Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

Desigualdades do tipo Trudinger-Moser para uma classe de espaços de Sobolev

José Francisco Alves de Oliveira

Tese de Doutorado

Recife
18 de fevereiro de 2013

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

José Francisco Alves de Oliveira

Desigualdades do tipo Trudinger-Moser para uma classe de espaços de Sobolev

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó*

Recife
18 de fevereiro de 2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Oliveira, José Francisco Alves de
Desigualdades do tipo Trudinger-Moser para uma classe de espaços de Sobolev. / José Francisco Alves de Oliveira. - Recife: O Autor, 2013.
xi, 92 folhas

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2. Análise não-linear. 3. Equações diferenciais parciais. I. do Ó, João Marcos Bezerra. (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) MEI2013 – 052

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

João Marcos Bezerra do Ó, *UFPB*

Orientador

____

Everaldo Souto de Medeiros, *UFPB*

____

Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*

____

Ederson Moreira dos Santos, *USP*

____

Djairo Guedes de Figueiredo , *UNICAMP*

DESIGUALDADES DO TIPO TRUDINGER-MOSER PARA UMA CLASSE DE ESPAÇOS DE SOBOLEV

Por

José Francisco Alves de Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2013

Dedico à Priscila Torres.

Agradecimentos

Esse trabalho é o resultado de um longo processo que contou com a contribuição de várias pessoas em diferentes momentos. Quero manifestar meus sinceros agradecimentos a todos que tiveram participação direta ou indireta na realização dessa tarefa; em especial:

- Ao professor João Marcos Bezerra do Ó pela sábia orientação durante a execução do trabalho.

- Aos professores de graduação que acreditaram em meu trabalho, incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento, auxiliando-me sempre. Especialmente, aos professores Newton Luís Santos e Marcondes Rodrigues Clark.

- Aos professores Djairo Guedes de Figueiredo, Ederson Moreira dos Santos, Everaldo Souto de Medeiros e Pablo Braz e Silva, por participarem da avaliação desse trabalho e pelas valorosas sugestões.

- Aos colegas de curso e amigos, pela troca de experiências e convivência harmoniosa. Em especial a Felipe Wallison Chaves Silva, Pitágoras Pinheiro de Carvalho, Maurício Cardoso Santos e Diego Araújo de Souza pela companhia e incentivos.

- À minha família, pelo incentivo e apoio.

- Aos anônimos contribuintes brasileiros que através dos órgãos de fomento à pesquisa Capes e CNPq forneceram o apoio financeiro que propiciou-me todo um aprendizado sistemático, culminando para este trabalho.

Se você falar com um homem numa linguagem que ele compreende,
isso entra na cabeça dele.
Se você falar com ele em sua própria linguagem,
você atinge seu coração.

—NELSON MANDELA

Resumo

Deduzimos desigualdades do tipo Trudinger-Moser para uma classe de espaços de Sobolev modelados em espaços de Lebesgue com peso. As desigualdades que obtivemos estendem para dimensões não-inteiras resultados clássicos e fornecem uma ferramenta apropriada para o estudo de uma classe de problemas envolvendo crescimento crítico associado a uma família de operadores elípticos quasilineares que incluem; em particular, os operadores Laplaciano, $p-$Laplaciano e $k-$Hessiano, quando agindo em funções simétricas. Ademais, investigamos existência de funções extremais para alguns problemas de maximização associados àquelas desigualdades.

Palavras-chave: Desigualdades de Trudinger-Moser, espaços de Sobolev com peso, operadores elípticos quasilineares, funções extremais, crescimento crítico exponencial.

Abstract

We derive sharp Trudinger–Moser type inequalities for weighted Sobolev spaces. The inequalities that we obtain here extend for fractional dimensions the classical results and provides suitable tools for study of the critical exponential problem associated to a class of quasilinear elliptic operators which includes in particular the Laplacian, $p-$Laplacian and $k-$Hessian operators; when consider acting on symmetric functions. Moreover, we discuss the existence of extremal for the maximizing problem associated with some this new Trudinger–Moser type inequalities.

Keywords: weighted Sobolev spaces, Trudinger–Moser type inequalities, quasi-linear elliptic operators, extremal functions, critical exponential growth.

Sumário

Notações

$\Delta_p,\ 1 < p < \infty$	operador p-Laplaciano, página 6
Γ	função gamma de Euler $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, página 9
γ	constante de Euler $\gamma = \lim_{k\to\infty}(\sum_{j=1}^{k} 1/j - \log k)$, página 26
$\hookrightarrow$	inclusão contínua e/ou compacta, página 7
Λ_1	primeiro autovalor, página 61
$\lambda_\theta,\ \theta \geq 0$	medida de Lebesgue com o peso $\omega_\theta r^\theta$, página 9
$\mu_{\alpha,\kappa},\ \alpha,\kappa \geq 0$	constante ótima dada pela desigualdade de Trudinger-Moser, página 31
ω_θ	elemento volume generalizado associado ao número real $\theta \geq 0$, página 9
Ψ	função digama $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, página 26
$\rightharpoonup$	convergência na topologia fraca, página 27
$\mathtt{W}(a,b)$	conjunto das funções mensuráveis positivas e finitas q.t.p em (a,b), página 13
$AC(a,b)$	espaço das funções localmente absolutamente contínuas no intervalo (a,b), página 11
$AC_{\mathtt{R}(a,b)}$	espaços das funções $u \in AC(a,b)$ tais que $\lim_{r\to b} u(r) = 0$, página 13
$C_c^\infty(\Omega)$	espaço das funções de classe C^∞ e com suporte compacto contido em Ω, página 24
$f = O(g)$ se $r \to r_0$	f/g é limitado quando $r \to r_0$, página 5
$f = o(g)$ se $r \to r_0$	f/g tende a zero se $r \to r_0$, página 63
L_θ^q	espaço de Lebesgue L^q com respeito à medida λ_θ no intervalo $(0,R)$, página 10

$S_k(D^2u),\ 1 \leq k \leq n$	operador $k-$Hessiano, página 6
$W_0^{1,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev clássico, página 24
$X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$	classe de espaços de Sobolev com peso, página 10
$\lvert B_R \rvert_\theta$	medida do intervalo $(0,R)$ com respeito à medida λ_θ, página 9
q.t.p	em quase toda parte com respeito a uma medida, página 13

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Equações elípticas com crescimento crítico

O estudo de equações elípticas com crescimento crítico tem recebido bastante atenção nos últimos anos. Aqui, o *crescimento crítico* é determinado por algumas características particulares dos espaços de funções nos quais se busca resolver tais equações, em geral, via cálculo variacional. O exemplo que melhor ilustra essa situação é o fenômeno crítico de Sobolev; no qual, a criticalidade é dada pelas inclusões de Sobolev. Como veremos a seguir, o caso crítico é delicado e requer métodos específicos devido à perda de compacidade.

Foi verificado por Pokhozhaev [56], usando uma identidade que ficou conhecida como *identidade de Pokhozhaev*, que o problema

$$-\Delta u = u^{2^*-1} \text{ em } \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{1.1}$$

não tem solução não-trivial se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ é um domínio limitado e estrelado com relação a algum ponto e $2^* = 2n/(n-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Esta terminologia provém do fato de que as inclusões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ são compactas para $q < 2^*$ mas a compacidade é perdida para $q = 2^*$. Por outro lado, Brezis e Nirenberg [13] observaram que a equação com um termo de pertubação

$$-\Delta u = \lambda u + u^{2^*-1} \text{ em } \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

tem soluções positivas para $0 < \lambda < \lambda_1$ e $n \geq 4$. Se $n = 3$ ainda existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema acima tem solução positiva sempre que $\lambda^* \leq \lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet homogênea. Desde então, a equação (1.2) passou a ser conhecida como *problema de Brezis-Nirenberg*. Este problema tem sido bastante estudado e existem várias extensões parciais dos resultados acima, quando o Laplaciano é trocado pelo $p-$Laplaciano, com $1 < p < n$. Para resultados de existência e de não-existência de soluções referimos [32, 33, 35, 41], se Ω é um domínio limitado qualquer. Para o caso em que $\Omega = B_R$ é uma bola de raio $R > 0$, vários resultados foram obtidos por Knaap e Peletier [45, 46]; os quais, usando o método de *inversão de Emden-Fowler*, generalizaram resultados anteriormente obtidos em [7, 8].

Se $n = 2$, ou mais geralmente, se $p = n$; as inclusões de Sobolev $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ são compactas para todo $q > 1$. Além disso, $p^* = np/(n-p) \sim \infty$ (formalmente), se $p \to n$; e assim, é natural esperar a validade da inclusão $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$; no entanto, um contra-exemplo mostra que isso não ocorre (se $\Omega = B_1$, basta tomar $u(x) = \ln\ln(\mathrm{e}/|x|)$). Então surgiu a questão de encontrar o melhor crescimento permitido; isto é, uma função $g(t)$ com crescimento máximo possível e tal que $g(u) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Nesse sentido, de forma independente, S. Pokhozaev [57] e N. Trundiger [65] mostraram que $\exp(|u|^{\frac{n}{n-1}}) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Além disso, esses autores mostraram que existe $\mu > 0$ tal que $\int_\Omega \exp(\mu|u|^{\frac{n}{n-1}})\,dx \leq 1$ para todo $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ com $\|\nabla u\|_n \leq 1$. Um pouco depois N. Trudinger *et al.* [42] mostraram que o crescimento exponencial é ótimo, isto é, se $g(t)$ é uma função com crescimento mais rápido do que $\exp(t^{\frac{n}{n-1}})$, então $g(u) \notin L^1(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Em [54], J. Moser apresentou uma versão mais apurada destes resultados a qual passou a ser conhecida como *desigualdade de Trudinger-Moser*. De forma precisa, J. Moser mostrou que para todo $\mu > 0$ e $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ temos $\exp(\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}) \in L^1(\Omega)$; além disso,

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\,:\,\|\nabla u\|_n \leq 1} \int_\Omega e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,dx \quad \begin{cases} \leq c|\Omega| & \text{se} \quad \mu \leq \mu_n \\ = \infty & \text{se} \quad \mu > \mu_n, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}^n$, $c > 0$ depende apenas de μ e n e $\mu_n = n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, onde ω_{n-1} é a área da superfície esférica $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Assim, no caso $p = n$ o crescimento exponencial é crítico, governado pela desigualdade de Trudinger-Moser e μ_n é a *constante crítica.*

A existência de funções extremais para o supremo (1.3) no caso subcrítico, isto é, se $\mu < \mu_n$, é garantida facilmente. Por exemplo, pode-se usar o teorema da convergência de Vitali. Já o caso crítico, isto é, se $\mu = \mu_n$, requer técnicas delicadas. De fato, levou 10 anos até que, vários autores, resolvessem esse problema. O primeiro avanço deve-se a L. Carleson e A. Chang [16], que mostraram a existência de extremais, se $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n$ é a bola unitária centrada na origem. Em seguida, M. Struwe [61] garantiu extremais para pequenas pertubações da bola $B_R \subset \mathbb{R}^2$ e M. Flucher [34] completou para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Finalmente, K. Lin [51] mostrou que há extremais para (1.3) se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ é qualquer domínio limitado com fronteira suave.

