teorema da Alfândega temos que $||u||_{D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)} = \rho$ separa o espaço $D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)$ em duas componentes conexas disjuntas. Assim, precisaremos usar a versão mais forte do Teorema do Passo da Montanha. Segue a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha, a qual é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland como abordado em (cf.[9]) (veja também [22], [36] e [48] para resultados relacionados).

Proposição 2.14 (Teorema do Passo da Montanha-(versão forte))**.** *Seja* E *um espaço de Banach e* $\Phi \in C(E, \mathbb{R})$*, Gateaux-diferencial em* E*, com a derivada de Gateaux* $\Phi'(v) \in E'$ *para todo* $v \in E$ *e contínua da topologia da norma de* E *para a topologia fraca* $*$ *de* E'*. Suponha que* Φ *satisfaça a condição (P.–S.) e* $\Phi(0) = 0$*. Seja* S *um subconjunto fechado de* E *que desconecta por caminhos* E*. Sejam* $v_0 = 0$ *e* $v_1 \in E$ *pontos pertencentes a componentes conexas distintas de* $E \backslash S$*. Suponhamos que*

$$\inf_S \Phi \geq \alpha > 0 \quad e \quad \Phi(v_1) \leq 0.$$

Então, Φ *possui um valor crítico* c *o qual pode ser caracterizado por*

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = v_1\}.$$

Lema 2.15. *Seja $R > 1$, qualquer ponto crítico positivo u associado ao funcional J no nível crítico minimax m_J satisfaz a seguinte estimativa*

$$||u||_E \leq \ (2kd)^{1/2} + (2kd)^{1/p} \,.$$

Prova: Segue da desigualdade obtida em (3.4) e da definição do nível minimax d. ■

Notemos que, até o momento, mostramos o seguinte resultado:

Proposição 2.16. *Existe um ponto crítico $\varphi_1 \in E$ associado ao funcional*

$$J(\varphi) \ = \ \frac{1}{2}||\varphi||^2_{E_1} + \frac{1}{p}||\varphi||^p_{D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,\varphi)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in E$$

no nível crítico

$$m_J = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)).$$

2.5 Estimativas a priori

Nesta seção, estabeleceremos uma importante estimativa envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ da solução u de (AP2) que será fundamental para garantirmos a regularidade $C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0,1)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado, das soluções do problema auxiliar (AP2). Notemos que como consequência do Teorema do Máximo, teremos que tais soluções são positivas. Vamos, agora, adaptar nosso problema, com o objetivo de usar algumas ideias encontradas em Brézis e Kato (cf. [16]).

Proposição 2.17. *Seja $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $pq > N$, e $v \in E \subset D^{1,2}_r(\mathbb{R}^N) \cap D^{1,p}_r(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema*

$$-\Delta_p v - \Delta v + b(x)v = \ H(x,v) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \tag{3.20}$$

Onde $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory que satisfaz a seguinte condição

$$|H(x,s)| \ \leq \ |h(x)||s|^{p-1}, \ para\ todo \quad s \in \mathbb{R}$$

e b é uma função contínua não negativa em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $M = M(q, ||h||_q) > 0$ tal que

$$||v||_\infty \ \leq \ M||v||_{p^*}. \tag{3.21}$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$, seja

$$A_m := \quad \{x \in \mathbb{R}^N : \, |v(x)|^{\beta-1} \leq m\},$$

e

$$v_m = \begin{cases} v|v|^{p(\beta-1)} & \text{em } \; A_m \\ m^p v & \text{em } \; B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Segue da definição de v_m, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_m|^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad v_m|_{\partial B_m} = v_m|_{\partial A_m}.$$

Calculando a derivada fraca ∇v_m, temos

$$\nabla v_m = \begin{cases} (p\beta - (p-1))|v|^{p(\beta-1)}\nabla v & \text{em } \; A_m \\ m^p \nabla v & \text{em } \; B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Desta forma usando a definição de v_m segue que $v_m \in E$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m\,\mathrm{d}x = (p\beta - (p-1)) \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x \\ + m^p \int_{B_m} |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Aplicando esta função teste v_m em (3.20), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_m + \nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m\right)\,\mathrm{d}x \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m\,\mathrm{d}x.$$

Agora, definimos

$$\omega_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1} & \text{em } \; A_m \\ mv & \text{em } \; B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Desta forma, temos que

$$\nabla \omega_m = \begin{cases} \beta|v|^{\beta-1}\nabla v & \text{em } \; A_m \\ m\nabla v & \text{em } \; B_m. \end{cases}$$

Segue da definição de ω_m, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\omega_m^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \omega_m|_{\partial B_m} = \omega_m|_{\partial A_m},$$

e, portanto segue que $\omega_m \in E$. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^p\,\mathrm{d}x = \beta^p \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x + m^p \int_{B_m} |\nabla v|^p\,\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

Devido a (3.22) e (3.23) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla v_m \,\mathrm{d}x \;=\; \int_{A_m} (\beta^p - p\beta + (p-1))\, |v|^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x.$$

Notemos que $\beta^p - p\beta + (p-1) > 0$. Usando (3.22), o fato de que $\nabla v_m \nabla v \geq 0$ e $b(x) v v_m \geq 0$, obtemos a seguinte desigualdade

$$(p\beta - (p-1)) \int_{A_m} |v|^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla v_m + \nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m \right) \mathrm{d}x,$$

à qual implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^p \,\mathrm{d}x \leq \left[\frac{(\beta^p - p\beta + (p-1))}{(p\beta - (p-1))} + 1 \right] \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla v_m + \nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m \right) \mathrm{d}x.$$

Como estamos supondo que v é solução de (3.20), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^p \,\mathrm{d}x \leq \frac{\beta^p}{(p\beta - (p-1))} \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x \leq \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x.$$

Considere S a constante de Sobolev, a qual satisfaz

$$\| u \|_{p^*}^p \;\leq\; S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad u \in D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a definição de ω_m e a estimativa $|H(x,s)| \leq |h(x)||s|^{p-1}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{p^*} \right]^{(N-p)/N} \;\leq\; S\beta^p \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \omega_m^p \,\mathrm{d}x.$$

Se $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q} = 1$, então pela desigualdade de Hölder

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{p^*} \right]^{(N-p)/N} \;\leq\; S\beta^p ||h||_{L^q} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\omega_m|^{pq_1} \,\mathrm{d}x \right]^{1/q_1}.$$

Como $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$ e $|\omega_m| = |v|^\beta$em A_m, obtemos

$$\left[\int_{A_m} |v|^{p^*\beta} \right]^{(N-p)/N} \;\leq\; S\beta^p ||h||_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p\beta q_1} \,\mathrm{d}x \right]^{1/q_1}.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos pelo Teorema da Convergência Monótona que

$$||v||_{p^*\beta}^{p\beta} \;\leq\; S\beta^p ||h||_q ||v||_{p\beta q_1}^{p\beta},$$

ou seja,

$$||v||_{p^*\beta} \;\leq\; \beta^{1/\beta} \left(S ||h||_q \right)^{1/(p\beta)} ||v||_{p\beta q_1}. \tag{3.24}$$

Como $pq > N$ implica em $N/(N-p) > q_1$, tomando $\sigma = N/(q_1(N-p))$, temos $\sigma > 1$. Vamos iniciar o processo de iteração, considerando $\beta = \sigma$ em (3.24), temos: $pq_1\beta = p^*$ e

$$||v||_{p^*\sigma} \leq \sigma^{1/\sigma} \left(S||h||_q\right)^{1/(p\sigma)} ||v||_{p^*}. \tag{3.25}$$

Agora, fazendo $\beta = \sigma^2$ em (3.24) obtemos $pq_1\beta = p^*\sigma$ e

$$||v||_{p^*\sigma^2} \leq \sigma^{2/\sigma^2} \left(S||h||_q\right)^{1/(p\sigma^2)} ||v||_{p^*\sigma}. \tag{3.26}$$

Observemos que as desigualdades (3.25) e (3.26) implicam que

$$||v||_{p^*\sigma^2} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}} \left(S||h||_q\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)} ||v||_{p^*}. \tag{3.27}$$

Continuando o processo de iteração, tomando β em (3.24) igual σ^j, podemos concluir que

$$||v||_{p^*\sigma^j} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\frac{3}{\sigma^3}+\cdots+\frac{j}{\sigma^j}} \left(S||h||_{L^q}\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^3}+\cdots+\frac{1}{\sigma^j}\right)} ||v||_{p^*}. \tag{3.28}$$

Sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^j} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}.$$

Portanto de (3.28) que

$$||v||_{p^*\sigma^j} \leq \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S||h||_q\right)^{1/(p(\sigma-1))} ||v||_{p^*},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, daí usando interpolação podemos concluir que

$$||v||_i \leq \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S||h||_q\right)^{1/(p(\sigma-1))} ||v||_{p^*},$$

para todo $i \geq p^*$. Além disso, temos que

$$||v||_\infty = \lim_{i\to\infty} ||v||_i,$$

então mostramos que a Proposição 2.17 é válida para

$$M = \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S||h||_q\right)^{1/(p(\sigma-1))}$$

com

$$\sigma = \frac{N(q-1)}{q(N-p)},$$

independente da solução v, como desejado. ∎

Lema 2.18. *Seja $R > 1$, toda solução de energia finita u de* (AP2) *tal que $J(u) = m_J$ satisfaz*

$$||u||_\infty \leq \left(S\frac{pkd}{p-1}\right)^{1/p}.$$

Prova: Considere as funções

$$H(x,t) := g(x,t) \quad \text{e} \quad b(x) := V(x),$$

onde a função g é a função considerada em (3.2). Observemos que se u é uma solução positiva para o problema auxiliar (AP2), então u satisfaz a seguinte igualdade

$$-\Delta_p u - \Delta u + b(x)u = H(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

Das hipóteses (f_1) e (f_2), concluímos $|H(x,t)| \leq |f(t)| \leq c_0|t|^{\gamma-1}$, e portanto,

$$|H(x,u)| \leq h(x)|u|^{p-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

onde a função h é descrita por

$$|h(x)| = c_0|u(x)|^{\gamma-p}.$$

Notemos que como $\gamma < p^*$ segue que $1/(\gamma-p) \geq (N-p)/p^2$ dai, $p^*/(\gamma-p) \geq N/p$. Por cálculos diretos temos que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q = \dfrac{p^*}{\gamma-p} > N/p$ com

$$||h||_q \leq c_0\,(S2kd)^{(\gamma-p)/p}.$$

O resultado segue da Proposição 2.17. ∎

Lema 2.19. *Se $v \in E$ é um ponto crítico do funcional J, então $v > 0$.*

Prova: Como $v \in E$ é um ponto crítico para J temos

$$\begin{aligned}0 = \langle J'(v), v^-\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v^- + \nabla v\nabla v^- + V(x)|v|^{p-2}vv^-)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)v^-\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^p \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo, $||v^-||_{D_r^{1,p}} = 0$ e consequentemente, $v \geq 0$. Pelo lema anterior sabemos que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando os argumentos de regularidade desenvolvidos em [49] temos que $v \in H^2_{loc}(B) \cap H^1_{loc}(B)$ mais ainda, $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(B)$ e o resultado segue da Versão fraca do Princípio do Máximo. ∎

Para obter a estimativa de decaimento para R suficientemente grande de soluções do tipo "Passo da Montanha"do problema auxiliar (AP2), vamos usar uma versão generalizada do lema radial para o espaço $D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)$(cf.[12]):

Lema 2.20. ***(Lema Radial)*** *Seja $N \geq 3$. Toda função radial $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a uma função $U(x)$, contínua, para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{(2-N)/2} ||u||_{D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \geq 1, \tag{3.29}$$

onde C_N depende apenas da dimensão N.

Lema 2.21. *Para qualquer $R_0 \geq R$, seja u uma solução positiva de energia limitada para o problema* (AP2) *onde o potencial V é uma função que satisfaz a condição* (V_1)*. Então u satisfaz*

$$u(x) \leq C_N |x|^{(2-N)/2} \left(2kd\right)^{1/2}, \quad q.t.p \quad x \in \mathbb{R}^N, \, |x| \geq 1.$$

Prova: Segue do Lema radial 2.20 que

$$|u(x)| \leq C_N |x|^{(2-N)/2} ||u||_{D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N, \, |x| \geq 1. \tag{3.30}$$

Além disso, sabemos que para $R > 1$, qualquer ponto crítico positivo u associado ao funcional J no nível crítico minimax m_J satisfaz a seguinte estimativa

$$||u||_{E_1} \leq \left(2kd\right)^{1/2}.$$

Assim,

$$|u(x)| \leq C_N |x|^{(2-N)/2} \left(2kd\right)^{1/2}, \quad \text{q.t.p} \quad x \in \mathbb{R}^N, \, |x| \geq 1.$$

■

2.6 Prova do Teorema 2.1

Prova: Pelos Lemas 2.10 e 2.12, o problema (AP2) tem pelo menos uma solução positiva de energia limitada $u \in D_r^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, é suficiente mostrar que u satisfaz a desigualdade

$$f(u) \leq \frac{V(x)}{k} u \quad \text{em } q.t.p \quad x \in \mathbb{R}^N, \, |x| \geq R.$$

Segue da Observação 2.4 que existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|sf(s)| \leq c_o|s|^{p^*} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Em virtude do Lema 2.21 temos que

$$\frac{f(u)}{u} \;\leq\; c_0|u|^{\frac{N(p-2)+2p}{N-p}} \;\leq\; c_0\left(\frac{(2kd)^{1/2}}{R^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{N(p-2)+2p}{N-p}} \frac{R^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}}{|x|^{\frac{N-2}{2}\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}} \quad \text{q.t.p} \quad x \in {B^c}_R(0).$$

Considere $\mu_R^* = kc_0\left(\frac{(2kd)^{1/2}}{R^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{N(p-2)+2p}{N-p}}$. Notemos que $R > 1$ implica que $\mu_R^* < \mu_1^*$. Considerando $\mu \geq \mu_1^*$. O resultado segue da hipótese (V_1). ■

Capítulo 3

Ondas solitárias para uma classe de equações de Schrödinger quase lineares envolvendo potenciais que podem se anular no infinito