Observamos que o problema (1.3), no caso crítico e com $n = 2$, está associado com a seguinte equação

$$-\Delta u = \lambda u e^{4\pi u^2} \text{ em } \Omega, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \text{ com } \lambda = \frac{1}{\int_\Omega u^2 e^{4\pi u^2}}, \tag{1.4}$$

e a existência de extremais para (1.3) garante solução positiva para esta equação. Isto contrasta com o problema crítico (1.1).

O limiar para a existência de soluções do problema associado ao crescimento crítico exponencial (ou de Trudinger-Moser) foi investigado por diversos autores, veja [26] e suas referências. Em particular, um fenômeno análogo àquele devido a Brezis e Nirenberg (1.2) foi detectado. Em [27], investigou-se a fronteira entre a existência e a não-existência de soluções para o problema crítico

$$-\Delta u = h(u)\,e^{u^2} \text{ em } B_1 \subset \mathbb{R}^2, \quad u_{|\partial B_1} = 0 \tag{1.5}$$

em função de um termo de menor ordem h que comporta-se como $h(r) = K/r^a$, para r suficientemente grande. Constatou-se que o problema (1.5) tem solução positiva para $a < 1$ e $K > 0$, no entanto, existe $K_2 > 0$ tal que a solubilidade é perdida para $a > 1$ e $0 < K < K_2$. Ainda, se $a = 1$, há solução para $K > 4/\mathrm{e}^{1/2}$ e existe $0 < K_0 < 4/\mathrm{e}^{1/2}$ tal que (1.5) não tem solução se $0 < K < K_0$. Como podemos ver, o limite entre a existência e a não-existência de soluções é delicado. Esse fenômeno é típico de problemas críticos, lembre-se dos resultados de Brezis-Nirenberg, onde o acréscimo de um termo de pertubação de menor ordem foi suficiente para produzir soluções. Para finalizar, gostaríamos de enfatizar que, como observado por Coron [20] e Bahri e Coron [10], as propriedades geométricas e topológicas do domínio são determinantes na questão da solubilidade de problemas envolvendo crescimento crítico.

1.2 Simetria radial e operadores elípticos quasilineares

Na seção anterior, observamos que a topologia e a geometria do domínio influenciam na solubilidade de uma equação diferencial. Nesta seção, veremos que; para uma larga classe de problemas, as soluções de uma equação diferencial herdam algumas propriedades de simetria do domínio. Um trabalho pioneiro nessa direção é devido a Gidas *et al.* [38]; onde investigou-se simetria radial para soluções da equação

$$-\Delta u = f(u) \text{ em } B_1 \subset \mathbb{R}^n, \; u_{|\partial B_1} = 0, \tag{1.6}$$

onde B_1 unitária centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n$. Mostrou-se que $f \in C^1$ é suficiente para garantir que qualquer solução positiva $u \in C^2$ do problema acima é simétrica e radialmente decrescente. Isto é, existe uma função $v : [0,\, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = v(r)$ para todo $x \in B_1$, com $v'(r) < 0$; onde $r = |x|$. Resultados como este foram largamente estudados e são conhecidos como *simetrias do tipo Gidas-Ni-Nirenberg*; para resultados recentes referimos [48]. Estes autores, veja ainda [39], investigaram simetria de soluções positivas também para o caso ilimitado

$$-\Delta u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^n,\; n \geq 3, \text{ com } u(x) = O(|x|^{-\nu}),\; \nu > 0 \text{ para } |x| \to \infty, \tag{1.7}$$

e mostraram simetria radial para uma larga classe de funções f. Assim, para uma classe bem ampla de funções f, o problema (1.6), equivale ao seguinte

$$\begin{cases} r^{1-n}(r^{n-1}u')' + f(u) = 0 & \text{em} \quad (0,\, 1), \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Para $n \geq 2$, vários autores têm investigado esse problema. Em [9] Atkinson e Peletier consideraram o caso $n = 2$, através do *shooting method*, estabeleceram condições sob f para existência de solução positiva para (1.8). O curioso nesse trabalho é que as condições para a solubilidade não são formuladas em termos do crescimento de f; mas, por meio de uma desigualdade envolvendo g e g', onde $g = \ln f$. Em [27], veja (1.5) acima, foi estudado o problema crítico exponencial na bola $B_1 \subset \mathbb{R}^2$. Veja [6], para resultados sobre a existência de soluções que mudam de sinal para o problema crítico exponencial.

A questão da simetria radial para equações envolvendo o operador $p-$Laplaciano, $p \neq 2$ tem sido investigado por diversos autores. Em [31], Felmer *et. al* investigaram simetria radial para soluções não-negativas do problema

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{1.9}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano, com $p > 2$ e $\Omega = B_1$. Ficou provado que, para f sob condições bastante gerais, qualquer solução não-negativa de (1.9) é necessariamente positiva, radial e decrescente. Em [23], investigou-se domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com *simetrias direcionais* e conclui-se resultados similares. Já o caso em que $1 < p < 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$, a garantia de simetria radial para soluções de (1.9) pode ser encontrada em [22]; veja também [21]. Dessa forma, para uma larga classe de funções f, o problema (1.9) reduz-se ao seguinte

$$\begin{cases} r^{1-n}(r^{n-1}|u'|^{p-2}u')' + f(u) = 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

O problema acima tem recebido atenção de diversos autores. Em [37], usando o *shooting method*, estabeleceu-se diversas condições sobre f para a existência de soluções. Se $p < n$, a existência foi garantida essencialmente para toda f com crescimento subcrítico, e; com mais algumas restrições, se f tem comportamento crítico e supercrítico. Se $p = n$, condições de existência foram estabelecidas para f com crescimento crítico exponencial. Para resultados complementares, indicamos [36] e suas referências. Veja ainda [62] para resultados sobre unicidade de soluções.

Agora, considere a equação

$$S_k(D^2u) + f(u) = 0 \ \text{em} \ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \tag{1.11}$$

onde $S_k(D^2u)$, $1 \le k \le n$ é o operador $k-$Hessiano [66, 69], definido como a soma de todos os menores $k \times k$ da matriz Hessiana D^2u. Por exemplo, $S_1(D^2u) = \Delta u$ e $S_n(D^2u) = \det D^2u$ é o operador de Monge-Ampère. Se $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^n$, a técnica *moving plane method*, usada pelos autores acima para garantir simetria radial para $p-$Laplaciano se aplica ao operador $k-$Hessiano, veja [28] para o operador de Monge-Ampère. Assim, (1.11) reduz-se a

$$\begin{cases} r^{1-n}(r^{n-k}|u'|^{k-1}u')' + f(u) = 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ u'(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

De acordo com os resultados de simetria discutidos; para uma larga classe de funções f, todos os problemas acima são casos particulares da seguinte família de problemas

$$\begin{cases} r^{-\theta}(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')' + f(u) = 0 \ \text{em} \ (0,R), \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

onde $0 < R \le \infty$ e os parâmetros $\alpha,\ \theta \ge 0$ e $\beta > -1$ são números reais.

Para α, β e θ como acima, denotamos por $L := L(\alpha,\beta,\theta)$ a família de operadores definida por

$$Lu = r^{-\theta}(r^{\alpha}|u'|^{\beta}u')'. \tag{1.14}$$

Essa família de operadores vem sendo estudada por vários autores; destacamos os trabalhos de P. Clément *et al.* [19], D. de Figueiredo *et al.* [24] e J. Jacobsen e K. Schmitt [43, 44] onde vários resultados foram obtidos sob diferentes condições nos parâmetros α, β e θ.

Observamos que os parâmetros discretos $n,k \in \mathbb{N}$ em (1.8), (1.10) e (1.12) foram trocados por parâmetros contínuos $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ em (1.13). Em geral, quando se estuda esses tipos de problemas via técnicas de EDO's (*shooting method*), veja [37] e [36] por exemplo; o uso do parâmetro contínuo não causa problema, no entanto; para um estudo via cálculo variacional, a situação é diferente visto que os espaços de Sobolev padrões são modelados em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, para uma abordagem variacional da família de problemas (1.13), uma família correspondente de espaços $X = X(R, \alpha, \beta, \theta)$ faz-se necessária. Os principais objetivos desse trabalho são os seguintes:

- Apresentar uma classe de espaços de Sobolev com peso $X_R^{1,\beta+2}(\alpha, \theta)$ apropriado para uma abordagem variacional da família de problemas em (1.13)-(1.14).
- Estabelecer uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser para os espaços $X_R^{1,\beta+2}(\alpha, \theta)$ a qual permitirá estender (1.3) (na forma radial) para espaços de Sobolev com peso e para dimensões não-inteiras.
- Estabelecer a existência de funções extremais para a desigualdade do tipo Trudinger-Moser obtida.
- Estabelecer uma forma otimizada para a desigualdade de Trudinger-Moser em $X_R^{1,\beta+2}(\alpha, \theta)$ e provar a existência de funções extremais para esta desigualdade.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma:

1.2.1 Capítulo 2

No Capítulo 2, apresentaremos a classe de espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ e discutiremos suas principais propriedades. Distinguiremos dois casos: *caso Sobolev* e o *caso Trudinger-Moser* e provaremos alguns resultados que servirão de base para nosso trabalho. Incluiremos um estudo sistemático das inclusões da forma $X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$. Neste ponto, veremos que existe um expoente crítico de Sobolev para a continuidade e/ou compacidade destas inclusões.

1.2.2 Capítulo 3

Provaremos uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser para os espaços $X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$. A chave para a prova dessa nova desigualdade envolve algumas estimativas delicadas, veja Lema 3.2.1 e Corolário 3.2.1, as quais permitem provar um fato que estende ligeiramente um resultado devido a J. Moser, veja Lema 3.3.1, e ainda oferecer uma nova prova para este. Tais estimativas são uma extensão das estimativas devido a L. Carleson e A. Chang contidas em [16]. Além disso, consideraremos algumas extensões da nova desigualdade de Trudinger-Moser obtida. Nesse sentido, provaremos uma *forma singular* e outra desigualdade na *forma invariante por escalar* contemplando domínios ilimitados.

1.2.3 Capítulo 4

O objetivo do Capítulo 4 é provar a existência de funções extremais para a desigualdade do tipo Trundiger-Moser estabelecida no Capítulo 3. Para isso, provaremos uma extensão para $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ do famoso *concentration-compactness principle* devido a P.-L. Lions [52]. Além disso, oferecemos uma estimativa para o funcional de Moser ao longo de sequências concentradas em $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ a qual permitirá aplicar a estratégia em duas etapas de L. Carleson e A. Chang [16] generalizada para os espaços $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$.

1.2.4 Capítulo 5

Neste capítulo, provaremos uma forma otimizada para a desigualdade do tipo Trudinger-Moser em $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$. Esta estimativa fornece mais informações; tanto a respeito da alternativa de concentração e compacidade do Capítulo 4, veja Corolário 4.2.1, quanto da desigualdade de Trudinger-Moser do Capítulo 3, veja Teorema 3.3.1. Além disso, provaremos a optimalidade desta desigualdade e estabeleceremos a existência de funções extremais. Para isso, provaremos uma estimativa uniforme para uma família de soluções do problema crítico associado à classe de operadores definida por (1.14). Nossa análise da forma otimizada da desigualdade do tipo Trudinger-Moser conclui-se aplicando a alternativa de concentração e compacidade aliada à técnica de *blow up analysis*. Para a existência de funções extremais, combinamos a alternativa de concentração e compacidade e a estratégia em duas etapas de L. Carleson e A. Chang por meio de uma estimativa de concentração obtida no Capítulo 4, veja Teorema 4.3.1.

CAPÍTULO 2

A classe de espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

Neste capítulo introduzimos a classe de espaços de Sobolev com peso $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e apresentamos algumas de suas principais propriedades. Estes espaços serão nosso ambiente natural de trabalho e apresentam-se como adequados para o estudo de uma classe de problemas elípticos quasilineares que incluem o operador k–Hessiano como caso particular, quando agindo em funções radialmente simétricas. Além disso, como veremos nos capítulos seguintes, estes espaços permitem estender alguns resultados clássicos para incluir dimensões fracionárias.

2.1 Introdução

Para cada número real $\theta \geq 0$, o elemento volume generalizado para dimensões fracionárias é definido por

$$\omega_\theta = \frac{2\pi^{\frac{\theta+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\theta+1}{2})} \tag{2.1}$$

no qual $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ é a função gamma de Euler. Note que, para cada $n \geq 1$ inteiro, ω_{n-1} coincide com a área da superfície esférica da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. Definimos a integração em dimensões fracionárias através da medida de Lebesgue com peso λ_θ dada por

$$\lambda_\theta(B) = \omega_\theta \int_B r^\theta\,\mathrm{d}r$$

onde B é um subconjunto boreliano, isto é, B pertence à $\sigma-$álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Observamos aqui que, se $B=(0,R)$ é um intervalo finito e $\theta = n-1$ é um número inteiro, então $\lambda_{n-1}(B)$ é a medida de Lebesgue da bola de raio R centrada na origem $B_R \subset \mathbb{R}^n$. Por esta razão iremos utilizar a notação

$$|B_R|_\theta = \int_0^R \mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Além disso, seja $f : B_R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função radialmente simétrica, isto é, existe $g : (0,R) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(|x|)$ para todo $x \in B_R$. Então f é integrável em B_R, com respeito a medida de Lebesgue dx, se, e somente se, g é integrável em $(0,R)$, com respeito a medida λ_{n-1}, e vale a igualdade

$$\int_{B_R} f(x)\,\mathrm{d}x = \omega_{n-1}\int_0^R g(r)r^{n-1}\mathrm{d}r = \int_0^R g(r)\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}.$$

Assim, a medida λ_θ estende de forma natural a integração padrão em $\mathbb{R}^n$ para espaços com dimensões fracionárias. Não é nosso objetivo discutir a formalidade axiomática que rege tais espaços, para isso o leitor é referido a [59, 55] onde a base axiomática e aplicações à problemas físico matemáticos são apresentadas. Nosso interesse é fornecer resultados sobre uma classe de espaços de funções $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ que inclua dimensões fracionárias e seja ao mesmo tempo apropriado para o estudo de uma classe de problemas elípticos quasilineares que inclui o operador k-Hessiano (restrito às funções simétricas) como caso particular. Como veremos, a classe $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ será constituída por espaços de Sobolev modelado em espaços de Lebesgue com respeito à medida λ_θ . Mais precisamente, seja $0<R\leq\infty$. Para cada $q\geq 1$ e $\theta\geq 0$, denotemos $L_\theta^q = L_\theta^q(0,R)$ o espaço de Lebesgue definido pelo conjunto das funções mensuráveis $u:(0,R)\to\mathbb{R}$ tais que

$$\|u\|_{L_\theta^q} = \begin{cases} \left(\int_0^R |u(r)|^q \,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{1/q} < \infty & \text{se} \quad 1\leq q<\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<r<R} |u(r)| < \infty & \text{se} \quad q=\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Se $\theta=0$, temos o espaço de Lebesgue usual $L_0^q = L^q(0,R)$ munido com a norma padrão $\|u\|_{L^q}$. Sejam $\alpha\geq 0$, $p\geq 1$ e $\theta\geq 0$ números reais. Denotamos $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ o espaço das funções localmente absolutamente contínuas $u:(0,R)\to\mathbb{R}$ tais que $u\in L_\theta^p$ e $u'\in L_\alpha^p$. Este espaço tem a propriedade de Banach se munido com a norma

$$\|u\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)} = \left(\|u\|_{L_\theta^p}^p + \|u'\|_{L_\alpha^p}^p\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Seja $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, ou simplesmente X_R, o fecho do conjunto

$$X = \left\{ u\in W_R^{1,p}(\alpha,\theta) : \lim_{r\to R} u(r) = 0 \right\}$$

com respeito à norma (2.3).

Devido a uma desigualdade do tipo Hardy, os espaços X_R têm propriedades importantes que os fazem um modelo apropriado para o estudo, via cálculo variacional, de problemas envolvendo a seguinte classe de operadores elípticos quasilineares

$$Lu := r^{-\theta}(r^\alpha |u'|^\beta u')'. \tag{2.4}$$

A classe de operadores definidas por $L=L(\alpha,\beta,\theta)$ tem sido objeto de pesquisa nos últimos anos. Destacamos os trabalhos de P. Clément *et al.* [19], D. de Figueiredo *et al.* [24] e J. Jacobsen e K. Schmitt [43, 44] onde vários resultados foram obtidos sob diferentes condições nos parâmetros α, β e θ.

Para finalizar, observamos que os seguintes operadores, quando agindo em funções simétricas definidas em bolas $B_R\subset\mathbb{R}^n$, estão inclusos na classe de operadores definidos por L.

Operador	α	β	θ
Laplaciano	$n-1$	0	$n-1$
m-Laplaciano $(m>1)$	$n-1$	$m-2$	$n-1$
k-Hessiano	$n-k$	$k-1$	$n-1$

2.2 Notações e resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades dos espaços $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ introduzidos na seção anterior.

Seja $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$ um intervalo. Denotaremos $AC(I)$ ou $AC(a,b)$ o conjunto das funções $u:I\to\mathbb{R}$ absolutamente contínuas em todo compacto $[c,d]\subset I$.

Para cada $\theta\geq 0$, defina $T_\theta : L^q_\theta(0,R)\to L^q(0,R)$ por

$$T_\theta u(r)=\omega_\theta^{1/q}u(r)r^{\theta/q}.$$

Note que T_θ é um operador linear sobrejetivo e

$$\|u\|_{L^q_\theta}=\|T_\theta u\|_{L^q},$$

ou seja, T_θ é uma isometria linear. Como consequência L^q_θ é um espaço de Banach com a norma (2.2) e, além disso, este é um espaço uniformemente convexo, se $1<q<\infty$.

Teorema 2.2.1. *$W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ é um espaço de Banach com a norma definida em* (2.3).