O principal objetivo deste capítulo é mostrar a existência de soluções fracas positivas para a seguinte classe de equações de Schrödinger quase lineares da forma

$$-\Delta u + V(x)u - [\Delta(u^2)]u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde $N \geq 3$, h satisfaz algumas suposições para garantir a geometria do "passo da montanha"e V é uma função contínua não negativa. Aplicamos o método do truncamento, e obtemos uma classe de equações onde em princípio o funcional associado $\widehat{I}(u)$ não está bem definido. Sendo assim, do ponto de vista variacional, a primeira dificuldade que tivemos de lidar foi encontrar um espaço ambiente adequado com o objetivo de aplicar métodos variacionais do tipo minimax a fim de estudar a existência de soluções não triviais de (AP). Seguimos as ideias desenvolvidas por Liu, Wang e Wang em [38] fazemos uma mudança de variáveis, $v = f^{-1}(u)$ (cf. 3.2) e passamos a estudar o problema (MP) o qual está bem definido no espaço Orlicz-Sobolev (cf. [1])

$$E = \left\{ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)\, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Mais precisamente, assumiremos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa satisfazendo

(V_1) Existem $\mu > 0$ e $R > 1$ tais que

$$\frac{1}{R^{N+2}} \inf_{|x|\geq R} |x|^{N+2} V(x) \geq \mu.$$

Seja $2^* = 2N/(N-2)$ o expoente crítico de Sobolev. Foi provado num trabalho recente de J. Liu et al. [38] que $2(2^*) = 4N/(N-2)$ comporta-se como o expoente crítico para as equações de Schrödinger modificadas da forma $\Delta u + V(x)u - u\Delta(u^2) = |u|^{p-2}u$ em $\mathbb{R}^N$ no sentido de que esta equação não tem solução positiva em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2\, dx < \infty$ desde que $x \cdot \nabla V(x) \geq 0$ e $p \geq 2(2^*)$. Em virtude deste resultado, é natural assumir que $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função contínua que satisfaz as seguintes condições:

(h_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{sh(s)}{s^{4N/(N-2)}} = 0.$

(h_2) Existe $p \in (4, 4N/(N-2))$ tal que

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{sh(s)}{s^{p-1}} < \infty.$$

(h_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta H(s) := 2\theta \int_0^s h(t)dt \leq sh(s), \quad \forall\, s > 0.$$

O principal resultado deste capítulo é estabelecido a seguir:

Teorema 3.1. *Suponhamos que* (V_1) *e* $(h_1) - (h_3)$ *são satisfeitas. Então, existe* $\mu^* > 0$ *tal que o problema* (P) *tem, pelo menos, uma solução positiva para todo* $\mu \geq \mu^*$.

Observação 3.2. *Apresentaremos a seguir um exemplo de função que satisfaz nossas hipóteses. De forma análoga, aos capítulos anteriores consideremos como exemplo uma função* $h(s)$ *com crescimento "crítico"na origem e "subcrítico"para valores* $s \geq 1$. *Mais precisamente, para* $\alpha > 2(2^*)$ *e* p *dado em* (h_2), *a função*

$$h(s) = \begin{cases} s^{\alpha-1}, & se \quad 0 \leq s \leq 1 \\ s^{p-2}, & se \quad s \geq 1 \end{cases}$$

é um exemplo de não linearidade satisfazendo as hipóteses $(h_1)-(h_3)$. *Vimos nos capítulos anteriores que se* $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que*

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > 0,$$

então a hipótese (V_1) *é satisfeita. Em particular, isto ocorre quando* V *é coercivo. Acrescentamos neste capítulo outro exemplo, consideramos* $V(x) = \mu\eta(x)\min\{1,(R/|x|)^{N+2}\}$ *para alguns* $\mu > 0$, $R > 1$ *e* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$ *tal que* $\eta \equiv 1$ *em* $\mathbb{R}^N \backslash B(0,R)$.

Observação 3.3. *1. Concluímos das hipóteses* (h_1) *e* (h_2) *que existe uma constante real* $c_0 > 0$ *tal que*

$$|sh(s)| \leq c_0|s|^{2(2^*)} \quad e \quad |sh(s)| \leq c_0|s|^{p-1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. A condição (V_1) *garante que* $\mathcal{Z} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\right\} \subset B_R(0)$. *Portanto,* $\mathcal{Z}$ *é um subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^N$.

Usamos métodos variacionais, a fim de provar a existência de solução de (P) e dividimos nosso argumento em várias etapas.

Passo 1: Método de Penalização: O funcional modificado.

Passo 2: Mudança de Variável.

Passo 3: Geometria do passo da Montanha.

Passo 4: Condições de compacidade de Palais-Smale.

Passo 5: Existência de ponto crítico via Teorema do Passo da Montanha.

Passo 6: Estimativa $L^\infty-$.

3.1 Método de Penalização

Uma vez que nosso objetivo é provar a existência de soluções positivas para (P), definimos $h(t) = 0$ para todo $t \leq 0$. Observamos que pela hipótese (h_1) a função h é contínua em $\mathbb{R}$. Considerando $H(s) = \displaystyle\int_0^s h(t)\,\mathrm{d}t$, notemos que formalmente (P) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional de energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(1+2|u|^2\right) \mid \nabla u \mid^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \mid u \mid^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(u)\,\mathrm{d}x,$$

mas o funcional I não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ devido ao termo $|u|^2|\nabla u|^2$. Mais ainda, temos as seguintes dificuldades: perda de compacidade, pois nossa equação (P) está definida em $\mathbb{R}^N$ e o fato do nosso potencial $V(x)$ poder se anular numa vizinhança próxima da origem ou no infinito. Assim, faremos algumas modificações apropriadas para obter uma nova classe de problemas aos quais poderemos aplicar o argumento do passo da montanha. Para isso, vamos primeiro considerar uma reformulação do problema depois de uma discussão introduzida por del Pino e Felmer [25]. A partir de agora, consideramos $\Lambda = B_R(0)$ com a constante real $R > 1$ dada pela condição (V_1). Denotamos por χ_Λ a função característica do conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$. Para $k > 2\theta/(\theta - 2) > 2$ consideremos a seguinte função de Carathéodory não negativa $\widehat{h} : \left(\mathbb{R}^N \setminus \Lambda\right) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{h}(x,t) := \min\{h(t), (V(x)/k)|t|\},$$

e $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x,t) := \chi_\Lambda(x)h(t) + (1 - \chi_\Lambda(x))\,\widehat{h}(x,t).$$

Em seguida, considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - [\Delta(u^2)]u = g(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \quad \in \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AP}$$

Definindo $\widehat{H}(x,s) = \displaystyle\int_0^s \widehat{h}(x,t)\,\mathrm{d}t$ e $G(x,t) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)\,\mathrm{d}t$, obtemos

$$G(x,t) = \chi_\Lambda(x)H(t) + (1 - \chi_\Lambda(x))\,\widehat{H}(x,t).$$

Notemos que formalmente (AP) é a equação de a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$\widehat{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + 2|u|^2\right) \mid \nabla u \mid^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \mid u \mid^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

Como o funcional $\widehat{I}$ não está bem definido no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ temos que realizar uma mudança de variáveis adequada para obter uma nova classe de problemas livres do termo $|u|^2|\nabla u|^2$ e os funcionais associados estão bem definidos numa nova classe de espaços de funções a ser definida na próxima secção.

Observação 3.4. *Propriedades básicas da função auxiliar g são listadas abaixo:*

1. $0 \leq g(x,t) \leq h(t)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

2. $g(x,t) = h(t)$ *e* $G(x,t) = H(t)$ *para todo* $x \in \Lambda$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

3. $0 \leq g(x,t) \leq (V(x)/k)|t|$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

4. $0 \leq G(x,t) \leq (V(x)/2k)t^2$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

3.2 Mudança de Variável

Os nossos argumentos baseiam-se nos métodos variacionais, no entanto, deve ser salientado que não podemos aplicar diretamente tais métodos, já que, o funcional natural associado $\widehat{I}$ não está bem definido nos espaços de Sobolev usuais. Para superar esta dificuldade, seguimos a ideia desenvolvida por Liu, Wang e Wang em [38], isto é, fizemos a mudança de variáveis $v = f^{-1}(u)$, onde f é definida por

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= \frac{1}{(1+2f^2(t))^{1/2}} \qquad \text{em} \quad [0,\infty), \\ f(t) &= -f(-t) \qquad\qquad\quad\; \text{em} \quad (-\infty,0]. \end{aligned}$$

Assim, após a mudança de variáveis, a partir de $\widehat{I}(u)$ obtemos o seguinte funcional

$$J(v) := \widehat{I}(f(v)) \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)\right)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,f(v))\, \mathrm{d}x,$$

o qual está bem definido no espaço Orlicz-Sobolev (cf. [1])

$$E = \left\{ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)\, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Mais ainda, E é um espaço de Banach (cf. Proposição 3.7) quando munido da norma (cf. Proposição 3.6)

$$\| v \|_E = \| \nabla v \|_2 + \inf_{\varepsilon>0} \frac{1}{\varepsilon}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varepsilon v)\, \mathrm{d}x\right]. \tag{4.1}$$

Além disso, os pontos críticos não triviais de J correspondem precisamente com as soluções fracas positivas das equações

$$-\Delta v = f'(v)\,[g(x,f(v)) - V(x)f(v)] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{MP}$$

Como em [30, Proposicão 2.4] vemos que se v é uma solução fraca para (MP) então $u = f(v)$ é uma solução fraca para (AP). Nosso objetivo aqui é provar a existência de um ponto crítico v de J satisfazendo $g(x,f(v)) = h(v)$.

Proposição 3.5. *Propriedades básicas da mudança de variáveis $f(t)$ são listadas abaixo:*

(1) f *é* C^∞*, invertível e unicamente definida.*

(2) $|f'(t)| \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(3) $|f(t)| \leq |t|$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(4) $f(t)/t \to 1$ *quando* $t \to 0$.

(5) $f(t)/\sqrt{t} \to 2^{1/4}$ *quando* $t \to +\infty$.

(6) $f(t)/2 \leq tf'(t) \leq f(t)$ *para todo* $t \geq 0$.

(7) $|f(t)| \leq 2^{1/4}|t|^{1/2}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(8) a função $f^2(t)$ *é estritamente convexa.*

(9) existe uma constante positiva C *tal que*

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/2}, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

(10) existem constantes positivas C_1 *e* C_2 *satisfazendo*

$$|t| \leq C_1|f(t)| + C_2|f(t)|^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

(11) $|f(t)f'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(12) $f^2(\lambda s) \leq \lambda^2 f^2(s)$, *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \geq 1$.

(13) A função $f(t)f'(t)t^{-1}$ *é decrescente para* $t > 0$.

(14) A função $f^3(t)f'(t)t^{-1}$ *é crescente para* $t > 0$.

Prova: A prova dos itens (1)–(11) e (13)–(14) pode ser vista [27, Proposition 2.2, Corollary 2.3] (veja também [19, 38]). No caso do item (12), uma prova pode ser encontrada em [30, Lemma 2.1]. ∎

3.2.1 Propriedades do espaço de Orlicz-Sobolev E

Nesta seção, recordamos alguns fatos já demonstrados em artigos sobre o espaço de Orlicz-Sobolev E, ver por exemplo Liu, Wang & Wang [38], do ó & Severo [27], que são cruciais para o nosso argumento cuja finalidade é provar a existência de pontos críticos para o funcional J. Os próximos resultados são essenciais para a estrutura do nosso trabalho.

Proposição 3.6. *(1) E dotado da função definida em (2.1) é um espaço normado;*

(2) Existe uma constante positiva C tal que para todos $v \in E$,

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)\,\mathrm{d}x}{1 + \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2}} \leq C||v||_E; \tag{4.2}$$

(3) Se $v_n \to v$ em E, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f^2(v_n) - f^2(v)|\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n) - f(v)|^2\,\mathrm{d}x \to 0;$$

(4) Se $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p $x \in R^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)\,\mathrm{d}x,$$

então

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v))\,\mathrm{d}x\right] \to 0.$$

Prova: Os itens (1)-(3) podem ser provados usando os mesmos argumentos que em [27, Proposition 3.2].

Precisamos provar o item (4). Em primeiro lugar, observa-se que é suficiente para provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{4.3}$$

De fato, se ocorrer essa convergência, para todo $\lambda > 1$ dado decorre da Proposição 3.5, Item (12), que

$$\lambda^{-1}\left\{1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2\left(\xi(v_n - v)\right)\,\mathrm{d}x\right\} \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2\left(v_n - v\right)\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\lambda}$$

para $n \geq n_0(\lambda)$ suficientemente grande. Então

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v))\,\mathrm{d}x\right] \leq \frac{2}{\lambda} \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Isto implica que,

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v))\,\mathrm{d}x\right] \to 0.$$

Agora, provaremos (4.3). Do mesmo modo que em [38, Proposition 2.1], temos que $V(x)f^2(v_n)$ é assintoticamente equi-contínuo na integração, isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $U \subset \mathbb{R}^N$, $|U| \leq \delta$ e $n \geq n_0$, então

$$\int_U V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Considere $r > 0$ e $A = B[0,r] \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon/2$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x < \varepsilon \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Usando a convexidade da função f^2 e o Item (12) da Proposição 3.5, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} \left[V(x)f^2(2v_n) + V(x)f^2(2v)\right]\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{4}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} \left[V(x)f^2(v_n) + V(x)f^2(v)\right]\,\mathrm{d}x \leq 4\varepsilon \quad \text{para } n\end{aligned}$$

suficientemente grande. Por outro lado, pela equi-continuidade da integral, existe uma constante $\delta > 0$ tal que se $U \subset \mathbb{R}^N$ com $|U| \leq \delta$ então

$$\int_U V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Para o conjunto $\mathcal{Z} = V^{-1}(0)$, definido na Observação 3.3, existe um número real $\alpha > 0$ suficientemente pequeno

$$\mathcal{Z}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, \mathcal{Z}) < \alpha\} \subset B(0,R) \quad \text{e} \quad |\mathcal{Z}_\alpha - \mathcal{Z}| < \delta/2.$$

Como $V(x) > 0$ no conjunto compacto $A \setminus \mathcal{Z}_\alpha = A \cap \mathcal{Z}_\alpha^c$, temos $\zeta = \min_{A\setminus\mathcal{Z}_\alpha} V(x) > 0$. Considere os conjuntos $A_{n,1} = \{x \in A : |v_n(x) - v(x)| > a\}$ e $A_{n,2} = \{x \in A : |v_n(x) - v(x)| \leq a\}$, com $a > 0$ a ser escolhido apropriadamente. Notemos que

$$\int_{A_{n,1}} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{Z}_\alpha \cap A_{n,1}} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{Z}_\alpha^c \cap A_{n,1}} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x$$

e, pelo fato de f^2 ser uma função par e crescente para $t \geq 0$, obtemos

$$C \geq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathcal{Z}_\alpha^c \cap A_{n,1}} V(x)f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \zeta f^2(a)|\mathcal{Z}_\alpha^c \cap A_{n,1}|.$$

Usando que $f^2(t) \geq c|t|$ para todo $|t| > 1$, podemos escolher $a > 0$ tal que $C\left(\zeta f^2(a)\right)^{-1} < \delta/2$. Deste modo,

$$|\mathcal{Z}^c \cap A_{n,1}| = |\mathcal{Z}^c_\alpha \cap A_{n,1}| + |\left(\mathcal{Z}_\alpha \backslash \mathcal{Z}\right) \cap A_{n,1}| < \delta.$$

Portanto, concluímos que

$$\int_{A_{n,1}} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{Z}^c \cap A_{n,1}} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Por outro lado, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{A_{n,2}} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x &= \int_A V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{A_{n,1}} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x + \int_{A_{n,2}} V(x) f^2(v_n - v)\,\mathrm{d}x + 4\varepsilon \leq 6\varepsilon\end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Este resultado implica (4.3) e, desta forma, completamos a prova desta proposição. ■

Proposição 3.7. *E é um espaço de Banach.*

Prova: Notemos primeiramente que a aplicação: $v \mapsto f(v)$ de E em $L^{2(2^*)}(\mathbb{R}^N)$ é contínua. De fato, como $|f(t)| \leq c\sqrt{|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $|\nabla(f^2(v))| = 2|f(v)f'(v)||\nabla v| \leq c|\nabla v|$ para todo $v \in E$, obtemos $f^2(v) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Então, pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$||f(v)||_{2(2^*)} = ||f^2(v)||_{2^*}^{1/2} \leq C||\nabla(f^2(v))||_2^{1/2} \leq C||\nabla v||_2^{1/2} \leq C||v||_E^{1/2} \text{ para todo } v \in E. \tag{4.4}$$

Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em E. Usando o mergulho contínuo

$$E \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \tag{4.5}$$

e a completude de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \to v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \to v$ q.t.p $x \in \mathbb{R}^N$. Pela desigualdade (4.2) da Proposição 3.6 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)\,\mathrm{d}x \leq C$$

a qual juntamente com Lema de Fatou implicam

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x \leq C,$$

e consequentemente $v \in E$. Pela desigualdade (4.2), dado $\varepsilon \geq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n - v_m)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n, m \geq n_0.$$

Fixando $m > n_0$ e aplicando o Lema de Fatou temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_m - v)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_m - v_n)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon,$$

a qual implica que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_m - v)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por conseguinte, de forma análoga ao estabelecido na prova do Item (4) na Proposição 3.6, obtemos

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\xi(v_n - v))\,\mathrm{d}z\right] \to 0,$$

e consequentemente $v_n \to v$ em E, e portanto E é um espaço de Banach. ■

3.3 Estrutura do tipo Passo da Montanha para o funcional J

Resultados de Regularidade

Proposição 3.8. *O funcional Euler-Lagrange J associado a* (MP) *satisfaz as seguintes condições:*

1. *J está bem definido e é um funcional contínuo em E.*

2. *J é Gateaux-diferenciável em E e sua derivada é dada por*

$$J'(v)(w) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla v \nabla w + V(x)f(v)f'(v)w\Big)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)w\,\mathrm{d}x$$

para todo $v, w \in E$.

3. *Para $v \in E$, $J'(v) \in E'$ e se $v_n \to v$ em E então $J'(v_n) \to J'(v)$ na topologia fraca-$*$ de E', isto é, para cada $w \in E$ temos*

$$\langle J'(v_n), w\rangle \to \langle J'(v), w\rangle.$$

Prova: A prova desta Proposição é essencialmente a mesma feita em [27, Proposition 2.5]. ■

Geometria Passo da Montanha

É padrão para provar que J satisfaz as condições geométricas do tipo passo da montanha. Incluímos a prova aqui para referência. Para o próximo resultado que consideramos o funcional $Q : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$Q(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)\right) \mathrm{d}x$$

e o conjunto

$$S(\rho) := \{v \in E : \; Q(v) = \rho^2\}.$$

Lema 3.9. *O funcional J tem a geometria do Passo da Montanha, ou seja, J satisfaz:*

1. *Existem ρ, $\alpha > 0$, tais que $J(v) \geq \alpha$ se $v \in S(\rho)$.*

2. *Existe $\varphi \in E$ tal que $J(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.*

Prova: Uma vez que $G(x,t) \leq H(t)$ para tdo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$, para $v \in S(\rho)$ temos

$$J(v) = \frac{1}{2}Q(v) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v))\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v))\, \mathrm{d}x.$$

Pela Observação 3.3 e Item (7) da Proposição 3.5 temos que

$$H(f(t)) \leq \tilde{c_0} |f(t)|^{2(2^*)} \leq C|t|^{2^*} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Então, usando a desigualdade de Sobolev, obtemos

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - C\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \geq \frac{1}{2}\rho^2 - CQ(v)^{2^*/2} = \rho^2 \left(\frac{1}{2} - C\rho^{2^*-2}\right).$$

Escolhendo $\rho > 0$ tal que $(1/2) - C\rho^{2^*-2} > 0$, concluímos a primeira parte da prova. Agora, provaremos o Item 2. Segue da hipótese (h_3), a famosa condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que existem constantes reais positivas C_1, C_2 tais que

$$H(s) \geq C_1 s^{2\theta} - C_2 \quad \text{para todo} \quad s \geq 0. \tag{4.6}$$

Escolhendo uma função não nula $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $supp(\varphi) \subset \Lambda$, temos que (4.6) implica

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \int_\Lambda \left(|\nabla \varphi|^2 + V(x) \,|\, \varphi \,|^2\right) \mathrm{d}x - C_1 \int_\Lambda |f(t\varphi)|^{2\theta}\, \mathrm{d}x + C_2|\Lambda|,$$

onde $|\Lambda|$ denota a medida de Lebesgue de Λ. Usando a propriedade (6) da Proposição 3.5, segue que $f(s)/s$ é decrescente para $s > 0$. Desde que $0 \leq t\varphi(x) \leq t$ para $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$, obtemos $f(t\varphi(x)) \geq f(t)\varphi(x)$, e então

$$J(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\left[\int_\Lambda \left(\mid \nabla\varphi \mid^2 + V(x) \mid \varphi \mid^2\right) \mathrm{d}x - C_1 \frac{f(t)^{2\theta}}{t^2} \int_\Lambda \varphi^{2\theta} \, \mathrm{d}x + \frac{C_2}{t^2}|\Lambda|\right].$$

Uma vez que $\theta > 2$ e $f(t) \geq C\sqrt{t}$ para alguma constante real positiva e todo $t > 1$, concluímos

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)^{2\theta}}{t^2} \geq \; C \lim_{t\to+\infty} t^{\theta-2} = +\infty.$$

Assim, obtemos $\lim\limits_{t\to\infty} J(t\varphi) = -\infty$, como desejado. ∎

3.4 Condição de Palais-Smale para o funcional J

Lema 3.10. *Suponhamos que $(h_1) - (h_3)$ valem. Então qualquer sequência Palais-Smale para J é limitada em E.*

Prova: Seja $(v_n) \subset E$ uma sequência (P.–S.) para J, assim dado $\delta > 0$ para n suficientemente grande temos

$$J(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(v_n), v_n\rangle \leq \delta \parallel v_n \parallel_E + c. \tag{4.7}$$

Usando o Item (6) da Proposição 3.5 obtemos $0 \leq f(t)f'(t)t \leq f^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue da Observação 3.4 que

$$\begin{aligned} J(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(v_n), v_n\rangle \geq & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big) \, \mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{2\theta} \int_\Lambda [2\theta H(f(v_n)) - 2h(f(v_n))f'(v_n)v_n] \, \mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Como $k \geq 2\theta/(\theta - 2)$, usando a hipótese (h_3) vemos que

$$J(v_n) - \frac{1}{\theta}\langle J'(v_n), v_n\rangle \geq \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big) \, \mathrm{d}x. \tag{4.8}$$

Usando a desigualdade elementar $s^{1/2} < 1 + s^2$ para $s \geq 0$, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \parallel v_n \parallel_E & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} + 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, \mathrm{d}x \\ & \leq 2 + \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que $C(\theta, \delta) := 1/(2k) - \delta > 0$ e usando (4.7)-(4.9), concluímos que

$$2\delta + c \geq C(\theta, \delta) \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big)\, \mathrm{d}x,$$

a qual implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\Big)\, \mathrm{d}x \leq C = C(\theta, c).$$

Da estimativa (4.9) obtemos que (v_n) é limitada em E. ∎

Lema 3.11. *Suponha que $(h_1) - (h_3)$ valem. Então J satisfaz a condição de Palais-Smale, isto é, se $(v_n) \subset E$ é uma sequência Palais-Smale arbitrária para J então existe uma subsequência de (v_n) que converge em E.*

Prova: Seja $(v_n) \subset E$ uma sequência (P.–S.) para J. Devido ao Lemma 3.10 sabemos que (v_n) é limitada em E, e portanto em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Desta forma podemos assumir que existe $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad \text{e} \quad v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Daí, pela desigualdade (4.2) e pelo Lema de Fatou podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v)\, \mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)\, \mathrm{d}x \leq C,$$

a qual implica que $v \in E$. Agora, como f^2 é convexa vemos que o funcional $Q(u)$ é convexo e então, por [36, Lemma 15.3], temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Q(v) - \frac{1}{2}Q(v_n) &\geq \frac{1}{2}\langle Q'(v_n), v - v_n\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n (\nabla v - \nabla v_n)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n)(v - v_n)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)\big)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\big)\, \mathrm{d}x \\ \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n)(v - v_n)\, \mathrm{d}x + \langle J'(v_n), v - v_n\rangle. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Necessitamos estimar a sequência de integrais $\int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n)(v - v_n)\, \mathrm{d}x$. Em princípio, observamos que $g(x, f(v_n)) f'(v_n)$ é limitada em $L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)$. De fato, usando a Observação 3.3 e 3.4 e a Proposição 3.5 vemos que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq g(x, f(t)) f'(t) \leq h(f(t)) f'(t) \leq c_0 |f(t)|^{2(2^*)-1} f'(t) \leq c|f(t)|^{2(2^*-1)} \leq C|t|^{2^*-1}.$$

Como $(2^*-1)2N/(N+2)=2^*$, usando a desigualdade de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x,f(v_n))f'(v_n)|^{2N/(N+2)}\,\mathrm{d}x \le C\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x \le C||\nabla v_n||_2^{2^*} \le C||v_n||_E^{2^*} \le C'.$$

Para cada $\varepsilon>0$, seja $r>R$ tal que

$$\max\left\{[2k/(k-1)]\omega_N^{1/N}C,\, C'\right\}\left(\int_{|x|\ge r} |\ v(x)\ |^{2^*}\ \mathrm{d}x\right)^{1/2^*} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.11}$$

onde C é uma constante positiva tal que $C \ge \|\ v_n\ \|_E$ para todo n e ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Para este r temos

$$\int_{|x|\ge 2r} |g(x,f(v_n))f'(v_n)v|dx \le ||g(x,f(v_n))f'(v_n)||_{L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N)}||v||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N\setminus B_r)} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seja $\eta=\eta_r\ \in\ C_0^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$ uma função que verifica $\mathrm{supp}(\eta)\subseteq B_r^c(0)$, $\eta\equiv 1$ in $B_{2r}^c(0)$ e $|\ \nabla\eta(x)\ |\le 1/r$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$. Como (v_n) é limitado em E, a sequência (ηv_n) é também limitada em E e então $\langle J'(v_n),(\eta v_n)\rangle = o_n(1)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla v_n\nabla(\eta v_n)+V(x)f(v_n)f'(v_n)(\eta v_n)]\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}(\eta v_n)g(x,f(v_n))f'(v_n)\,\mathrm{d}x + o_n(1).$$

Uma vez que $\eta\equiv 0$ em $B_r(0)$ e $\Lambda = B_R(0)\subset B_r(0)$, a última desigualdade combinada com a propriedade dada no item (3) da Observação 3.4 obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\ge r}\eta\left[|\ \nabla v_n\ |^2 + V(x)f(v_n)f'(v_n)v_n\right]\mathrm{d}x\\ &\qquad\le \frac{1}{k}\int_{|x|\ge r}\eta V(x)f(v_n)f'(v_n)v_n\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\ge r} v_n\nabla v_n\nabla\eta\,\mathrm{d}x + o_n(1)\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{|x|\ge r}\eta\Big[\ |\ \nabla v_n\ |^2 + V(x)f(v_n)f'(v_n)v_n\Big]\,\mathrm{d}x\\ &\qquad\le\ \frac{1}{r}\int_{r\le|x|\le 2r} |\ v_n\ ||\ \nabla v_n\ |\ \mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Notemos que $H^1(B_{2r}(0)) = D^{1,2}(B_{2r}(0))$, portanto $v_n\in L^2(B_{2r}(0))$ e pela desigualdade de Hölder concluímos

$$\int_{r\le|x|\le 2r} |\ v_n\ ||\ \nabla v_n\ |\ \mathrm{d}x \le\ \|\ \nabla v_n\ \|_2\left(\int_{r\le|x|\le 2r} |\ v_n\ |^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(B_{2r}\backslash B_r)$ devido ao Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov temos $v_n\to v$ em $L^s(B_{2r}\setminus B_r)$, passando a uma subsequência, se necessário, para todo $1\le s<2^*$. Usando que $||\nabla v_n||_2\le C$, concluímos

$$\limsup_n \int_{r\le|x|\le 2r} |\ v_n\ ||\ \nabla v_n\ |\ \mathrm{d}x \le C\left(\int_{r\le|x|\le 2r} |\ v\ |^2\ \mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder

$$\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} \mid v \mid^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} \mid v \mid^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*} \mid B_{2r}\setminus B_r \mid^{1/N}. \tag{4.14}$$

Lembrando que $\mid B_{2r}\setminus B_r \mid \leq \mid B_{2r} \mid = \omega_N 2^N r^N$, das estimativas (4.13) e (4.14) obtemos

$$\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} \mid v_n \mid\mid \nabla v_n \mid \,\mathrm{d}x \leq 2Cr\omega_N^{1/N}\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} \mid v \mid^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*}. \tag{4.15}$$