Prova: Seja (u_k) uma sequência de Cauchy em $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Em particular, (u_k) e (u_k') são sequências de Cauchy em L^p_θ e L^p_α, respectivamente. Podemos tomar $\overline{u}_0$ e u_1 tais que

$$u_k\to\overline{u}_0 \quad \text{em} \quad L^p_\theta \quad \text{e} \quad u_k'\to u_1 \quad \text{em} \quad L^p_\alpha. \tag{2.5}$$

Em particular, existe uma subsequência (u_{k_j}) tal que

$$u_{k_j}(r)\to\overline{u}_0(r) \quad \text{e} \quad u_{k_j}'(r)\to u_1(r) \quad \text{q.t.p em} \quad (0,R). \tag{2.6}$$

Afirmação 2.2.1. *Existe $u_0\in AC(0,R)$ tal que $u_0(r)=\overline{u}_0(r)$ q.t.p em $(0,R)$ e $u_0'=u_1$.*

Seja r_0 em $(0,R)$ tal que $u_{k_j}(r_0)\to\overline{u}_0(r_0)$, sendo cada u_{k_j} um elemento de $AC(0,R)$, temos

$$u_{k_j}(r)=u_{k_j}(r_0)+\int_{r_0}^r u_{k_j}'(s)\,\mathrm{d}s, \quad r\in(0,R). \tag{2.7}$$

Uma vez que $u_1\in L^p_\alpha$, dado $[c,d]\subset(0,R)$, segue da desigualdade de Hölder

$$\int_c^d |u_1(s)|\,\mathrm{d}s\leq\|u_1\|_{L^p_\alpha}\left(\int_c^d(\omega_\alpha s^\alpha)^{-\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p-1}{p}}<\infty.$$

Segue-se que $u_1\in L^1_{loc}(0,R)$, e assim, definindo $u_0:(0,R)\to\mathbb{R}$ por

$$u_0(r)=\overline{u}_0(r_0)+\int_{r_0}^r u_1(s)\,\mathrm{d}s, \quad r\in(0,R) \tag{2.8}$$

temos $u_0\in AC(0,R)$. Ainda, para todo $r\in(0,R)$, usando a desigualdade de Hölder

$$\int_{r_0}^r |u_{k_j}'(s)-u_1(s)|\,\mathrm{d}s\leq\|u_{k_j}'-u_1\|_{L^p_\alpha}\left(\int_{r_0}^r(\omega_\alpha s^\alpha)^{-\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{p-1}{p}}\to 0, \quad \text{se} \quad j\to\infty$$

em virtude de (2.5). Dessa forma, por (2.6), (2.7) e (2.8) temos

$$|u_{k_j}(r) - u_0(r)| \leq |u_{k_j}(r_0) - \overline{u}_0(r_0)| + \int_{r_0}^{r} |u'_{k_j}(s) - u_1(s)|\,\mathrm{d}s \to 0, \quad \text{se} \quad j \to \infty. \tag{2.9}$$

Logo, $u_{k_j}(r) \to u_0(r)$ para todo $r \in (0,R)$ e por (2.6) temos $u_0(r) = \overline{u}_0(r)$ q.t.p em $(0,R)$. Ainda, por (2.8) é claro que $u_0' = u_1$ o que prova a afirmação.

Combinando a Afirmação 2.2.1 com (2.5) vemos que $u_0 \in W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e $u_k \to u_0$ em $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ donde segue a completude. ■

Observação 2.2.1. *O argumento acima permite concluir que toda função $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ satisfaz* $\lim_{r\to R} u(r) = 0$.

De fato, se $u \in X_R$ então existe uma sequência $(u_k) \subset W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ tal que

$$\lim_{r\to R} u_k(r) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \|u_k - u\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)} \to 0 \quad \text{se} \quad k \to \infty. \tag{2.10}$$

Assim, a menos de subsequência, temos

$$u_k(r) \to u(r) \quad \text{e} \quad u_k'(r) \to u'(r) \quad \text{q.t.p em} \quad (0,R). \tag{2.11}$$

Usando integrais indefinidas como em (2.7) e (2.8) obtemos,

$$|u_k(r_0) - u(r_0)| + \int_{r_0}^{R} |u_k'(s) - u'(s)|\,\mathrm{d}s \to 0, \quad \text{se} \quad k \to \infty. \tag{2.12}$$

Ainda, para todo $r \in (0,R)$, como em (2.10)

$$|u(r)| \leq |u_k(r)| + |u_k(r) - u(r)| \leq |u_k(r)| + |u_k(r_0) - u(r_0)| + \int_{r_0}^{r} |u_k'(s) - u'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Portanto, usando (2.10) segue

$$\lim_{r\to R} |u(r)| \leq |u_k(r_0) - u(r_0)| + \int_{r_0}^{R} |u_k'(s) - u'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Agora, fazendo $k \to \infty$ acima e usando (2.12) concluímos a prova da Observação.

Teorema 2.2.2. *Suponha $1 < p < \infty$. Então, $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo. Em particular, o mesmo vale para o subespaço fechado $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$.*

Prova: Seja $1 < p < \infty$. Lembramos que o espaço $L^p(0,R) \times L^p(0,R)$ é separável, reflexivo e uniformemente convexo se munido com a norma

$$\|(u,v)\|_{L^p\times L^p} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $\alpha,\, \theta \geq 0$, considere a aplicação $T_{\alpha,\theta} : W_R^{1,p}(\alpha,\theta) \to L^p \times L^p$ dada por

$$T_{\alpha,\theta} u = \left(\omega_\theta^{1/p} u(r) r^{\theta/p},\, \omega_\alpha^{1/p} u'(r) r^{\alpha/p}\right).$$

Para cada $u \in W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, é claro que

$$\|T_{\alpha,\theta}u\|_{L^p\times L^p} = \|u\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}.$$

Segue que $T_{\alpha,\theta}$ é uma isometria linear. Sendo $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ completo, segue que este é isométrico a um subespaço fechado de $L^p(0,R)\times L^p(0,R)$. Uma vez que as propriedades de separabilidade, reflexibilidade e convexidade uniforme são mantidas para subespaços fechados e preservadas por isometrias, segue o resultado. ■

O estudo dos espaços $W_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ pode ser feito sob várias condições nos parâmetros α, p e θ. Para uma abordagem sistemática, destacamos dois casos com comportamentos bastantes distintos: O *caso Sobolev*, quando vale a condição

$$\boxed{\alpha - p + 1 > 0}$$

e o *caso Trudinger-Moser*, se vale a condição

$$\boxed{\alpha - p + 1 = 0.}$$

Esta nomenclatura ficará clara nas seções seguintes.

Em nosso trabalho estaremos interessados principalmente no *caso Trudinger-Moser*, no entanto, o *caso Sobolev* será de grande ajuda em nossos resultados.

2.3 Desigualdade de Hardy e inclusões de Sobolev para $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

Nesta seção estabeleceremos algumas desigualdades do tipo Sobolev para os espaços X_R. Como veremos adiante, este problema está relacionado com desigualdades do tipo Hardy para funções absolutamente contínuas. Inicialmente, vamos introduzir algumas notações e resultados que aparecem em [47]. Para cada intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ denotamos por $\mathtt{W}(a,b)$ o conjunto das funções mensuráveis, positivas e finitas q.t.p em (a,b). Ainda $AC_{\mathrm{R}}(a,b)$ denota o espaço das funções $u \in AC(a,b)$ tais que $\lim_{r\to b^-} u(r) = 0$. Uma questão interessante abordada por B. Opic e A. Kufner em [47] foi a seguinte:

Sejam $p, q > 1$ números reais e $v, w \in \mathtt{W}(a,b)$. Sob que condições em p, q, a, b, v e w existe uma constante $C > 0$ tal que a desigualdade

$$\left(\int_a^b |u|^q w \,\mathrm{d}r\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^b |u'|^p v \,\mathrm{d}r\right)^{1/p} \tag{2.13}$$

seja verdadeira para toda $u \in AC_{\mathrm{R}}(a,b)$?

O problema acima pode ser traduzido em uma desigualdade do tipo Hardy. A questão crucial é determinar condições para que o operador linear $H_{\mathrm{R}} : L^p(a,b;v) \to L^q(a,b;w)$ definido por

$$(H_{\mathrm{R}}f)(r) = \int_r^b f(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.14}$$

esteja bem definido e seja contínuo. Aqui, $L^p(a,b;v)$ é a notação padrão para o espaço de Lebesgue com peso, veja [47, p.45]. A continuidade e a compacidade do operador H_{R} podem ser determinada pela análise das seguintes constantes e funções auxiliares:

(i) Para $1 < p \leq q < \infty$ e $v, w \in \mathtt{W}(a,b)$, defina a função $F_{\mathrm{R}} : (a, b) \to [0,\infty]$ por

$$F_{\mathrm{R}}(r) = F_{\mathrm{R}}(r\,; a, b, w, v, q, p) = \left(\int_a^r w(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} \left(\int_r^b v^{1-p'}(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/p'} \tag{2.15}$$

e ainda $B_{\mathrm{R}} \in [0,\infty]$ por

$$B_{\mathrm{R}} = B_{\mathrm{R}}(a, b, w, v, q, p) = \sup_{a<r<b} F_{\mathrm{R}}(r). \tag{2.16}$$

(ii) Para $1 < q < p < \infty$ e $v, w \in \mathtt{W}(a,b)$, defina $A_{\mathrm{R}} = A_{\mathrm{R}}(a, b, w, v, q, p) \in [0,\infty]$ por

$$A_{\mathrm{R}} = \left\{\int_a^b \left[\left(\int_a^r w(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} \left(\int_r^b v^{1-p'}(s)\,\mathrm{d}s\right)^{1/q'}\right]^m v^{1-p'}(r)\,\mathrm{d}r\right\}^{1/m}, \tag{2.17}$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Com esta notação, B. Opic e A. Kufner mostraram que o operador H_{R} é contínuo se, e só se, B_{R} é finito ou se, e só se, A_{R} é finito conforme $1 < p \leq q < \infty$ ou $1 < q < p < \infty$. Além disso, para $1 < p \leq q < \infty$, H_{R} é compacto se, e somente se,

$$B_{\mathrm{R}}(a, b, w, v, q, p) < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r \to a^+} F_{\mathrm{R}}(r) = \lim_{r \to b^-} F_{\mathrm{R}}(r) = 0. \tag{2.18}$$

Já no caso em que $1 < q < p < \infty$, H_{R} é compacto se, e somente se,

$$A_{\mathrm{R}}(a, b, w, v, q, p) < \infty. \tag{2.19}$$

Para mais detalhes sobre estes resultados, veja [47][p. 65 e 83].

Nas seções seguintes, iremos usar os resultados acima para determinar condições sobre α, p, θ, κ, q e R para as quais $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ está incluso em L^q_κ.