De (4.11), (4.12) and (4.15), segue que

$$\limsup_n \int_{|x|\geq r} \eta\left(\mid \nabla v_n \mid^2 + V(x)f(v_n)f'(v_n)v_n\right) \,\mathrm{d}x \,<\, \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $g(x,t)\leq (V(x)|t|)/k$ em $\mathbb{R}^N\backslash B_r$, $\eta\equiv 1$ em $\mathbb{R}^N\backslash B_{2r}$ e $k>1$ obtemos

$$0\leq \limsup_n \int_{|x|\geq 2r} g(x,f(v_n))f'(v_n)v_n \,\mathrm{d}x \,<\, \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.16}$$

Agora, usando $(h_1)-(h_2)$, o mergulho compacto $H^1(B_{2r})\hookrightarrow L^{\frac{p-2}{2}\frac{2N}{N+2}}(B_{2r})$ e o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$g(x,f(v_n))f'(v_n)\to g(x,f(v))f'(v) \quad \text{em} \quad L^{2N/(N+2)}(B_{2r}).$$

Pela desigualdade de Hölder e $||v-v_n||_{2^*}\leq C_1$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leq 2r}\left[g(x,f(v_n))f'(v_n)-g(x,f(v))f'(v)\right](v-v_n)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.17}$$

Finalmente, (4.16) and (4.17) resultam em

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[g(x,f(v_n))f'(v_n)-g(x,f(v))f'(v)\right](v-v_n)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.18}$$

Desta forma, passando o limite em (4.10),

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x + \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x.$$

Por outro lado, pela semicontinuidade fraca inferior da norma e pelo Lema de Fatou temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x.$$

Portanto, devemos ter

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$$
$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x.$$

Usando o Item (4) da Proposição 3.6, a menos de subsequência, obtemos

$$\inf_{\xi>0} \frac{1}{\xi}\left[1+\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v))\,\mathrm{d}x\right] \to 0$$

a qual implica que $v_n \to v$ in E. ■

A seguir, denotaremos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$, e por $I_0 : H_0^1(B) \to \mathbb{R}$ o funcional

$$I_0(v) = \frac{1}{2}\int_B \Big(|\,\nabla v\,|^2 + \max_B (V(x), 1)\, f^2(v)\Big)\,\mathrm{d}x - \int_B H(f(v))\,\mathrm{d}x.$$

Usando argumentos análogos aos da Proposição 3.9 vemos que I_0 tem a geometria do passo da montanha e então, o nível do passo a montanha associado a I_0 está bem definido, isto é,

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(B)\right) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = e\},$$

com $e \in H_0^1(B) \setminus \{0\}$ verificando $I_0(e) < 0$.

Observação 3.12. *Notemos que $J(u) \leq I_0(u)$ para todo $u \in H_0^1(B)$. Em particular, temos que $J(e) \leq I_0(e) < 0$. Denotamos por m_J o nível do passo da montanha associado com J, isto é,*

$$m_J = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], E)\right) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Observemos que $0 < m_J \leq d$.

A fim de provar a existência de um ponto crítico para J usamos a versão mais geral do Teorema do passo da montanha (cf. Proposição 2.14, capítulo 3), que é uma consequência do Princípio Variacional Ekeland desenvolvido em [9] (cf. [22], [36], [48]). Enunciamos, portanto, o seguinte resultado de existência:

Proposição 3.13. *Existe $\phi \in E\backslash\{0\}$ um ponto crítico para J tal que $J(\phi) = m_J$.*

Prova: Este fato segue diretamente da Proposição 2.14, capítulo 3. ■

3.5 Estimativas a priori

Lema 3.14. *Seja $v \in E$ um ponto crítico do funcional J no nível minimax m_J. Então v satisfaz a estimativa*

$$\| v \|_E \;\leq\; 2 + 2kd.$$

Prova: É suficiente combinar (4.8), (4.9) e o fato que $m_J \leq d$. ■

A próxima proposição é crucial para nossos argumentos porque estabelece uma importante estimativa envolvendo a norma $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ da solução v do problema auxiliar (AP). A seguinte proposição é uma versão adaptada ao nosso problema do resultado devido a Brézis e Kato (c.f. [16]).

Proposição 3.15. *Seja $a \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $2q > N$, e $v \in E$ uma solução fraca do problema*

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) = g(x, f(v))f'(v) \quad em \quad \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Suponha que

$$|g(x, f(v))| \;\leq\; a(x)|v|, \quad q.t.p \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Então existe $M = M(N, q, ||a||_q) > 0$ tal que

$$\| v \|_\infty \leq M \| v \|_{2^*} . \tag{4.20}$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$, seja

$$A_m \;=\; \{x \in \mathbb{R}^N : | v(x) |^{\beta-1} \leq m\},$$

and

$$v_m = \begin{cases} v \mid v \mid^{2(\beta-1)} & \text{em} \quad A_m \\ m^2 v & \text{em} \quad B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Pela definição de v_m temos $v_{m|_{\partial B_m}} = v_{m|_{\partial A_m}}$, e, então $v_m \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, como $|v_m| \leq m^2|v|$, para cada $m \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_m)\,\mathrm{d}x \;\leq\; m^4 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v)\,\mathrm{d}x \;<\; \infty$$

a qual implica que $v_m \in E$. Calculando ∇v_m, temos

$$\nabla v_m = \begin{cases} (2\beta - 1) \mid v \mid^{2(\beta-1)} \nabla v & \text{em} \quad A_m \\ m^2 \nabla v & \text{em} \quad B_m. \end{cases}$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m \, \mathrm{d}x = \ (2\beta - 1) \int_{A_m} \mid v \mid^{2(\beta-1)} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x + m^2 \int_{B_m} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.21}$$

Aplicando esta função v_m em (4.19), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + V(x) f(v) f'(v) v_m) \, \mathrm{d}x \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) v_m \, \mathrm{d}x.$$

Além disso, definindo

$$\omega_m = \begin{cases} v \mid v \mid^{\beta-1} & \text{em} \quad A_m \\ mv & \text{em} \quad B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m, \end{cases}$$

segue que $\omega_m \in E$ e

$$\nabla \omega_m = \begin{cases} \beta \mid v \mid^{\beta-1} \nabla v & \text{em} \quad A_m \\ m \nabla v & \text{em} \quad B_m. \end{cases}$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \omega_m \mid^2 \, \mathrm{d}x = \beta^2 \int_{A_m} \mid v \mid^{2(\beta-1)} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x + m^2 \int_{B_m} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

De (4.21) e (4.22) concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \omega_m \mid^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m \, \mathrm{d}x = \int_{A_m} \big(\beta^2 - 2\beta + 1\big) \mid v \mid^{2(\beta-1)} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x.$$

Usando (4.21), obtemos a desigualdade

$$\Big(2\beta - 1\Big) \int_{A_m} \mid v \mid^{2(\beta-1)} \mid \nabla v \mid^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + V(x) f(v) f'(v) v_m) \, \mathrm{d}x,$$

a qual implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \omega_m \mid^2 \, \mathrm{d}x \leq \left[\frac{(\beta^2 - 2\beta + 1)}{(2\beta - 1)} + 1 \right] \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + V(x) f(v) f'(v) v_m) \, \mathrm{d}x.$$

Como (4.19) vale para v, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla \omega_m \mid^2 \, \mathrm{d}x \ \leq \ \frac{\beta^2}{(2\beta - 1)} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) v_m \, \mathrm{d}x \leq \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) v_m \, \mathrm{d}x.$$

Seja S a melhor constante que verifica

$$\| v \|_{2^*}^2 \;\leq\; S \int_{\mathbb{R}^N} | \nabla v |^2 \; \mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Pela definição de v_m obtemos $|v_m| \leq |v|^{2\beta-1}$ in $\mathbb{R}^N$ e então $|g(x, f(v))f'(v)v_m| \leq a(x)|v|^{2\beta}$. Daí, para $q_1 > 1$ tal que $(1/q_1) + (1/q) = 1$, $\sigma = 2^*/(2q_1) > 1$ e $\beta = \sigma$, da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}\left[\int_{A_m} | \omega_m |^{2^*} \; \mathrm{d}x\right]^{(N-2)/N} &\leq S\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \mid v \mid^{2\beta} \; \mathrm{d}x \\ &\leq S\beta^2 \| a \|_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} | v |^{2\beta q_1} \; \mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.\end{aligned}$$

Como $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ in $\mathbb{R}^N$ e $|\omega_m| = |v|^\beta$ em A_m, segue que

$$\left[\int_{A_m} |v|^{\beta 2^*} \mathrm{d}x\right]^{(N-2)/N} \;\leq\; S\beta^2 \| a \|_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} | v |^{2\beta q_1} \; \mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.$$

Fazendo $m \to \infty$, temos pelo Teorema da Convergência Monótona que

$$\| v \|_{\beta 2^*}^{2\beta} \;\leq\; S\beta^2 \| a \|_q \| v \|_{2\beta q_1}^{2\beta},$$

e portanto

$$\| v \|_{\beta 2^*} \;\leq\; \beta^{1/\beta} (S \| a \|_q)^{1/(2\beta)} \| v \|_{2\beta q_1} . \tag{4.23}$$

Em outras palavras, $v \in L^{\sigma 2^*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\| v \|_{2^*\sigma} \;\leq\; \sigma^{1/\sigma} (S \| a \|_q)^{1/(2\sigma)} \| v \|_{2^*} . \tag{4.24}$$

Supondo $\beta = \sigma^2$ em (4.23) obtemos $2q_1\beta = 2^*\sigma$ and

$$\| v \|_{2^*\sigma^2} \;\leq\; \sigma^{2/\sigma^2} (S \| a \|_q)^{1/(2\sigma^2)} \| v \|_{2^*\sigma} . \tag{4.25}$$

As desigualdades (4.24) e (4.25) implicam que

$$\| v \|_{2^*\sigma^2} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}} (S \| a \|_q)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)} \| v \|_{2^*} . \tag{4.26}$$

Pelo argumento de iteração, substituindo β por σ^j em (4.23), concluímos que

$$\| v \|_{2^*\sigma^j} \leq \sigma^{\sum_{l=1}^{j}(1/\sigma^l)} (S \| a \|_q)^{\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{j}(1/\sigma^l)\right)} \| v \|_{2^*} . \tag{4.27}$$

Uma vez que

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l}{\sigma^l} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}$$

segue da estimativa obtida em (4.27) que

$$\| v \|_{2^*\sigma^j} \leq \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S \| a \|_q\right)^{1/(2(\sigma-1))} \| v \|_{2^*},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Lembrando que

$$\| v \|_\infty = \lim_{i\to\infty} \| v \|_i,$$

e $\sigma = 2^*/(2q_1) > 1$, podemos concluir que a Proposição 3.15 é válida com

$$M = \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S \| a \|_q\right)^{1/(2(\sigma-1))}$$

notemos que $M = M(N, q, ||a||_q)$. ■

Lema 3.16. *Se $v \in E$ é um ponto crítico do funcional J, então $v > 0$.*

Prova: Como $v \in E$ é um ponto crítico para J obtemos

$$0 = \langle J'(v), v^-\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v^-|^2 + V(x)f(v^-)f'(v^-)v^-\Big)\, \mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 \mathrm{d}x,$$

a qual implica $||v^-||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = 0$ e então $v \geq 0$. Como $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ o resultado segue do Princípio do Máximo. ■

Lema 3.17. *Existe $\tilde{M} > 0$ tal que*

$$\| v \|_\infty \leq \tilde{M}$$

para qualquer $R > 1$ e qualquer solução v de (MP) tal que $J(v) = m_J$.

Prova: Como $0 \leq g(x,t) \leq h(t) \leq c_0|t|^{p-2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$|g(x, f(v))| \leq c_0|f(v)|^{p-2} \leq 2^{1/4}c_0|v|^{(p-2)/2} \leq a(x)|v|$$

onde

$$a(x) = 2^{1/4}c_0|v(x)|^{(p-4)/2}.$$

Cálculos diretos mostram que $a \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q = 2(2^*)/(p-4) > N/2$. Então, usando a desigualdade de Sobolev e o Lema 3.14 obtemos

$$\| a \|_q \leq 2c_0 \| v \|_{2^*}^{(p-4)/4} \leq 2c_0 \left(S^{1/2}(2 + 2kd)\right)^{(p-4)/4}.$$

Agora, para M dado na Proposição 3.15 concluímos

$$\begin{aligned} M \parallel v \parallel_{2^*} &= \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(S \parallel a \parallel_q\right)^{1/(2(\sigma-1))} \parallel v \parallel_{2^*} \\ &\leq \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \Big(2Sc_0(S^{1/2}(2+2kd))^{(p-4)/4)}\Big)^{1/(2(\sigma-1))} \Big(S^{1/2}(2+2kd)\Big) := \tilde{M} \end{aligned}$$

com $\sigma = 2^*/(2q_1)$. Observemos que $\tilde{M}$ não depende de $R > 1$ ou v e satisfaz as condições desta proposição. Desta forma, o resultado segue da Proposição 3.15. ∎

Lema 3.18. *Seja $v \in E$ uma solução positiva para* (MP) *com $J(v) = m_J$. Então v satisfaz*

$$v(x) \leq \frac{R^{N-2} \parallel v \parallel_\infty}{\mid x \mid^{N-2}} \leq \frac{R^{N-2}\tilde{M}}{\mid x \mid^{N-2}} \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Prova: Considere a função harmônica $\psi : \big(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) \;=\; \frac{R^{N-2} \parallel v \parallel_\infty}{\mid x \mid^{N-2}}.$$

Como $\psi \geq 0$ obtemos

$$-\Delta\psi + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x) f(\psi) f'(\psi) \geq \; 0.$$

Agora, tomando como função teste

$$\phi = \begin{cases} (v-\psi)^+ & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \\ 0 & \text{se} \quad x \in B_R(0). \end{cases}$$

Observemos que $v \leq \psi$ em $\partial B_R(0)$ então podemos concluir que $\phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso

$$J'(v)(\phi) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \frac{1}{k} V(x) f(v) f'(v) \phi \leq 0.$$

Considere $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) : v > \psi\}$. Daí, combinando estas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega (\nabla v - \nabla\psi)\, \nabla\phi + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)(f(v)f'(v) - f(\psi)f'(\psi))\phi \,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)(f(v)f'(v) - f(\psi)f'(\psi))\phi \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando que $f^2(t)$ é estritamente convexa, temos que ff' é uma função decrescente e então a última integral é não negativa. Assim o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) : v > \psi\}$ é vazio. E portanto, a prova está completa. ∎

3.6 Prova do Teorema 3.1

Da Proposição 3.13, o problema (MP) tem uma solução de energia limitada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a qual é uma função positiva. Portanto, pela definição de g, para mostrar que $f(v) = u$ é solução do problema (P), é suficiente provar que $f(v)$ satisfaz a desigualdade

$$h(f(v)) \quad \leq \quad \frac{V(x)}{k} f(v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \backslash B_R(0).$$

Das hipóteses (h_1) e (h_2), existe uma constante real $c_0 > 0$ tal que

$$| \, sh(s) \, | \leq c_0 \, | \, s \, |^{2(2^*)} \quad \text{para tdo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Segue do Lema 3.18 que

$$\frac{h(f(v))}{f(v)} \leq \quad c_0 \, | \, f(v) \, |^{\frac{2N+4}{N-2}} \leq \quad 2c_0 \, | \, v \, |^{\frac{N+2}{N-2}} \leq \quad 2c_0 \tilde{M}^{\frac{N+2}{N-2}} \frac{R^{N+2}}{| \, x \, |^{N+2}} \quad \text{para todo} \quad | \, x \, | \geq R.$$

Agora, sejam $\mu^* = k 2 c_0 \tilde{M}^{\frac{N+2}{N-2}}$ e $\mu \geq \mu^*$. A hipótese (V_1) completa a prova.