2.3.1 Inclusões $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^q_\kappa$

Nesta seção vamos considerar desigualdades de Sobolev para X_R no caso limitado, ou seja, $0 < R < \infty$. Nosso primeiro resultado é o seguinte

Lema 2.3.1. *Suponha que α, p, θ são tais que $\theta \geq \alpha - p$. Então a norma $\|u\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}$ definida em* (2.3) *é equivalente à norma do gradiente*

$$\|u\|_{1,L^p_\alpha} = \|u'\|_{L^p_\alpha}$$

no subespaço $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Em particular, no caso Trudinger-Moser estas normas são equivalentes para todo α, $\theta \geq 0$, e $p > 1$.

Prova: Desejamos verificar que existem constantes positivas a e b tais que

$$a\|u'\|_{L^p_\alpha} \leq \|u\|_{W^{1,p}_R(\alpha,\theta)} \leq b\|u'\|_{L^p_\alpha},$$

para todo $u \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$. A existência da constante a segue imediatamente da definição (2.3). Para garantir a existência de b, vamos verificar que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^R |u(r)|^p \mathrm{d}\lambda_\theta \leq C \int_0^R |u'(r)|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha \tag{2.20}$$

para todo $u \in AC_{\mathrm{R}}(0,R)$. De fato, como vimos na seção anterior, a existência de tal $C > 0$ é equivalente mostrar que B_{R}, definido por (2.16), é finito com $a = 0$, $b = R$, $w = \omega_\theta r^\theta$, $v = \omega_\alpha r^\alpha$ e $p = q$. Um cálculo direto fornece

$$F_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} k_1 \left(\dfrac{p-1}{p-\alpha-1} \left(r^{\frac{\theta+1}{p-1}} R^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}} - r^{\frac{\theta-\alpha+p}{p-1}} \right) \right)^{1/p'} & \text{se} \quad \alpha - p + 1 \neq 0, \\ k_1 \left(r^{\frac{\theta+1}{p-1}} \ln \dfrac{R}{r} \right)^{1/p'} & \text{se} \quad \alpha - p + 1 = 0, \end{cases}$$

onde $k_1 = (\omega_\theta/\omega_\alpha(\theta+1))^{1/p}$. Uma vez que estamos supondo $\theta \geq \alpha - p$, em todo caso, temos $B_{\mathrm{R}} = \sup_{0<r<R} F_{\mathrm{R}}(r)$ finito e vale (2.20). Finalmente, visto que $AC_{\mathrm{R}}(0,R) \cap X_R$ é denso em X_R segue o resultado. ■

Em geral, a propriedade de convexidade uniforme não é preservada por normas equivalentes, sendo assim faz-se necessário destacar

Corolário 2.3.1. *Suponha $1 < p < \infty$ e $\theta \geq \alpha - p$, então $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ é um espaço uniformemente convexo munido com a norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$.*

Prova: Usando o Lema 2.3.1 vemos que X_R é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$. Defina, $T_\alpha : X_R \to L^p$ por

$$T_\alpha u = \omega_\alpha^{1/p} r^{\alpha/p} \cdot u'.$$

É claro que

$$\|T_\alpha u\|_{L^p} = \|u\|_{1,L^p_\alpha}.$$

Logo, o resultado segue como no Teorema 2.2.2. ■

2.3.1.1 Caso Sobolev

Nessa seção apresentaremos estimativas para os espaços X_R no *caso Sobolev*.

Teorema 2.3.1 (Estimativas para $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$, $\alpha - p + 1 > 0$)**.** *Suponha que $0 < R < \infty$. Sejam $\kappa \geq 0$ e $u \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ com $\alpha - p + 1 > 0$. Então, existe uma constante $C > 0$ que independe de u tal que*

$$\|u\|_{L^q_\kappa} \leq C\|u'\|_{L^p_\alpha} \tag{2.21}$$

desde que α, p, κ e q satisfaçam uma das alternativas seguintes:

(i) $\kappa \geq \alpha - p$ e $q \in (1, p^*]$, *ou*

(ii) $\kappa < \alpha - p$ e $q \in (1, p^*)$,

onde

$$p^* = p^*(\alpha, p, \kappa) = \frac{(\kappa+1)p}{\alpha - p + 1}.$$

Prova: Por densidade é suficiente provar (2.21) para $u \in AC_{\mathrm{R}}(0,R) \cap X_R$. De acordo com (2.13), (2.16) e (2.17) o estudo da existência de C em (2.21) para $u \in AC_{\mathrm{R}}(0,R)$ pode ser feito através dos valores B_{R} e A_{R} com $a = 0$, $b = R$, $w = \omega_\kappa r^\kappa$, $v = \omega_\alpha r^\alpha$. Suponha $\alpha - p + 1 > 0$, então um cálculo direto fornece

$$F_{\mathrm{R}}(r) = K_1 \left(r^{\frac{p-\alpha-1}{p-1} + \frac{p'(\kappa+1)}{q}} - r^{\frac{p'(\kappa+1)}{q}} R^{\frac{p-\alpha-1}{p-1}} \right)^{1/p'}, \quad 1 < p \leq q < \infty, \tag{2.22}$$

onde K_1 é uma constante positiva. Além disso, para $1 < q < p < \infty$,

$$\left(\int_0^r (\omega_\kappa s^\kappa) \, \mathrm{d}s \right)^{1/q} \left(\int_r^R (\omega_\alpha s^\alpha)^{1-p'} \, \mathrm{d}s \right)^{1/q'} = O(r^{\frac{\kappa+1}{q} + \frac{\alpha(1-p')+1}{q'}}),$$

quando $r \to 0$. Portanto,

$$A_{\mathrm{R}} = \left(\int_0^R f(r) \, \mathrm{d}r \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \quad \text{com} \quad f(r) = O(r^P)$$

onde

$$P = \frac{pq}{p-q} \frac{\kappa+1}{q} + \frac{pq}{p-q} \frac{\alpha(1-p')+1}{q'} + \alpha(1-p'). \tag{2.23}$$

Logo,

$$A_{\mathrm{R}} \text{ é finito } \Leftrightarrow P + 1 > 0. \tag{2.24}$$

(i) Se $\kappa \geq \alpha - p$ temos $p^* \geq p$. Portanto, a análise de (2.21) é feita através de B_{R}. Mas por (2.22) este é finito para todo $q \in (1, p^*]$.

(ii) Se $\kappa < \alpha - p$ temos $p < p^*$. Assim, analisamos (2.21) por A_{R}. No entanto, combinando (2.23) e (2.24) temos

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{R}} \text{ é finito } &\Leftrightarrow P + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa + 1 - \frac{\alpha q}{p} + \frac{q}{p'} > 0 \\ &\Leftrightarrow q < \frac{(\kappa+1)p}{\alpha - p + 1} = p^*. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Logo, (2.21) vale para $1 < q < p^*$. ■

Definição 2.3.1. *O expoente*

$$p^* = p^*(\alpha, p, \kappa) = \frac{(\kappa+1)p}{\alpha - p + 1}$$

é chamado expoente crítico para a inclusão

$$X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\kappa^q.$$

Como consequência do resultado anterior, temos o seguinte

Corolário 2.3.2. *Sejam $R > 0$ e $\kappa \geq 0$ números reais. Suponha que $\alpha - p + 1 > 0$ e $\theta \geq \alpha - p$. Então,*

(i) *Se $\kappa \geq \alpha - p$, a inclusão $X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$ é contínua para $q \in (1, p^*]$*

(ii) *A inclusão $X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$ é compacta para $q \in (1, p^*)$.*

Prova: Note que, pelo Lema 2.3.1, a norma $\|\cdot\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,L_\alpha^p}$.

(i) Segue imediatamente de (2.21) e do item **(i)** do Teorema 2.3.1.
(ii) Defina $H_{\mathrm{R}} : L_\alpha^p \to L_\kappa^q$ por

$$(H_{\mathrm{R}}u)(r) = \int_r^R u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Afirmação 2.3.1. *O operador H_{R} é compacto para todo $q \in (1, p^*)$.*

Se $\kappa \geq \alpha - p$, vale $p^* \geq p$. Usando (2.18), para $1 < p \leq q < \infty$, H_{R} é compacto se, e somente se, B_{R} é finito e

$$\lim_{r \to 0} F_{\mathrm{R}}(r) = \lim_{r \to R} F_{\mathrm{R}}(r) = 0. \tag{2.26}$$

Portanto, segue de (2.22) que H_{R} é compacto, quando $p \leq q < p^*$.
Se $\kappa < \alpha - p$, vale $p^* < p$. Por (2.19), para $1 < q < p < \infty$, H_{R} é compacto se, e somente se, A_{R} é finito. Assim, segue de (2.25) que H_{R} é compacto para $q \in (1, p^*)$. Isto prova a afirmação.
Agora, para toda $u \in X_R$ temos

$$u(r) = \int_r^R -u'(s)\,\mathrm{d}s \;\; \text{q.t.p em} \;\; (0, R).$$

Portanto, o operador inclusão $i : X_R \hookrightarrow L_\kappa^q$ pode ser expressado pela composição $i = H_{\mathrm{R}} \circ T$, onde $T : X_R \to L_\alpha^p$ é o oposto do operador diferenciação, isto é, $Tu = -u'$, o qual é claramente contínuo. Logo, $i : X_R \hookrightarrow L_\kappa^q$ é compacto para $q \in (1, p^*)$. ■

2.3.1.2 Caso Trudinger-Moser

Neste seção vamos provar algumas estimativas do tipo Sobolev para o *caso Trudinger-Moser*.

Teorema 2.3.2 (Estimativas para $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, $\alpha-p+1=0$)**.** *Sejam $R>0$, $\kappa\geq 0$, $\alpha>0$ e $p>1$ números reais. Suponha que $\alpha-p+1=0$. Então, existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q_\kappa}\leq C\|u'\|_{L^p_\alpha}, \tag{2.27}$$

para todo $u\in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e $q\in(1,\infty)$.

Prova: Seja $u\in AC_{\mathrm{R}}(0,R)\cap X_R$. Como no Teorema 2.3.1, vamos analisar os valores B_{R} e A_{R} com $a=0$, $b=R$, $w=\omega_\kappa r^\kappa$, $v=\omega_\alpha r^\alpha$.