Capítulo 4

Ondas estacionárias para um sistema de equações de Schrödinger não lineares com potencial não negativo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções para equações de Schrödinger acopladas não lineares da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)F_u(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)F_v(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, \quad v \quad \in \quad H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{S}$$

onde $N \geq 3$ e $F : ([0,\infty) \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea de classe C^1 com $2 < p < 2^*$, e $2^* = 2N/(N-2)$ o expoente crítico de Sobolev.

Neste capítulo, assumiremos que $V, K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, limitadas e não negativas que satisfazem as seguintes condições:

(V_0)

$$\lambda_1 := \inf_{\{(u,v)\in H, ||(u,v)||_L = 1\}} ||(u,v)||_H^2 > 0,$$

onde

$$H := \left\{ (u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(u^2+v^2\right) \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

é um espaço de Hilbert quando dotado do seguinte produto interno

$$\langle (u,v),(\phi,\varphi)\rangle_H := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \phi + V(x)u\phi + \nabla v \nabla \varphi + V(x)v\varphi)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\ (u,v),(\phi,\varphi) \in H$$

e da norma proveniente deste produto interno

$$||(u,v)||_H^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + |\nabla v|^2 + V(x)v^2)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\,(u,v) \in H$$

e $L = L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ equipado com a norma proveniente do produto interno usual $||(u,v)||_L^2 := ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + ||v||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. (cf. [46])

Para o potencial V e a função K, primeiramente, assumimos que

(V_1) Existem $\lambda > 0$ e $R > 0$, tais que

$$\begin{cases} K(x) \neq 0 \text{ para algum } x \in B_R(0) \text{ e} \\ 0 < \mu \leq K(x) \leq V(x) \leq \lambda, \quad \forall\,|x| \geq R, \end{cases}$$

onde $B_R(0)$ denota uma bola unitária em $\mathbb{R}^N$ com raio R centrada na origem. Impomos também para a função K, uma hipótese similar usada em [4], denominada,

(V_2) Existem $\gamma > \mu$ e $R > 0$, tais que $\sup_{|x|\geq R} K(x)\dfrac{R^{2(N-2)}}{|x|^{2(N-2)}} \leq \gamma$.

A fim de obter o nosso principal resultado, vamos apresentar as hipóteses sobre a não linearidade $F(u,v)$ que assumimos ao longo deste capítulo:

(F_0) $F : ([0,\infty) \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$ é uma função p-homogênea de classe C^1 com $2 < p < 2^*$, e que existe uma constante real $0 < c_0 \leq \mu^{p/2}$ tal que

$$|F_u(u,v)| + |F_v(u,v)| \leq c_0\,(u^{p-1} + v^{p-1}), \quad \forall\, u,\, v \geq 0.$$

(F_1) $F_u(0,1) = F_v(1,0) = 0.$

(F_2) $F_u(1,0) = F_v(0,1) = 0.$

(F_3) $F_{uv}(u,v) > 0, \quad \forall\, u, v > 0.$

Assumimos também neste capítulo que uma solução positiva (u,v) de (S) significa $u > 0$ e $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$. A seguir, estabelecemos o resultado principal deste capítulo, que irá garantir, sob certas condições, a existência de soluções para o sistema (S).

Teorema 4.1. *Suponhamos que $(V_0) - (V_2)$ e $(F_0) - (F_3)$ são satisfeitas. Então, existe $\gamma^* > 0$ tal que (S) possue pelo menos uma solução fraca positiva (u,v) para todo $0 < \gamma \leq \gamma^*$.*

Observação 4.2. (a) *Um típico exemplo de uma função $p-$homogênea $F(u,v)$ satisfazendo nossas hipóteses é dada por*

$F(u,v) = Q(u,v)^{p/l}$ com $p/l \geq 1$ e $Q(u,v)$ uma função l-homogênea satisfazendo

$$Q(u,v) = \sum_{\alpha_i+\beta_i=l} a_i u^{\alpha_i} v^{\beta_i}, \quad u,v \geq 0,$$

onde $i \in \mathcal{I}$ $(\#\mathcal{I} < \infty)$, $\alpha_i \geq 2$, $\beta_i \geq 2$, $4 \leq l \ \leq p < 6$, $N = 3$ e $a_i > 0$.

(b) *A seguir, apresentamos um exemplo de potencial admissível satisfazendo nossas hipóteses $(V_0) - (V_2)$:*

Seja $R > 1$. Considere V, K funções constantes tais que $0 < \mu \leq K(x) \leq V(x) \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ para alguns $\mu > 0$ e $\lambda > 0$.

Este capítulo esta organizado da seguinte maneira. Na Secção 4.1, damos algumas preliminares e introduzimos um sistema auxiliar (AS) apropriado para aplicar o método minimax. Nas Secções 4.2 e 4.3, usando a condição (V_1), provamos a condição de compacidade Palais-Smale para o funcional relacionado com o sistema auxiliar (AS) e com a ajuda do teorema do passo da montanha obtemos a existência de pontos críticos. Na Secção 4.4, estudamos algumas propriedades qualitativas das soluções de (AS), mais precisamente, provamos que as soluções de (AS) pertencem a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e também obtemos a taxa de decaimento a zero no infinito destas soluções. Na Secção 4.5, usando a condição (V_2), mostraremos a existência de pelo menos uma solução positiva para o sistema auxiliar (AS), que é também uma solução para o sistema (S) e, portanto, podemos concluir a prova do Teorema 4.1.

4.1 Estrutura Variacional

4.1.1 O sistema auxiliar

Buscamos soluções para (S) definidas em $\mathbb{R}^N$. Para superar a perda de compacidade, utilizaremos o método introduzido no artigo de del Pino and Felmer [25]. Assim, ambientamos nosso problema no espaço de Sobolev com peso H e introduzimos um sistema auxiliar modificando o sistema gradiente $(F_u(u,v), F_v(u,v))$ para um outro sistema gradiente de classe C^1, para o qual possamos garantir que o funcional associado a este sistema auxiliar satisfaça a condição (P.–S.). Como estamos interessados na existência de soluções positivas de (S), no sentido de que cada coordenada é uma função positiva, redefinimos: $F(t,s) = 0$ se $t \leq 0$ ou $s \leq 0$. Notemos que pelas condições em F ainda temos uma função C^1.

Observação 4.3. *1. Usando a hipótese (F_0), temos*

$$|pF(u,v)| \leq 3c_0 \left(u^p + v^p\right), \quad \forall\, u, v \geq 0. \tag{2.1}$$

Mais ainda, $F_u(u,v)$, $F_v(u,v) \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ para todo $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

2. Pelas condições $(F_1) - (F_2)$, deduzimos que $F_u(u,v) = F_v(u,v) = 0$ se $u = 0$ ou $v = 0$. Além disso, segue da homogeneidade de F que

$$pF(u,v) = uF_u(u,v) + vF_v(u,v), \quad \textit{para todo} \quad u, v \geq 0,$$

e daí, $F(u,0) = F(0,v) = 0$ para todo $u, v \geq 0$.

3. Das hipóteses $(F_2) - (F_3)$, obtemos que $F_u(u,v), F_v(u,v)$ são funções contínuas não negativas, e graças a propriedade da homegeneidade, $F(u,v)$ também é uma função contínua não negativa.

4. Devido a hipótese (V_1), $\mathcal{Z} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) = 0\right\} \subset B_R(0)$ é um conjunto compacto. Além disso, o conjunto $\mathcal{Z}$ pode ser vazio.

Usando a definição do espaço de Sobolev com peso, H, e o teorema de Sobolev, garantimos que os seguintes mergulhos são contínuos:

$$H \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*,\ N \geq 3.$$

Seja I o funcional de energia associado ao sistema (S) dado por

$$I(u,v) = ||(u,v)||_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u,v)\,\mathrm{d}x$$

definido no espaço de Hilbert H. É fato conhecido que $I \in C^1(H,\mathbb{R})$ com derivada de Gateaux da por

$$I'(u,v)(w,z) = \langle (u,v),(w,z)\rangle_H - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)(F_u(u,v)w + F_v(u,v)z)\,\mathrm{d}x.$$

Observemos ainda que os pontos críticos de I correspondem a soluções fracas de (S) (cf.[42]).

Sejam $R > 1$ dada pela condição (V_1), $\Lambda = B_{2R}(0) \subset \mathbb{R}^N$ e $k = 2p/(p-2), a > 0$, constante real a ser escolhida apropriadamente. Seja

$$\begin{cases} \quad \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{deccrescente} \quad \text{e} \quad C^1, \\ \eta(t) = 1, \quad \forall t \in (-\infty, a], \\ \eta(t) = 0, \quad \forall t \in [5a, +\infty), \\ |\eta'(t)| \leq 1/(5a), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.2}$$

Agora, considere $\widehat{F} : \left(\mathbb{R}^N \setminus \Lambda\right) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{F}(x,t,s) := \eta(\left|\left(K(x)\right)^{1/2}(t,s)\right|)\, F(t,s) + \left(1 - \eta\left(\left|(K(x))^{1/2}(t,s)\right|\right)\right) A(x)\frac{K(x)}{2k}\left(t^2+s^2\right),$$

onde

$$A(x) := \max\left\{\frac{2kF(t,s)}{K(x)(t^2+s^2)} : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ and } a \leq \sqrt{K(x)(t^2+s^2)} \leq 5a\right\}.$$

Assim, da desigualdade (2.1), $A(x) \to 0$ uniformemente quando $a \to 0$. Notemos que a função $\widehat{F}$ está bem definida, é não negativa e de classe C^1 em $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ (cf. item 3, Remark 4.3). Podemos então definir a não linearidade $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$G(x,t,s) := \chi_\Lambda(x) F(t,s) + (1 - \chi_\Lambda(x))\, \widehat{F}(x,t,s)$$

onde χ_Λ denota a função característica do conjunto Λ. Assim, G é uma função p-homogênea em Λ e que satisfaz $0 \leq G(x,t,s) \leq F(t,s)$, para todo $(x,t,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mais ainda, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, a função $(t,s) \mapsto G(x,t,s)$ é de classe C^1 e para cada $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ fixado, a função $x \mapsto G(x,s,t)$ é mensurável à Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. Introduzimos o sistema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)G_u(x,u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)G_v(x,u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \qquad u, \quad v \quad \in \quad H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AS}$$

O funcional Euler-Lagrange associado ao sistema auxiliar (AS) é dado por

$$J(u,v) \quad = \quad \frac{1}{2}||(u,v)||_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)G(x,u,v)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\,(u,v) \in H.$$

Pelas condições sobre a não linearidade G, o functional J é de classe $C^1(H,\mathbb{R})$ (cf. [42]) e sua derivada de Gateaux é dada por

$$J'(u,v)(w,z) = \langle (u,v),(w,z)\rangle_H - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\Big(G_u(x,u,v)w + G_v(x,u,v)z\Big)\,\mathrm{d}x,$$

para todo $(u,v),(w,z) \in H$. Observemos que os pontos críticos de J correspondem a soluções fracas para (AS) e reciprocamente.

Lema 4.4. *A função G satisfaz as seguintes propriedades:*

$$pG(x,u,v) = uG_u(x,u,v) + vG_v(x,u,v), \quad \forall\, x \in \Lambda, \tag{2.3}$$

Para $k = 2p/(p-2)$, podemos escolher a constante a suficientemente pequena tal que

$$2G(x,u,v) \le uG_u(x,u,v) + vG_v(x,u,v) \le \frac{K(x)}{k}\left(u^2+v^2\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda. \tag{2.4}$$

Prova: Usando de definição de G, temos que $G(x,u,v) = F(u,v)$ para todo $x \in \Lambda$, e consequentemente a estimativa (2.3) vale.

Observemos que $G(x,u,v) = \widehat{F}(x,u,v)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$, além disso, segue da definição da funcão $\widehat{F}$, que para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_u &= \eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)F_u(u,v) + \frac{K}{k}uA(x)\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right)\\ &\quad + \eta'\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\left(K^{1/2}u(u^2+v^2)^{-1/2}\right)\left[F(u,v) - A(x)\left(\frac{K(x)}{2k}(u^2+v^2)\right)\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned}\widehat{F}_v &= \eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)F_v(u,v) + \frac{K}{k}vA(x)\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right)\\ &\quad + \eta'\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\left(K^{1/2}v(u^2+v^2)^{-1/2}\right)\left[F(u,v) - A(x)\left(\frac{K}{2k}(u^2+v^2)\right)\right].\end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}u\widehat{F}_u + v\widehat{F}_v &= p\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)F(u,v) + A(x)\left[\frac{K}{k}(u^2+v^2)\right]\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right)\\ &\quad + \eta'\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\left(K^{1/2}(u^2+v^2)^{1/2}\right)\left[F(u,v) - A(x)\left(\frac{K}{2k}(u^2+v^2)\right)\right].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}u\widehat{F}_u + v\widehat{F}_v &\ge p\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)F(u,v) + A(x)\left[\frac{K}{k}(u^2+v^2)\right]\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right)\\ &\ge 2\widehat{F}(x,u,v) \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{pF(u,v)}{\frac{K}{2k}(u^2+v^2)} \leq 3c_0\frac{|u|^p+|v|^p}{\frac{K}{2k}(u^2+v^2)} \leq \frac{5^{p-2}12kc_0a^{p-2}}{\mu^{p/2}} \leq Ca^{p-2}.$$

onde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tais que $a \leq \sqrt{K(x)(u^2+v^2)} \leq 5a$ e onde $C > 0$ é uma constante real. Notemos que, $A(x) \to 0$ uniformemente quando $a \to 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 2k\frac{u\widehat{F}_u + v\widehat{F}_v}{K(u^2+v^2)} &= p\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\frac{2kF(u,v)}{K(u^2+v^2)} + 2A(x)\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right) \\ &+ \eta^{'}\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)(u^2+v^2)^{1/2}\left[2k\frac{F(u,v)}{K(u^2+v^2)} - A(x)\right] \leq 2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

para a suficientemente pequena. Ou seja,

$$u\widehat{F}_u + v\widehat{F}_v \leq \frac{K(x)}{k}\left(u^2+v^2\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda.$$

■

4.2 Geometria–Passo da Montanha

É padrão provar que J satisfaz a geometria do passo da montanha, incluímos a prova para facilitar a leitura. Sugerimos [42, 43] para mais detalhes.