Para $\alpha-p+1=0$, um cálculo direto fornece

$$F_{\mathrm{R}}(r)=K_2\left(r^{\frac{p'(\kappa+1)}{q}}\ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}},\quad 1<p\leq q<\infty, \tag{2.28}$$

onde K_2 é uma constante positiva. Por outro lado, para $1<q<p<\infty$,

$$A_{\mathrm{R}}=K_3\left\{\int_0^R\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}r^{\frac{(\kappa+1)p}{p-q}-1}\,\mathrm{d}r\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

onde K_3 é uma constante que depende de α,p,κ e q. Fazendo a mudança $s=\ln\frac{R}{r}$ obtemos

$$A_{\mathrm{R}}=K_3R^{\frac{\kappa+1}{q}}\left\{\int_0^\infty s^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\mathrm{e}^{-\frac{(\kappa+1)p}{p-q}s}\,\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Finalmente, fazendo

$$\tau=\frac{(\kappa+1)p}{p-q}s,$$

segue-se

$$A_{\mathrm{R}}=\tilde{K_3}\left\{\int_0^\infty\tau^{\frac{(p-1)q}{p-q}-1}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=\tilde{K_3}\left\{\Gamma\left(\frac{(p-1)q}{p-q}\right)\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \tag{2.29}$$

onde $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, $x>0$ é a função gamma de Euler e $\tilde{K_3}$ é uma constante que depende apenas de α,p,κ, q e R.

Agora, seja $q\in(1,\infty)$. Se $q\in[p,\infty)$ segue de (2.28) que $B_{\mathrm{R}}=\sup_{0<r<R}F_{\mathrm{R}}(r)$ finito e vale (2.27). Além disso, se $q\in(1,p)$, segue de (2.29) que A_{R} é finito e vale (2.27). ■

Corolário 2.3.3. *Sejam $R>0$ e $\kappa\geq 0$ números reais. Suponha que $\alpha-p+1=0$. Então, a inclusão $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)\hookrightarrow L^q_\kappa$ é compacta para $q\in(1,\infty)$.*

Prova: Pelo Lema 2.3.1, a norma $\|\cdot\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,L_\alpha^p}$. Logo, segue do Teorema 2.3.2 que vale a inclusão $i : X_R \hookrightarrow L_\kappa^q$. Vamos verificar que esta inclusão é compacta. Definimos o operador $H_{\mathrm{R}} : L_\alpha^p \to L_\kappa^q$ por

$$(H_{\mathrm{R}}u)(r) = \int_r^R u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Argumentando como no Corolário 2.3.2 é suficiente verificar que H_{R} é compacto para $q \in (1,\infty)$. No entanto, visto que por (2.28) temos B_{R} finito e $\lim_{r\to 0} F_{\mathrm{R}}(r) = \lim_{r\to R} F_{\mathrm{R}}(r) = 0$ segue que H_{R} compacto para $q \in [p,\infty)$. Ainda, por (2.29) temos A_{R} finito e, assim, H_{R} é compacto também para $q \in (1,p)$. ■

2.3.2 Inclusões do tipo Sobolev $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$

Nesta seção iremos estabelecer algumas desigualdades de Sobolev para $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)$. Como na seção anterior, a análise da inclusão do tipo

$$X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$$

será realizada por meio do estudo dos valores A_{R} e B_{R} para $a = 0$, $b = \infty$, $w = \omega_\kappa r^\kappa$, $v = \omega_\alpha r^\alpha$. Para estes dados é fácil verificar que $A_{\mathrm{R}} = \infty$. Assim, vamos considerar apenas o caso $1 < p \le q < \infty$.

Lema 2.3.2. *Suponha $\alpha - p + 1 > 0$ e $\kappa \ge \alpha - p$. Então $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\kappa^q$ continuamente, com $q = p^*(\alpha,p,\kappa)$.*

Prova: Note que a condição $\kappa \ge \alpha - p$ implica que $p \le p^*$. Para $a = 0$, $b = \infty$, $w = \omega_\kappa r^\kappa$, $v = \omega_\alpha r^\alpha$ um cálculo direto fornece

$$F_{\mathrm{R}}(r) = K r^{\frac{\kappa+1}{q} + \frac{p-\alpha-1}{p}}, \quad r \in (0,\infty),$$

com K dependendo apenas de α, p, κ e q. Segue-se que

$$B_{\mathrm{R}} = \sup_{0<r<\infty} F_{\mathrm{R}}(r)$$

é finito se, e somente se, $q = p^*(\alpha,p,\kappa)$. Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L_\kappa^{p^*}} \le C\|u'\|_{L_\alpha^p} \le C\|u\|_{W_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)}, \quad \forall\, u \in X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta).$$

■

Teorema 2.3.3 (Estimativa $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)$, $\alpha - p + 1 > 0$)**.** *Suponha $\alpha - p + 1 > 0$ e $\theta \ge \alpha - p$. Então a inclusão*

$$X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^q$$

é contínua para todo $p \le q \le p^*(\alpha,p,\theta)$.

Prova: É claro que $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^p$. Ainda, pelo Lema 2.3.2, temos $X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^{p^*}$. Logo, dado $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)$ temos $u \in L_\theta^p \cap L_\theta^{p^*}$. Assim, dado $p \le q \le p^*$, escolha $0 \le \tau \le 1$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\tau}{p} + \frac{1-\tau}{p^*}.$$

Usando o Lema 2.3.2 novamente e a desigualdade de Hölder temos

$$\|u\|_{L_\theta^q} \le \|u\|_{L_\theta^p}^{\tau} \|u\|_{L_\theta^{p^*}}^{1-\tau} \le C\|u\|_{W_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)}^{\tau+1-\tau} = C\|u\|_{W_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)}.$$

■

2.4 O espaço dual de $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

Nesta seção daremos uma caracterização para o espaço dual de $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$.

A proposição seguinte é um resultado clássico na teoria de medida e integração e é válida para medidas mais gerais do que λ_θ; veja por exemplo [11]. A prova que iremos apresentar aqui segue as linhas daquela em [14] e exporemos apenas por completude e para fixar a notação que usaremos nos resultados posteriores.

Se X é um espaço vetorial normado, denotamos por X^* o espaço dual de X.

Proposição 2.4.1 (Representação de Riesz). *Sejam $1 < p < \infty$, $\theta \ge 0$ e $f \in (L_\theta^p)^*$. Então existe uma única função $v \in L_\theta^{p'}$ tal que*

$$f(u) = \int_0^R uv \,\mathrm{d}\lambda_\theta$$

e além disso,

$$\|f\|_{(L_\theta^p)^*} = \|v\|_{L_\theta^{p'}}.$$

Prova: Considere operador $T : L_\theta^{p'} \to (L_\theta^p)^*$ que associa a cada $v \in L_\theta^{p'}$ o funcional $T_v : L_\theta^p \to \mathbb{R}$ definido por

$$T_v u = \int_0^R uv \,\mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$|T_v u| \le \|u\|_{L_\theta^p} \|v\|_{L_\theta^{p'}},\ \forall u \in L_\theta^p.$$

Segue que $T_v \in (L_\theta^p)^*$ com

$$\|T_v\|_{(L_\theta^p)^*} \le \|v\|_{L_\theta^{p'}}.$$

Por outro lado, para cada $v \in L_\theta^{p'}$ escolhendo $u_0 \in L_\theta^p$ definido por

$$u_0(r) = \begin{cases} v(r)^{p'-2} v(r), & \text{se} \quad v(r) \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad v(r) = 0. \end{cases}$$

Segue que

$$\|T_v\|_{(L^p_\theta)^*} \geq \frac{|T_v u_0|}{\|u_0\|_{L^p_\theta}} = \|v\|_{L^{p'}_\theta}.$$

Portanto,

$$\|T_v\|_{(L^p_\theta)^*} = \|v\|_{L^{p'}_\theta}, \quad \forall\, v \in L^{p'}_\theta.$$

Resta verificar que o operador T é sobrejetivo. Para isso, seja $E = T(L^{p'}_\theta)$. Sendo $L^{p'}_\theta$ completo é suficiente provar que o subespaço fechado E é denso em $(L^p_\theta)^*$. Pelo Teorema de Hahn-Banach E é denso desde que o único funcional $g \in (L^p_\theta)^{**}$ tal que $g(E) = 0$ seja o funcional identicamente nulo. Assim, seja $g \in (L^p_\theta)^{**}$ tal que

$$g(T_v) = 0, \quad \forall\, v \in L^{p'}_\theta.$$

A reflexibilidade de L^p_θ implica que $g(T_v) = T_v(u_g)$ para algum $u_g \in L^p_\theta$. Portanto,

$$\int_0^R u_g v \,\mathrm{d}\lambda_\theta = g(T_v) = 0, \quad \forall\, v \in L^{p'}_\theta.$$

Escolhendo $v = u_g^{p-2} u_g$ na igualdade acima vemos que $u_g = 0$ e, portanto $g \equiv 0$. ■

O espaço dual de $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ será denotado por $X^{-1,p'}_R(\alpha,\theta)$. Argumentando ainda como em [14], provaremos o seguinte:

Teorema 2.4.1. *Seja $f \in X^{-1,p'}_R(\alpha,\theta)$. Então existem $w_0 \in L^{p'}_\theta$ e $w_1 \in L^{p'}_\alpha$ tais que*

$$f(u) = \int_0^R u w_0 \,\mathrm{d}\lambda_\theta + \int_0^R u' w_1 \,\mathrm{d}\lambda_\alpha, \quad \forall\, u \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta) \tag{2.30}$$

e

$$\|f\|_{X^{-1,p'}_R(\alpha,\theta)} = (\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p'}}.$$

Além disso, quando $R < \infty$ e $\theta \geq \alpha - p$, podemos tomar $w_0 = 0$.

Prova: Considere $Z = L^p_\theta \times L^p_\alpha$ equipado com a norma

$$\|(u,v)\|_Z = \left(\|u\|^p_{L^p_\theta} + \|v\|^p_{L^p_\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$$

e a isometria linear $T : X^{1,p}_R(\alpha,\theta) \to Z$ dada por $Tu = (u, u')$. Seja $Y = T(X_R) \subset Z$ equipado com a norma de Z e defina o funcional linear $g : Y \to \mathbb{R}$ por

$$g(Tu) = f(u), \quad \forall\, u \in X_R. \tag{2.31}$$

Temos $g \in Y^*$ e ainda

$$\|g\|_{Y^*} = \sup_{\|Tu\|_Z = 1} |g(Tu)| = \sup_{\|u\|_{W^{1,p}_R(\alpha,\theta)} = 1} |f(u)| = \|f\|_{X^{-1,p'}_R(\alpha,\theta)},$$

pois T é uma isometria. Pelo teorema de Hahn-Banach podemos tomar $G \in Z^*$ tal que

$$G(w) = g(w), \quad \forall w \in Y \quad \text{e} \quad \|G\|_{Z^*} = \|f\|_{X_R^{-1,p'}(\alpha,\theta)}. \tag{2.32}$$

Considere $i_1 : L^p_\theta \to Z$ e $i_2 : L^p_\alpha \to Z$ definidos por

$$i_1(u) = (u,0) \quad \text{e} \quad i_2(v) = (0,v).$$

Agora, sejam $P_1 \in (L^p_\theta)^*$ e $P_2 \in (L^p_\alpha)^*$ definido por $P_1 = G \circ i_1$ e $P_2 = G \circ i_2$. Pelo teorema de representação de Riesz podemos tomar $w_0 \in L^{p'}_\theta$ e $w_1 \in L^{p'}_\alpha$ tais que

$$P_1(u) = \int_0^R uw_0 \, \mathrm{d}\lambda_\theta \quad \text{e} \quad P_2(u) = \int_0^R uw_1 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha.$$

Note que, dado $z = (u,v) \in Z$ temos $G(z) = P_1(u) + P_2(v)$. Isto é,

$$G(u,v) = \int_0^R uw_0 \, \mathrm{d}\lambda_\theta + \int_0^R vw_1 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha.$$

Em particular, usando (2.31) e (2.32), dado $u \in X_R$ temos

$$f(u) = G(Tu) = P_1(u) + P_2(u') = \int_0^R uv_0 \, \mathrm{d}\lambda_\theta + \int_0^R u'v_1 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha$$

o que dá a fórmula de representação (2.30). Além disso, pela desigualdade de Hölder

$$|G(u,v)| \leq \|u\|_{L^p_\theta} \|w_0\|_{L^{p'}_\theta} + \|v\|_{L^p_\alpha} \|w_1|_{L^{p'}_\alpha} \leq \|(u,v)\|_Z \, (\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p'}},$$

para todo $(u,v) \in Z$, donde

$$\|G\|_{Z^*} \leq (\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p'}}.$$

Por outro lado, seja $z = (u_0,u_1) \in Z$ onde, para $j = 0,1$

$$u_j(r) = \begin{cases} w_j(r)^{p'-2} w_j(r), & \text{se} \quad w_j(r) \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad w_j(r) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\|u_0\|^p_{L^p_\theta} = \|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} \quad \text{e} \quad \|u_1\|^p_{L^p_\alpha} = \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha}.$$

Portanto,

$$\frac{|G(u_0,u_1)|}{\|(u_0,u_1)\|_Z} = \frac{\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha}}{(\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p}}} = (\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p'}}.$$

Segue que

$$\|G\|_{Z^*} = (\|w_0\|^{p'}_{L^{p'}_\theta} + \|w_1\|^{p'}_{L^{p'}_\alpha})^{\frac{1}{p'}}$$

e usando (2.32) o mesmo vale para $\|f\|_{X_R^{-1,p'}(\alpha,\theta)}$.

Se $0 < R < \infty$ e $\theta \geq \alpha - p$, temos pelo Lema 2.3.1 que a norma $\|\cdot\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$ sobre o espaço $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Considerando $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ equipado com a norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$ e aplicando o argumento anterior com $Z = L^p_\alpha$ e $T : X_R^{1,p} \to Z$ dada por $Tu = u'$, obtemos o resultado com $w_0 = 0$. ■

CAPÍTULO 3

Desigualdades do tipo Trudinger-Moser para os espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

O objetivo deste capítulo é fornecer algumas desigualdades do tipo Trudinger-Moser para a classe de espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Estas desigualdades generalizam os resultados clássicos permitindo incluir dimensões fracionárias. Além disso, analisamos a optimalidade das desigualdades obtidas exibindo suas constantes ótimas.

3.1 Introdução

Considere $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ um domínio com fronteira regular e seja $W^{1,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev munido com a norma $\|u\|_{1,p}^p=\|\nabla u\|_p^p+\|u\|_p^p$, onde $\|\cdot\|_p$ representa a norma padrão dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p\geq 1$. Seja $W_0^{1,p}(\Omega)\subset W^{1,p}(\Omega)$ o completamento do espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|u\|_{1,p}$, onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções de classe C^∞ e com suporte compacto contido em Ω. Como observado no Capítulo 1; para $1\leq p<n$, as desigualdades clássicas de Sobolev garantem as inclusões contínuas $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ desde que $p\leq q\leq p^*:=np/(n-p)$. No caso limite $p=n$ temos $W_0^{1,n}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $p\leq q<\infty$; porém, um exemplo simples mostra que $W_0^{1,n}(\Omega)\not\subset L^\infty(\Omega)$. Se Ω é limitado, a norma $\|u\|_{1,p}$ é equivalente à norma de Dirichlet $\|\nabla u\|_p$; neste caso, trocando os espaços de Lebesgue pelos espaços de Orlicz, N. Trudinger provou que $W_0^{1,n}(\Omega)\hookrightarrow L_\phi(\Omega)$ continuamente, onde o espaço de Orlicz $L_\phi(\Omega)$ é determinado pela função $\phi(t)=\mathrm{e}^{\mu|t|^{n/(n-1)}}-1$. Mais precisamente, N. Trudinger mostrou que $\|u\|_\phi\leq C\|u\|_{1,n}$ para todo $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$, onde $\|\cdot\|_\phi$ denota a norma de Luxemburgo definida como o ínfimo do conjunto dos valores $k>0$ tais que $\int_\Omega\phi\left(|u|/k\right)\mathrm{d}x\leq 1$. Em particular, existe $\mu>0$ tal que $\int_\Omega\phi(\mu|u|)\,\mathrm{d}x\leq 1$ para todo $u\in W_0^{1,n}(\Omega)$ com $\|\nabla u\|_n\leq 1$. Este resultado foi aprimorado por J. Moser que encontrou a melhor constante μ provando o seguinte: Para qualquer $\mu>0$ e $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos $\exp(\mu|u|^{\frac{n}{n-1}})\in L^1(\Omega)$. Além disso,

$$\sup_{u\in W_0^{1,n}(\Omega):\,\|\nabla u\|_n\leq 1}\int_\Omega \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,\mathrm{d}x\quad\begin{cases}\leq C(\mu,n)|\Omega| & \text{se}\quad \mu\leq\mu_n\\ =\infty & \text{se}\quad \mu>\mu_n,\end{cases}\tag{3.1}$$

onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}^n$ e

$$\mu_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}},\quad \omega_{n-1}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Estimativas da forma (3.1) são conhecidas como *Desigualdades do tipo Trudinger-Moser* e constituem um tema de pesquisa atual. Indicamos [25, 26, 53] e suas referências, para o leitor interessado em um aprofundamento nesse tema.

Existem várias extensões para a desigualdade em (3.1). Em particular, Adimurthi e Sandeep [5] provaram uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado com fronteira regular, com $0 \in \Omega$ e $\sigma \in [0, n)$. Então,

$$\int_\Omega \frac{\mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^\sigma}\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \forall\, u \in W_0^{1,n}(\Omega) \quad \text{e} \quad \mu > 0. \tag{3.2}$$

Além disso,

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \le 1} \int_\Omega \frac{\mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}}{|x|^\sigma}\,\mathrm{d}x \le C(n,\sigma)|\Omega| \quad \text{se, e só se,} \quad \frac{\mu}{\mu_n} + \frac{\sigma}{n} \le 1. \tag{3.3}$$

As formulações para os supremos em (3.1) e (3.3) não são aplicáveis se a medida de Lebesque $|\Omega|$ for infinita; portanto, na formulação (3.1), a desigualdade de Trudinger-Moser não pode ser abordada para domínios ilimitados. No entanto, no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$, Cao [15] para $n = 2$ e J. M. do Ó [30], para $n \ge 2$, provaram que $A_n(\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $\mu > 0$ e $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, onde

$$A_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{x^j}{j!}.$$

Além disso, se $\mu < \mu_n$ e $\|u\|_n \le M$, existe uma constante $C(n,M,\mu) > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_n \le 1} \int_{\mathbb{R}^n} A_n(\mu|u|^{\frac{n}{n-1}})\mathrm{d}x \le C(n,M,\mu).$$

Mais recentemente, S. Adachi e K. Tanaka [1] provaram a seguinte versão invariante por escalar da desigualdade de Trudinger-Moser: dado $\mu \in (0, \mu_n)$ existe uma constante $C(n,\mu)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_n\left(\mu\left(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)\mathrm{d}x \le C(n,\mu)\frac{\|u\|_n^n}{\|\nabla u\|_n^n}, \quad \forall\, u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}.$$

O objetivo deste capítulo é estender esses resultados para os espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ permitindo considerar dimensões fracionárias.

Ressaltamos que nossos resultados podem ser aplicados para o estudo, via métodos variacionais, da família de problemas elípticos quasilineares

$$\begin{cases} Lu + f(u) = 0 & \text{em} \quad (0,R), \\ u > 0 & \text{em} \quad (0,R), \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

onde $Lu = -r^{-\theta}(r^\alpha|u'|^\beta u')'$, com $\beta,\theta \ge 0$ e $\alpha - \beta - 1 = 0$ e a função $f(s)$ tem crescimento crítico exponencial.