Lema 4.5. *(Geometria–Passo da Montanha) O funcional J tem a Geometria do Passo da Montanha, isto é, J satisfaz as seguintes condições*

1. *Existem $\rho, \alpha > 0$, tais que $J(u,v) \geq \alpha$ se $||(u,v)||_H = \rho$,*
2. *Para qualquer $(u,v) \in H$, $u,v > 0$ com suporte compacto em $\Lambda \setminus \bar{B}_R(0)$, existe $0 < \theta < 1$ tal que $J(t^\theta u, t^\theta v) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.*

Prova: Segue da Observação 4.3 que

$$|pG(x,u,v)| = |pF(u,v)| \leq \; 3c_0\;(|u|^p + |v|^p) \text{ para todo } \quad x \in \Lambda.$$

Além disso, pelo fato de $V(x)$ ser limitado e do mergulho de Sobolev, concluímos

$$\int_\Lambda K(x)G(x,u,v) \leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u,v) \leq C_1||(u,v)||_H^p,$$

onde C_1 é uma constante real positiva. Usando a estimativa acima, temos

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{2}||(u,v)||_H^p - \int_\Lambda K(x)G(x,u,v)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} K(x)G(x,u,v)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2}||(u,v)||_H^2 - C_1||(u,v)||_H^p - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} \frac{V(x)}{2k}\left(u^2+v^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right) - C_1||(u,v)||_H^{p-2}\right)||(u,v)||_H^2. \end{aligned}$$

Escolha $\rho > 0$ tal que $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - C_1||(u,v)||_H^{p-2}\right) > 0$. Seja $\alpha = D\rho^2$. Então, existeρ, $\alpha > 0$ tal que $J(u,v) \geq \alpha$, para todo $(u,v) \in \partial B(0,\rho)$.

A seguir, provaremos o item (2). Considere $\theta > 0$ tal que $1/p < \theta < 1/2$. Da definição de G, $G(x,u,v) = F(u,v)$ para $x \in \Lambda$. Assim,

$$pG(x,u,v) = uG_u(x,u,v) + vG_v(x,u,v)\,\text{para}\,x \in \Lambda,$$

portanto temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{G(x,t^\theta u,t^\theta v)\right\} &= p\theta\frac{1}{t}G(x,t^\theta u,t^\theta v) \\ &\geq \frac{1}{t}G(x,t^\theta u,t^\theta v). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observemos que $p\theta > 1$. Assim, podemos concluir das hipóteses $(F_2)-(F_3)$ e da definição de G, que $G(x,u,v) = F(u,v) > 0$ onde $x \in \Lambda$ (cf. Observação 4.3, item (3)).
A desigualdade (2.9) implica que $G(x,t^\theta u,t^\theta v) \geq tQ(x,u,v)$ para alguma função Q. Logo,

$$J(t^\theta u,t^\theta v) \leq \frac{1}{2}t^{2\theta}||\,(u,v)\,||_H^2 - \int_\Lambda tK(x)Q(x,u,v).$$

Como $2\theta < 1$, concluímos que para qualquer $(u,v) \in H\setminus(0,0)$ fixado, $u,v > 0$ com suporte compacto em $\Lambda\setminus\bar{B}_R(0)$,

$$J(t^\theta u,t^\theta v) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

E isto completa a prova. ■

4.3 Condição de Compacidade

A fim de aplicar a teoria dos pontos críticos para provar a existência de soluções fracas para o sistema auxiliar(AS), primeiro precisamos estudar algumas propriedades de compacidade do funcional J.

Lema 4.6. *Suponhamos que as hipóteses $(F_0)-(F_3)$ sejam satisfeitas. Então, qualquer sequência Palais-Smale do funcional J é limitada em H.*

Prova: Seja $(u_n, v_n) \subset H$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional J, isto é,

$$|J(u_n, v_n)| \leq c \quad \text{e} \quad J'(u_n, v_n) \to 0 \quad \text{em} \quad H'.$$

Temos

$$||(u_n, v_n)||_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left(G_u(u_n, v_n)u_n + G_v(u_n, v_n)v_n\right) \mathrm{d}x + o(||(u_n, v_n)||_H)$$

e

$$\frac{1}{2}||(u_n, v_n)||_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)G(x, u_n, v_n) \,\mathrm{d}x + O(1).$$

Considere $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$. Como $k = 2p/(p-2)$, temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||(u_n, v_n)||_H^2 \leq \int_\Lambda K(x) \left(G(x, u_n, v_n) - \frac{1}{p}\left[u_n G_u(x, u_n, v_n) + v_n G_v(x, u_n, v_n)\right]\right) \mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega K(x) \left(G(x, u_n, v_n) - \frac{1}{p}\left[u_n G_u(x, u_n, v_n) + v_n G_v(x, u_n, v_n)\right]\right) \mathrm{d}x$$
$$+ O(1) + o(||(u_n, v_n)||_H).$$

Usando as estimativas (2.3) e (2.4), concluímos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) ||(u_n, v_n)||_H^2 \quad \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_\Omega \frac{V(x)}{k} u_n^2 + \frac{V(x)}{k} v_n^2 \,\mathrm{d}x + O(1) + o(||(u_n, v_n)||_H),$$

a qual implica em

$$\frac{1}{2k}||(u_n, v_n)||_H^2 \leq O(1) + o(||(u_n, v_n)||_H). \tag{2.10}$$

Portanto, (u_n, v_n) é limitada em H. ■

Lema 4.7. *Suponhamos que as hipóteses $(F_0)-(F_3)$ sejam satisfeitas. Seja $(u_n, v_n) \subset H$ uma seguência (P.–S.) de J. Então, existe uma $(u_{n_m}, v_{n_m}) \subset H$ subsequência de (u_n, v_n) tal que $(u_{n_m}, v_{n_m}) \to (u, v)$ em H.*

Prova: Do Lema 4.6, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que existe $(u, v) \in H$ tal que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ in H. Notemos que $G_u(x, u, v), G_v(x, u, v) \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$, e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_u(x, u, v)(u_n - u) \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} G_v(x, u, v)(v_n - v) \,\mathrm{d}x \to 0. \tag{2.11}$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
||(u_n, v_n) - (u, v)||_H^2 &= \langle J'(u_n, v_n) - J'(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left(G_u(x, u_n, v_n) - G_u(x, u, v)\right)(u_n - u)\, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} K(x) \left(G_v(x, u_n, v_n) - G_v(x, u, v)\right)(v_n - v)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} ||(u_n, v_n) - (u, v)||_H^2 = 0$. Consideremos as afirmações a seguir:

Afirmação (1) $\langle J'(u_n, v_n) - J'(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmação (2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(G_u(x, u_n, v_n) - G_u(x, u, v)\right)(u_n - u)\, \mathrm{d}x \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmação (3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(G_v(x, u_n, v_n) - G_v(x, u, v)\right)(v_n - v)\, \mathrm{d}x \to 0$ quando $n \to \infty$.

Prova: Afirmação (1) Notemos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\langle J'(u_n, v_n) - J'(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle\right| \leq ||J^{'}(u_n, v_n)||_{H'}||(u_n - u, v_n - v)||_H \\
&+ \langle J^{'}(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle \leq C||J^{'}(u_n)||_{H'} + \langle J^{'}(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante real positiva. Notemos ainda que $u_n \rightharpoonup u$ implica diretamente que $\lim\limits_{n\to\infty}\langle J^{'}(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle = 0$ e, como $||J^{'}(u_n, v_n)||_{H'} \to 0$ temos que

$$
\lim_{n\to\infty}\langle J'(u_n, v_n) - J'(u, v), (u_n - u, v_n - v)\rangle \to 0
$$

como queríamos. ∎

Para cada $\varepsilon > 0$ dado, seja $r > 2R$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} G_u(x, u_n, v_n)u\, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_r} G_v(x, u_n, v_n)v\, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.12}
$$

$$
2\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} \omega_N^{1/N} C \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)^{2^*}\, \mathrm{d}x\right)^{1/2^*} < \frac{\varepsilon}{6} \tag{2.13}
$$

onde $C \geq ||(u_n, v_n)||_H$ é uma constante real positiva e ω_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$. Seja $\eta = \eta_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$, uma função satisfazendo as seguntes condições $supp\, \eta \subseteq B_r^c(0)$, $\eta \equiv 1$ em $B_{2r}^c(0)$, $0 < \eta < 1$ se $r < |x| < 2r$ e

$$
|\eta^{'}(x)| \leq \frac{1}{r}, \quad \text{para todo}\, x \in \mathbb{R}^N.
$$

Desde que (u_n, v_n) é limitada em H e $|\eta(x)| \leq 1$, a sequência $(\eta(u_n, v_n))$ é também limitada, daí $J'(u_n, v_n) \cdot (\eta(u_n, v_n)) = o_n(1)$, isto é,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + \nabla v_n \nabla(\eta v_n)]\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, [u_n(\eta u_n) + v_n(\eta v_n)]\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\, [(\eta u_n) G_u(x, u_n, v_n) + (\eta v_n) G_v(x, u_n, v_n)]\, \mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\eta \equiv 0$ em $B_r(0)$ e $\Lambda = B_{2R}(0)$, a última igualdade combinada com a propriedade (2.4) resultam em

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq r} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + |\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2)\eta\, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{k}\int_{|x|\geq r} \left(\eta V(x)u_n^2 + \eta V(x)v_n^2\right)\, \mathrm{d}x - \int_{|x|\geq r} (u_n \nabla u_n \nabla \eta + v_n \nabla v_n \nabla \eta)\, \mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{1}{k}\right)\int_{|x|\geq 2r} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + |\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2\right)\, \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \quad \frac{1}{r}\int_{r\leq|x|\leq 2r} (|u_n||\nabla u_n| + |v_n||\nabla v_n|)\, \mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|\, \mathrm{d}x \leq \quad ||\nabla u_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \\ \displaystyle\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v_n||\nabla v_n|\, \mathrm{d}x \leq \quad ||\nabla v_n||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v_n|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}. \end{cases}$$

Devido ao Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov, concluímos $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em $L^2(B_{2r} \setminus B_r)$ e usando que (u_n, v_n) é limitado, segue-se que

$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|\, \mathrm{d}x \leq C\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \\ \\ \displaystyle\limsup_n \int_{r\leq|x|\leq 2r} |v_n||\nabla v_n|\, \mathrm{d}x \leq C\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Por outro lado, utilizando novamente a desigualdade de Hölder

$$\begin{cases} \displaystyle\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*}\, \mathrm{d}x\right)^{1/2^*} |B_{2r} \setminus B_r|^{1/N}, \\ \\ \displaystyle\left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v|^2\, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v|^{2^*}\, \mathrm{d}x\right)^{1/2^*} |B_{2r} \setminus B_r|^{1/N}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Lembrando que $|B_{2r} \setminus B_r| \leq |B_{2r}| = \omega_N 2^N r^N$, segue de (2.16) e (2.17), a seguinte estimativa

$$\begin{cases} \limsup_{n} \displaystyle\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u_n||\nabla u_n|\,\mathrm{d}x \leq 2\omega_N^{1/N} rC \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*}, \\ \\ \limsup_{n} \displaystyle\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v_n||\nabla v_n|\,\mathrm{d}x \leq 2\omega_N^{1/N} rC \left(\int_{r\leq|x|\leq 2r} |v|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2^*}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Escolhendo $r > 0$ satisfazendo (2.13) e (2.12), (2.15) e (2.18) implicam em

$$0 \leq \limsup_{n} \int_{|x|\geq 2r} (\,|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + |\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2)\,\mathrm{d}x \;<\; \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.19}$$

Usando (2.14) temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\geq 2r} K(x)\,[u_n G_u(x,u_n,v_n) + v_n G_v(x,u_n,v_n)]\,\mathrm{d}x \leq \\ &\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,[(\eta u_n)G_u(x,u_n,v_n) + (\eta v_n)G_v(x,u_n,v_n)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u_n \nabla(\eta u_n) + \nabla v_n \nabla(\eta v_n)]\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,[u_n(\eta u_n) + v_n(\eta v_n)]\,\mathrm{d}x + o_n(1) \leq \\ &\int_{|x|\geq r} (\,|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2 + |\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2)\eta\,\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{B_{2r}\setminus B_r} (|u_n||\nabla u_n| + |v_n||\nabla v_n|)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Segue da desigualdade (2.20) que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 2r} K(x)\,[u_n G_u(x,u_n,v_n) + v_n G_v(x,u_n,v_n)]\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Desta forma,

$$\int_{|x|\geq 2r} K(x)\,[u_n G_u(x,u_n,v_n) + v_n G_v(x,u_n,v_n)]\,\mathrm{d}x \to \int_{|x|\geq 2r} K(x)\,[u G_u(x,u,v) + v_n G_v(x,u,v)]\,\mathrm{d}x$$

quando $n \to \infty$.

Agora, usando a hipótese (F_0), o teorema da Convergência dominada de Lebesgue e o mergulho compacto de Rellich-Kondrachov concluímos que

$$\begin{aligned} G_u(x,u_n,v_n) &\to G_u(x,u,v) \quad \text{em} \quad L^{p/(p-1)}(B_{2r}), \\ G_v(x,u_n,v_n) &\to G_v(x,u,v) \quad \text{em} \quad L^{p/(p-1)}(B_{2r}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &\int_{|x|\leq 2r} (G_u(x,u_n,v_n) - G_u(x,u,v)(u_n - u))\,\mathrm{d}x \leq \\ &||G_u(x,u_n,v_n) - G_u(x,u,v)||_{L^{p/(p-1)}(B_{2r})} ||u_n - u||_{L^p(B_{2r})}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Daí, usando (2.21) temos $\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\leq 2r}(G_u(x,u_n,v_n) - G_u(x,u,v)(u_n-u))\,\mathrm{d}x = 0.$ Analogamente,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 2r}&(G_v(x,u_n,v_n) - G_v(x,u,v)(v_n-v))\,\mathrm{d}x \leq \\ &||G_v(x,u_n,v_n) - G_v(x,u,v)||_{L^{p/(p-1)}(B_{2r})}||v_n - v||_{L^p(B_{2r})}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

E portanto, $\lim_{n\to\infty}(G_v(x,u_n,v_n) - G_v(x,u,v)(v_n-v))\,\mathrm{d}x = 0$. Como provamos as três afirmações temos que $||(u_n,v_n)||_H \to ||(u,v)||_H$ e, portanto a prova está concluída. ■

A partir de agora, denotamos por B a bola unitária em $\mathbb{R}^N$, isto é, $B = B_1(0)$, o conjunto $\Lambda = B_R(0)$ e por $I_0 : H_0^1(B)\times H_0^1(B)\to\mathbb{R}$ o funcional

$$\begin{aligned}I_0(u,v) = \frac{1}{2}\int_B &\left(|\nabla u|^2 + \max_B (V(x),1)\,u^2\right)\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_B\left(|\nabla v|^2 + \max_B (V(x),1)\,v^2\right)\mathrm{d}x - \int_B K(x)F(u,v)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Notemos que I_0 tem a geometria do Passo da Montanha. Além disso, denotamos por d o nível do Passo da Montanha associado a I_0, isto é,

$$d = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_0(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma\in C\left([0,1], H_0^1(B)\times H_0^1(B)\right) : \gamma(0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \gamma(1) = e\},$$

com $e\in H_0^1(B)\times H_0^1(B)\setminus\{(0,0)\}$ satisfazendo $I_0(e) < 0$.

Observação 4.8. *Notemos que $J(u,v) \leq I_0(u,v)$ para todo $u,v\in H_0^1(B)$. Em particular, temos $J(e)\leq I_0(e) < 0$. Denotamos por m_J o nível do Passo da Montanha associado a J, isto é,*

$$m_J = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma\in C\left([0,1], H_0^1(B)\times H_0^1(B)\right) : \gamma(0) = (0,0) \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Observemos que $m_J \leq d$.

A fim de provar a existência de um ponto crítico para J vamos usar a seguinte versão do teorema do Passo de Montanha, que é uma conseqüência do Princípio Variacional Ekeland desenvolvido em [50] (cf. [9], [36]).

Proposição 4.9. *(Teorema–Passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973) Seja X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $r > 0$ tal que $||e|| > r$ e*

$$b := \inf_{||u||=r} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Se Φ satisfaz a condição $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\,([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = e\}.$$

Então c é um valor crítico de Φ.

Temos provado até este momento o seguinte resultado:

Proposição 4.10. *Existe um ponto crítico $(\varphi, \phi) \in H$ com φ, ϕ funções positivas associadas ao funcional*

$$J(u,v) \;=\; \frac{1}{p}||(u,v)||_H^p - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)G(x,u,v)\,\mathrm{d}x, \quad (u,v) \in H.$$

no nível crítico

$$m_J = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(B) \times H_0^1(B)\right) : \gamma(0) = (0,0) \quad e \quad \gamma(1) = e\},$$

com $e \in H_0^1(B) \times H_0^1(B) \setminus \{(0,0)\}$ satisfazendo, $I_0(e) < 0$.

Prova: A prova segue diretamente da Proposição 4.9. ∎

Lema 4.11. *Seja $(u,v) \in H$ um ponto crítico do funcional J no nível minimax m_J. Então (u,v) satisfaz a seguinte estimativa*

$$\| \,(u,v)\, \|_H^2 \;\leq\; 2kd.$$

Prova: É suficiente combinar (2.10) com a definição do nível minimax d e com o fato que $m_J \leq d$. De fato, observemos que $J(u,v) = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = d$ e $\lim_{n\to\infty} o(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} \langle J'(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle = 0$. ∎

4.4 Propriedades Qualitativas das soluções do tipo Passo da Montanha para o funcional auxiliar

A próxima proposição é crucial para os nossos argumentos, pois estabelece uma estimativa importante que envolve o a norma $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ da solução (u,v) do sistema (AS). Aqui, usamos o esquema de iteração Moser, que foi adaptado para o nosso problema. (cf. [16]).

Proposição 4.12. *Sejam $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $2q > N$, e $(u,v) \in H \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = H_u(x,u,v) & em \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = H_v(x,u,v) & em \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.24}$$

onde $H_u, H_v : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas não negativas que satisfazem

$$|H_u(x,t,s)| + |H_v(x,t,s)| \quad \leq \quad |h(x)|\,(|t| + |s|)\,, \text{ para todo } \quad t,\, s > 0.$$

e a, b são funções limitadas e não negativas em $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante real $M = M(q, ||h||_q) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} ||(u,v)||_{\infty} &= \max\left(||u||_{\infty}, ||v||_{\infty}\right) \\ &\leq M||\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$ and $\beta > 1$, sejam

$$A_m \quad = \quad \{x \in \mathbb{R}^N : |v|^{\beta-1} \leq m\},$$

e

$$v_m = \begin{cases} v|v|^{2(\beta-1)} & \text{em} \quad A_m \\ m^2 v & \text{em} \quad B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Notemos que pela definição de v_m, temos

$$v_m|_{\partial B_m} = \quad v_m|_{\partial A_m}.$$

Desta forma, podemos concluir que $v_m \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Observemos ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_m^2(x)\,\mathrm{d}x < \quad \infty.$$

Então, temos que $v_m \in H$. Calculando a derivada fraca ∇v_m, obtemos

$$\nabla v_m = \begin{cases} (2\beta-1)|v|^{2(\beta-1)}\nabla v & \text{em} \quad A_m \\ m^2 \nabla v & \text{em} \quad B_m \end{cases} \tag{2.26}$$

Agora, aplicando a função teste v_m na equação (2.24), concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)\, \mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} H_v(x,u,v) v_m \, \mathrm{d}x.$$

Pela equação (2.26),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla v_m \, \mathrm{d}x = \; (2\beta-1)\int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + m^2 \int_{B_m} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Consideremos a seguinte função,

$$\omega_m = \begin{cases} v|v|^{\beta-1} & \text{em} \quad A_m \\ mv & \text{em} \quad B_m = \mathbb{R}^N \setminus A_m. \end{cases}$$

Segue, portanto, que

$$\nabla \omega_m = \begin{cases} \beta|v|^{\beta-1}\nabla v & \text{em} \quad A_m \\ m\nabla v & \text{em} \quad B_m \end{cases} \tag{2.28}$$

Pelas mesmas razões que usamos para garantir que $v_m \in H$, podemos afirmar que $\omega_m \in H$. Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_m|^2 \, \mathrm{d}x = \beta^2 \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + m^2 \int_{B_m} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{2.29}$$

Das estimativas (2.27), (2.28) e (2.29) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2\right) \mathrm{d}x \;&-\; \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{A_m} \left(\beta^2 - 2\beta + 1\right) |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.27), obtemos a seguinte desigualdade

$$\Big(2\beta - 1\Big) \int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)\, \mathrm{d}x.$$

À qual implica em

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2 \, \mathrm{d}x\right) \leq \left[\frac{(\beta^2 - 2\beta + 1)}{(2\beta - 1)} + 1\right] \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla v_m + b(x) v v_m)\, \mathrm{d}x.$$

Como v é solução da equação (2.24), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \omega_m|^2 + b(x)\omega_m^2 \,\mathrm{d}x\right) \leq \frac{\beta^2}{(2\beta-1)} \int_{\mathbb{R}^N} H_v(x,u,v)v_m \,\mathrm{d}x.$$

$$\leq \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} H_v(x,u,v)v_m \,\mathrm{d}x.$$

Seja S a constante de Sobolev que satisfaz a seguinte relação

$$||v||^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pela definição de v_m resulta que $|v_m| \leq |v|^{2\beta-1}$. Desta forma, concluímos a estimativa $|H_v(x,u,v)v_m| \leq 2|h(x)| \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)^{2\beta}$ e portanto, temos

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{2^*}\right]^{(N-2)/N} \leq S\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} 2h(x) \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)^{2\beta} \,\mathrm{d}x.$$

Fazendo $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q} = 1$, pela desiguladade de Hölder, temos

$$\left[\int_{A_m} |\omega_m|^{2^*}\right]^{(N-2)/N} \leq 2S\beta^2 ||h||_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)|^{2\beta q_1} \,\mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.$$

Como $|\omega_m| \leq |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$ e $|\omega_m| = |v|^\beta$ em $A_m,$ estimamos a seguinte relação

$$\left[\int_{A_m} \left(|v|^\beta\right)^{2^*}\right]^{(N-2)/N} \leq 2S\beta^2 ||h||_q \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)|^{2\beta q_1} \,\mathrm{d}x\right]^{1/q_1}.$$

Fazendo $m \to \infty$, segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$||v||^{2\beta}_{2^*\beta} \leq 2S\beta^2 ||h||_q ||\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)||^{2\beta}_{2\beta q_1}.$$

e

$$||v||_{2^*\beta} \leq \beta^{1/\beta} \left(2S||h||_q\right)^{1/(2\beta)} ||\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)||_{2\beta q_1}. \tag{2.30}$$

Notemos que $N/(N-2) > q_1$, desta forma temos $\sigma = N/(q_1(N-2) > 1$. Vamos inciar o processo de iteração, consideremos inicialmente $\beta = \sigma$ em (2.30) de modo que: $2q_1\beta = 2^*$ e

$$||v||_{2^*\sigma} \leq \sigma^{1/\sigma} \left(2S||h||_q\right)^{1/(2\sigma)} ||\max\left(|u(x)|, |v(x)|\right)||_{2^*}. \tag{2.31}$$

Quando $\beta = \sigma^2$ em (2.30) obtemos $2q_1\beta = 2^*\sigma$ e

$$||v||_{2^*\sigma^2} \leq \sigma^{2/\sigma^2} \left(2S||h||_q\right)^{1/(2\sigma^2)} || \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right) ||_{2^*\sigma}. \tag{2.32}$$

As desigualdades obtidas em (2.31) e (2.32) implicam que

$$||v||_{2^*\sigma^2} \leq \sigma^{\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}} \left(2S||h||_q\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)} || \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right) ||_{2^*}. \tag{2.33}$$

Pelo processo de iteração, substituindo β por σ^j em (2.30), concluímos que

$$||v||_{2^*\sigma^j} \leq \sigma^{\sum_{l=1}^{j} \frac{l}{\sigma^l}} \left(2S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{\sigma^l}\right)} || \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right) ||_{2^*}. \tag{2.34}$$

Sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\sigma^j} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}$$

e usando a desigualdade de interpolação e a estimativa (2.34), temos

$$||v||_i \leq \max\left(1, \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(2S||h||_q\right)^{1/(2(\sigma-1))}\right) || \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right) ||_{2^*},$$

para todo $i \geq 2^*$. Notemos que

$$||v||_\infty = \lim_{i\to\infty} ||v||_i,$$

assim, concluímos que a Proposição 4.12 é válida para

$$M = \max\left(1, \sigma^{\sigma/(\sigma-1)^2} \left(2S||h||_q\right)^{1/(2(\sigma-1))}\right)$$

com

$$\sigma = \frac{N(q-1)}{q(N-2)}.$$

Por analogia, temos que $||u||_\infty \leq M|| \max\left(|u(x)|, |v(x)|\right) ||_{2^*}$. ∎

Lema 4.13. *Se $(u, v) \in H$ é um ponto crítico do funcional J, então $u, v \geq 0$.*

Prova: Observemos que devido à (2.5) e (2.6) concluímos

$$\frac{u^-\widehat{F}_u + v^-\widehat{F}_v}{\frac{K}{2k}((u^-)^2 + (v^-)^2)} = p\eta\left(\left|(K^{1/2}(u,v)\right|\right) \frac{F(u^-, v^-)}{\frac{K(x)}{2k}((u^-)^2 + (v^-)^2)} + 2A\left(1 - \eta\left(\left|(K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right) +$$

$$\eta'\left(\left|(K^{1/2}(u,v)\right|\right)(K^{1/2}((u^-)^2 + (v^-)^2)(u^2+v^2)^{-1/2}\left[\frac{F(u^-, v^-)}{\frac{K(x)}{2k}((u^-)^2 + (v^-)^2)} - A(x)\right].$$

Notemos que, $A(x) \to 0$ uniformemente quando $a \to 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 2k\frac{u\widehat{F}_u + v\widehat{F}_v}{K(u^2+v^2)} &= p\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\frac{2kF(u,v)}{K(u^2+v^2)} + 2A(x)\left(1-\eta\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)\right) \\ &+ \eta'\left(\left|K^{1/2}(u,v)\right|\right)(u^2+v^2)^{1/2}\left[2k\frac{F(u,v)}{K(u^2+v^2)} - A(x)\right] \leq 2, \end{aligned} \tag{2.35}$$

para a suficientemente pequena. Considere $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \Lambda$. Usando esta última desigualdade e o item 2 da Observação 4.3, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V(x)((u^-)^2 + (v^-)^2) + |\nabla v^-|^2)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Lambda K(x)\left(u^- F_u(u,v) + v^- F_v(u,v)\right)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega K(x)\left(u^-\widehat{F}_u + v^-\widehat{F}_v\right)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{K}{k}((u^-)^2 + (v^-)^2)\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2 + |\nabla v^-|^2 + V(x)(v^-)^2)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{V(x)}{k}(u^-)^2 + \frac{V(x)}{k}(v^-)^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Assim, concluímos que $||(u^-, v^-)||_H = 0$. ■

Lema 4.14. *Se $(u,v) \in H$ é um ponto crítico do funcional J então $u, v > 0$.*

Prova: Como $(u,v) \in H$ é um ponto crítico para J segue do Lema 4.13 que $u, v \geq 0$. Da Proposição 4.12 podemos concluir que $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando resultado de regularidade obtido em [24] segue que $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e portanto o resultado segue do Princípio do Máximo fraco (cf. [31]). ■

Lema 4.15. *Para qualquer $R > 1$, e qualquer solução de energia finita (u,v) com $u, v > 0$ do sistema auxiliar (AS) satisfaz*

$$||(u,v)||_\infty \leq M\,(2Skd)^{1/2}.$$

Prova: Notemos que se u, v é solução do sistema auxiliar (AS) com $u, v > 0$, então satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = H_u(x,u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + b(x)v = H_v(x,u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u, \quad v \quad \in \quad H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Considere $H_u,\ H_v : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $b\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definidas por

$$
\begin{aligned}
H_u(x,t,s) &= \chi_\Lambda(x)K(x)F_u(t,s) + (1-\chi_\Lambda(x))\,\eta\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)K(x)F_u(u,v)\\
&\quad + (1-\chi_\Lambda(x))\,\eta'\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)\frac{u}{(u^2+v^2)^{1/2}}K(x)^{1/2}F(u,v),\\
H_v(x,t,s) &= \chi_\Lambda(x)K(x)F_v(t,s) + (1-\chi_\Lambda(x))\,\eta\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)K(x)^{1/2}F_v(u,v)\\
&\quad + (1-\chi_\Lambda(x))\,\eta'\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)\frac{v}{(u^2+v^2)^{1/2}}K(x)^{1/2}F(u,v),\\
b(x) &= V(x) - (1-\chi_\Lambda(x))\,\frac{1}{k}K(x)A(x)\left(1-\eta\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)\right)\\
&\quad + (1-\chi_\Lambda(x))\,\eta'\left(\left|K(x)^{1/2}(u,v)\right|\right)\frac{K(x)^{1/2}}{(u^2+v^2)^{1/2}}\left[A(x)K(x)\frac{1}{2k}\left(u^2+v^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

onde χ_Λ é a função característica do conjunto Λ. Devido a continuidade das funções $\eta,\ \eta'$ temos que H_u e H_v definidas acima são funções contínuas. Tomando a constante a suficientemente pequena, podemos concluir que $b(x)$ é uma função contínua não negativa, tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} b(x)\left(u^2+v^2\right)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Além disso, usando que $V(x)$ é limtado segue da Observação 4.3 as seguintes desigualdades

$$
\begin{aligned}
|H_u(x,t,s)| &= |\chi_\Lambda(x)K(x)F_u(t,s)| + \left|(1-\chi_\Lambda(x))\,\eta\left(\left|(K(x))^{1/2}(t,s)\right|\right)K(x)F_u(t,s)\right|\\
&\quad + \left|(1-\chi_\Lambda(x))\,\eta'\left(\left|(K(x))^{1/2}(t,s)\right|\right)t(t^2+s^2)^{-1/2}(K(x))^{1/2}F(t,s)\right|\\
&\le C_1\left(|t|^{(p-2)}+|s|^{(p-2)}\right)(|t|+|s|) + \frac{C_2}{5a^2}\left(|t|^p+|s|^p\right)t\\
&\le C_3\left(|t|^{(p-2)}+|s|^{(p-2)}\right)(|t|+|s|),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|H_v(x,t,s)| &= |\chi_\Lambda(x)K(x)F_v(t,s)| + \left|(1-\chi_\Lambda(x))\,\eta\left(\left|(K(x))^{1/2}(t,s)\right|\right)K(x)F_v(t,s)\right|\\
&\quad + \left|(1-\chi_\Lambda(x))\,\eta'\left(\left|(K(x))^{1/2}(t,s)\right|\right)s(t^2+s^2)^{-1/2}(K(x))^{1/2}F(t,s)\right|\\
&\le C_1\left(|t|^{(p-2)}+|s|^{(p-2)}\right)(|t|+|s|) + \frac{C_2}{5a^2}\left(|t|^p+|s|^p\right)s\\
&\le C_3\left(|t|^{(p-2)}+|s|^{(p-2)}\right)(|t|+|s|),
\end{aligned}
$$

onde C_1, C_2 são constantes reais positivas. Portanto,

$$|H_u(x,u,v)| + |H_v(x,u,v)| \quad \le \quad |h(x)|\,(|u|+|v|) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

com h dada por

$$h(x) = \quad C\left(\max(u(x),v(x))\right)^{(p-2)}.$$

onde C é uma constante real positiva. Observemos ainda que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q = \dfrac{2^*}{p-2}$ com

$$||h||_q \leq CM\,(2Skd)^{(p-2)/2}$$

Desta forma, o resultado segue diretamente da Proposição (4.12). ■

Lema 4.16. *Sejam $(u,v) \in H$ soluções de energia finita para o sistema auxiliar (AS) com u, v funções positivas e o potencial V uma função contínua limitada satisfazendo $(V_0) - (V_1)$. Então u e v satistsfazem a seguinte desigualdade*

$$\max(u(x), v(x)) \leq \frac{R^{N-2}||(u,v)||_\infty}{|x|^{N-2}} \leq \frac{R^{N-2}M\,(2Skd)^{1/2}}{|x|^{N-2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$.

Prova: Considere a função harmônica $\psi : \left(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(x) = \frac{R^{N-2}||(u,v)||_\infty}{|x|^{N-2}}$$

Isto é, a função ψ satisfaz

$$-\Delta\psi = 0.$$

Portanto,

$$-\Delta\psi + \left(1 - \frac{1}{k}\right)V(x)\psi \geq 0.$$

Agora, considere a seguinte função teste

$$\phi = \begin{cases} (u-\psi)^+ & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \\ 0 & \text{se} \quad x \in B_R(0), \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \varphi = \begin{cases} (v-\psi)^+ & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0), \\ 0 & \text{se} \quad x \in B_R(0). \end{cases}$$

Notemos que

$$u \leq \psi \quad \text{em} \quad \partial B_R \quad \text{e} \quad v \leq \psi \quad \text{em} \quad \partial B_R(0)$$

então podemos concluir que $\phi,\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$J'(u,v)(\phi,0) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \frac{1}{k}V(x)u\phi \leq 0,$$
$$J'(u,v)(0,\varphi) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \frac{1}{k}V(x)v\varphi \leq 0.$$

Considere $\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) : u > \psi\}$ e $\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R(0) : v > \psi\}$. Assim, combinando estas estimativas, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{\Omega_1} (\nabla u - \nabla \psi)\, \nabla \phi + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)(u-\psi)\phi \, \mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Omega_2} (\nabla v - \nabla \psi)\, \nabla \varphi + \left(1 - \frac{1}{k}\right) V(x)(v-\psi)\varphi \, \mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\Omega_1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) [V(x)\,(u-\psi)\,(u-\psi)]\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) [V(x)\,(v-\psi)\,(v-\psi)]\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto Ω_1 e Ω_2 são conjuntos vazios. E, a prova está concluída. ■

4.5 Prova do Teorema 4.1

Prova: Dos Lemas 4.6 e 4.7, temos que o sistema auxiliar (AS) tem pelo menos uma solução do tipo Passo da Montanha $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ com u, v funções positivas. Portanto, é suficiente mostrar que (u, v) satisfaz a desigualdade $|K(x)^{1/2}(u, v)| \leq a$. Usando a hipótese (V_2), verificamos que

$$K(x)\left(|u|^2 + |v|^2\right) \leq \; 2K(x)\frac{R^{2(N-2)}M^2\,(2Skd)}{|x|^{2(N-2)}} \leq \; \gamma M^2 4Skd \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R.$$

Considere $\gamma^* = a^2/\left(M^2 4Skd\right)$. Então, para todo $\gamma \leq \gamma^*$, a solução (u, v) do sistema auxiliar (AS) é também solução do sistema (S), já que, $\eta(|K(x)^{1/2}(u, v)|) \equiv 1$ para todo $|x| \geq R$ e portanto, completamos a prova. ■

Referências

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] ALVES, C. O. Local Mountain Pass for a class of elliptic system. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v. 335 ,p. 135–150, 2007.

[3] ALVES, C. O.; DO Ó, J. M.; SOUTO, M. A. S. Local mountain pass for a class of elliptic problems involving critical growth. **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 46, p. 495–510, 2001.

[4] ALVES, C. O.; SOUTO, M. A. S. Existence of solutions for a class of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with vanishing potentials. **Journal of Differential Equations**, Amsterdam, v. 252, p. 5555–5568, 2012.

[5] AMBROSETTI, A.; FELLI, V.; MALCHIODI, A. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. **Journal of the European Mathematical Society**, Zürich, v. 7, p. 117–144, 2005.

[6] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A.; RUIZ, D. Bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. **Journal on Mathematical Analysis**, Philadelphia, v. 98, p. 317–348, 2006.

[7] AMBROSETTI, A.; WANG, Z.-Q. Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials. **Differential and Integral Equations**, Flórida, v. 18, n. 12, p. 1–13, 2005.

[8] ASSUNÇÃO, R. B.; CARRIÃO, P. C.; MIYAGAKI, O. H. Critical singular problems via concentration-compactness lemma. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v. 326, p. 137–154, 2007.

[9] AUBIN, J. P.; EKELAND, I. **“Applied Nonlinear Analysis. Pure and Applied Mathematics”**. New York: A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons,Inc., 1984.

[10] BENCI, V.; GRISANT, C. R.; MICHELETTI, A. M. Existence and non existence of the ground state solution for the nonlinear problems Schrödinger with $V(\infty) = 0$. **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**, New York, v. 66, p. 53–65, 2005.

[11] BEN-NAOUM, A. K.; TROESTLER, C.; WILLEM, M. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 26, n. 4, p. 823–833, 1996.

[12] BERESTYCKI, H.; LIONS, P.L. Nonlinear scalar field equations I. Existence of a ground state. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Berlin, v. 82 n. 4, p. 313–345, 1983.

[13] ——————, Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Berlin, v. 82 n. 4, p. 347–375, 1983.

[14] BOCCARDO, L.; MURAT, F. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations, **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 6, n. 19, p. 581–597, 1992.

[15] BREZIS, H. **Funcional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2010.

[16] BREZIS, H.; KATO, T. Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Amsterdam, v. 58, p. 137–151, 1979.

[17] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Hoboken, v. 36, n. 4, p. 437–477, 1983.

[18] QUISPEL, G.R.W.; CAPEL, H.W. Equation of motion for the Heisenberg spin chain, **Phys. A**, Amsterdam, v. 110, n. 1–2, p. 41–80, 1982.

[19] COLIN, M.; JEANJEAN, L. Solutions for a quasilinear Schrödinger equations: a dual approach. **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 56, p. 212–226, 2004.

[20] COSTA, D. G. On a nonlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$. **CMS Tech. Sum. Rep.**, 1993.

[21] COSTA, D. G. On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. **Electronic Journal of Differential Equations**, San Marcos, v. 7 , p. 1–14, 1994.

[22] DE FIGUEIREDO, D. G. **Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay;** Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[23] DE FIGUEIREDO, D. G.; DOS SANTOS, E. M.; MIYAGAKI, O. H. Sobolev spaces of symmetric functions and applications. **Journal of Functional Analysis**,Amsterdam, v. 261, p. 3735–3770, 2011.

[24] DIBENEDETTO, E. $C^{1+\alpha}$ Local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 7, n. 8, p. 827–850, 1983.

[25] DEL PINO, M.; FELMER, P. Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Berlin, v. 4, p. 121–137, 1996.

[26] DING, W.; NI, W. M. On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Berlin, v. 91, p. 283–308, 1986.

[27] DO Ó, J. M.; SEVERO, U. Quasilinear Schrödinger Equations involving Concave and Convex nonlinearities. **Communications on Pure and Applied Analysis**, Springfield, MO, v. 8 , n. 2, p. 621–644, 2009.

[28] DO Ó, J. M.; SEVERO, U. Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Berlin, v. 38, p. 275–315, 2010.

[29] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics)**. Providence RI: American Mathematical Society, v. 19, 1998.

[30] GLOSS,E. Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear equation in $\mathbb{R}^N$. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Amsterdam, v. 371, p. 465–484, 2010.

[31] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial diferential equations of secoind order**, New York: Springer, 1989.

[32] HASSE, R. W. A general method for the solutions of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations. **Zeitschrift für Physik**, Berlin, v. 37, p. 83–87, 1980.

[33] HEWITT, E.; STROMBERG, K. **Real and a Abstract Analysis**. New York: Springer, 1975.

[34] JEANJEAN, L.; TANAKA, K. A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$. **Indiana University Mathematics Journal**, Bloomington IN, v. 54, p. 443–464, 2007.

[35] JOST, J. **Partial Diferential Equations**. New York: Springer, 2007.

[36] KAVIAN, O. **"Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques", Mathématiques** & **Applications**. Paris: Springer-Verlag, v. 13, 1993.

[37] LIONS, P. L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part II. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, v. 1, p. 223–283, 1984.

[38] LIU, J.; WANG, Y. ; WANG, Z.-Q. Solition solutions for quasilinear Schrödinger equations II. **Journal of Differential Equations**, Amsterdam, v. 187, p. 473–493, 2003.

[39] MIYAGAKI, O. H. On a class of semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. **Nonlinear Analysis**: Theory, Methods & Applications, Oxford, v. 29, p. 773–781, 1997.

[40] PERAL, I. **Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian. Lecture Notes at the Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations at ICTP of Trieste**, 1997.

[41] POHOZAEV, S. I. Eigenfunctions of the equation $\nabla u + \lambda f(u) = 0$. **Soviet Mathematics Doklady**, Providence RI, v. 5, p. 1408–1411, 1965.

[42] RABINOWITZ, P. H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society**, v. 65, n. 100, 1986.

[43] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, Basel, v. 43, p. 270–291, 1992.

[44] RITCHIE, B. Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. **Physical Review**, p. 687–689, 1994.

[45] OMANA, W.; WILLEM, M. Homoclinic Orbits for a Class of Hamiltonian Systems. **Differential and Integral Equations**, Ohio, v. 5, p. 1115–1120, 1992.

[46] SIRAKOV, B. Existence and multiplicity of solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Berlin, v. 11, p. 119–142, 2000.

[47] STRAUSS, W. Existence of solitary waves in higher dimensions. **Communications in Mathematical Physics**, Berlin, v. 55, n. 2, p. 149–162, 1977.

[48] STRUWE, M. **Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems**. Berlin: Springer-Verlag, Third edition, 2000.

[49] TOLKSDORF, P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. **Journal of Differential Equations**, v. 51, p. 126–150, 1984.

[50] WILLEM, M. **Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications.** , Boston: 24. Birkhüser Boston, Inc., MA, 1996.