3.2 A integral indefinida de uma função em $L^p(0,\infty)$

Nesta seção vamos fornecer uma estimativa uniforme para integrais indefinidas de funções em um subconjunto limitado $K_\delta \subset L^p(0,\infty)$. Inicialmente, vamos fixar algumas notações. Para cada $\delta > 0$ e $p \geq 2$, definimos K_δ por

$$K_\delta = \left\{ \psi \in L^p(0,\infty);\ \int_0^\infty |\psi|^p \mathrm{d}s \leq \delta \right\}.$$

Agora, para cada $c > 0$ fixado, denotamos $L(c,\delta)$ por

$$L(c,\delta) = \sup_{\psi \in K_\delta} \int_0^\infty \exp\left(c \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s - t \right) \mathrm{d}t.$$

Sejam $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ x > 0$ a função gamma de Euler e $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ a função digama. As seguintes propriedades a respeito destas funções especiais podem ser encontradas em [3, Theorem 1.2.5]:

$$\Psi(1) = -\gamma, \quad \Psi(x) - \Psi(1) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k} \right) \quad \text{e} \quad \Psi'(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(x+k)^2} \tag{3.4}$$

onde

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - \log k \right)$$

é a constante de Euler. Com esta notação temos o seguinte resultado

Lema 3.2.1. *Para cada $c > 0$ e $\delta > 0$ o supremo $L(c,\delta)$ satisfaz:*

(a) $L(c,\delta)$ é finito.

(b) $L(c,\delta)$ é atingido por uma função $\psi \in K_\delta \cap C^1$ com $\psi \geq 0$ e $\psi \not\equiv 0$

(c) $L(c,\delta) \leq \exp\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \frac{c^p\delta}{p} + \Psi(p) + \gamma \right)$.

Prova: (a) Pela definição de $L(c,\delta)$, podemos trocar ψ por $|\psi|$ sem diminuir a integral. Assim, vamos supor que $\psi \geq 0$. Fixado $\psi \in K_\delta$ e $A \geq 0$, para cada $t \geq A$ a desigualdade de Hölder fornece

$$\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \leq \delta^{\frac{1}{p}} A^{\frac{p-1}{p}} + \delta^{\frac{1}{p}} (t-A)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Note

$$\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \leq \delta^{\frac{1}{p}} t^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{p}} = 0.$$

Logo, escolhendo $N \geq 2^p c^p \delta + A$ podemos escrever

$$c\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \leq c\delta^{\frac{1}{p}} A^{\frac{p-1}{p}} + \frac{t-A}{2}, \quad \text{para todo} \quad t \geq N.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\int_N^\infty e^{c\int_0^t \psi(s)ds - t} dt \le 2e^{c\delta^{\frac{1}{p}} A^{\frac{p-1}{p}} - \frac{A}{2}} e^{-\frac{N}{2}} \le \varepsilon, \quad \forall\, \psi \in K_\delta, \tag{3.5}$$

desde que escolhamos

$$N \ge \max\{2^p c^p \delta + A, -2\log\frac{\varepsilon}{2} - A + 2c\delta^{\frac{1}{p}} A^{\frac{p-1}{p}}\}.$$

Por outro lado, para qualquer $\psi \in K_\delta$ a desigualdade de Hölder fornece

$$\int_0^t \psi(s)ds \le \delta^{\frac{1}{p}} N^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{se} \quad t \le N.$$

Portanto, combinando isto com (3.5) concluímos que $L(c,\delta)$ é finito.

(b) Para cada $\psi \in K_\delta$, denotaremos

$$I(\psi) = \int_0^\infty \exp\left(c\int_0^t \psi(s)ds - t\right) dt \quad \text{e} \quad I_N(\psi) = \int_0^N \exp\left(c\int_0^t \psi(s)ds - t\right) dt.$$

Seja $(\psi_j) \subset K_\delta$ uma sequência maximizante, isto é, $I(\psi_j)$ converge para $L(c,\delta)$. Em particular, (ψ_j) é limitada em $L^p(0,\infty)$, e por reflexibilidade, a menos de um refinamento para subsequência, temos $\psi_j \rightharpoonup \psi_0$ em $L^p(0,\infty)$. Além disso, a semicontinuidade inferior da norma na topologia fraca garante $\psi_0 \in K_\delta$. Sendo assim, para cada $N > 0$ temos

$$\psi_j|_{[0,N]} \rightharpoonup \psi_0|_{[0,N]} \quad \text{em} \quad L^p[0,N].$$

Assim, a caracterização da convergência fraca em $L^p[0,N]$ (veja [58, Theorem 11]) nos fornece

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^t \psi_j(s)ds = \int_0^t \psi_0(s)ds, \ \forall\, t \in\ [0,N].$$

Relembramos que

$$\int_0^t \psi_j(s)ds \le \delta^{\frac{1}{p}} N^{\frac{p-1}{p}} \text{ em } [0,N].$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos N satisfazendo (3.5) e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{j\to\infty} I_N(\psi_j) = I_N(\psi_0) \ge I_N(\psi_j) - \varepsilon,$$

para j grande o suficiente. Isto em conjunto com (3.5) implica em

$$I(\psi_0) \ge I_N(\psi_0) \ge I_N(\psi_j) - \varepsilon \ge I(\psi_j) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $j \to \infty$, obtemos

$$I(\psi_0) \ge L(c,\delta) - 2\varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ tomado arbitrário, temos

$$I(\psi_0) = L(c,\delta).$$

Para verificar que $\psi_0 \not\equiv 0$ é suficiente mostrar que $I(\psi_0) > 1$, pois $I(0) = 1$. Para isso, dado $\varepsilon > 0$, defina $\psi_\varepsilon : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\psi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{p}}, & 0 < s \leq 1 \\ \left(\varepsilon - \dfrac{\varepsilon^2}{2(\delta-\varepsilon)}(s-1)\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq s \leq 1 + \dfrac{2(\delta-\varepsilon)}{\varepsilon} \\ 0, & s \geq 1 + \dfrac{2(\delta-\varepsilon)}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Temos $\int_0^\infty |\psi_\varepsilon|^p \, \mathrm{d}t = \delta$ para qualquer $\varepsilon > 0$ e, portanto $\psi_\varepsilon \in K_\delta$. Agora, dado $c > 0$, escolha $\varepsilon > 0$ tal que $c\varepsilon^{1/p} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} I(\psi_0) = L(c,\delta) \geq I(\psi_\varepsilon) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s - t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s - t}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_1^\infty \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s - t}\,\mathrm{d}t \\ &> 1. \end{aligned}$$

Resta verificar que ψ_0 pode ser escolhida de classe C^1. Para isso, note que

$$L(c,\delta) = \sup_{\psi \in S_\delta} \int_0^\infty \exp\left(c\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s - t\right)\mathrm{d}t$$

onde

$$S_\delta = \left\{\psi \in L^p[0,\infty) \; ; \; \int_0^\infty |\psi(t)|^p \,\mathrm{d}t = \delta\right\}.$$

Pelo teorema de multiplicadores de Lagrange, existe uma constante $\rho > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_0(s)\,\mathrm{d}s - t}\left(\int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \rho\int_0^\infty |\psi_0(t)|^{p-2}\psi_0(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \;\; \forall\, \varphi \in L^p(0,\infty).$$

Em particular,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_0(s)\,\mathrm{d}s - t} h(t)\,\mathrm{d}t = \rho\int_0^\infty |\psi_0(t)|^{p-2}\psi_0(t)h'(t)\,\mathrm{d}t, \;\; \forall\, h \in C_0^1(0,\infty). \tag{3.7}$$

Um vez que $\mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_0(s)\,\mathrm{d}s - t}$ é uma função contínua, sua integral indefinida $F(t)$ é de classe C^1 em $(0,\infty)$ e satisfaz

$$F'(t) = \mathrm{e}^{c\int_0^t \psi_0(s)\,\mathrm{d}s - t}. \tag{3.8}$$

Assim, por (3.7) concluímos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(F(t)+\rho|\psi_0(t)|^{p-2}\psi_0(t)\right)h'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left(F(t)h'(t)+F'(t)h(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F(t)h(t)\right)\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

pois $h\in C_0^1(0,\infty)$. Portanto, pelo lema de Dubois-Reymond, podemos escrever

$$F+\rho|\psi_0|^{p-2}\psi_0=C \text{ q.t.p em } (0,\infty). \tag{3.9}$$

Assim, a função $\varphi=C-F$ é de classe C^1 e satisfaz $\varphi=\rho|\psi_0|^{p-2}\psi_0$ q.t.p em $(0,\infty)$. Note ainda que φ é estritamente decrescente, visto que $\varphi'=-F'<0$ em $(0,\infty)$. Ainda, $\psi_0\geq 0$ implica $\varphi\geq 0$ q.t.p em $(0,\infty)$. Afirmamos que $\varphi>0$ em $(0,\infty)$. De fato, se $\varphi(t_0)=0$ para algum $t_0>0$ então $\varphi(t)=\int_{t_0}^t\varphi'(s)\,\mathrm{d}s<0$ para qualquer $t>t_0$ o que contradiz $\varphi\geq 0$ q.t.p em $(0,\infty)$. Logo, $\varphi>0$ e $\psi(t)=(\varphi/\rho)^{\frac{1}{p-1}}(t)$ uma função de classe C^1 satisfazendo $\psi=\psi_0$ q.t.p em $(0,\infty)$ e $I(\psi)=I(\psi_0)$. Portanto, podemos tomar uma função $\psi\in C^1$ como extremal de $L(c,\delta)$.

(c) Usando a expressão para $\varphi'=-F'$ em (3.8) e a equação (3.9) vemos que ψ satisfaz

$$\mathrm{e}^{c\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s-t}=\lambda_0\psi'(t)(\psi(t))^{p-2}$$

para alguma constante λ_0. Fazendo $v(t)=c\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s-t$, a equação acima pode ser escrita como

$$\mathrm{e}^{v(t)}=\lambda v''(t)\left(1+v'(t)\right)^{p-2} \tag{3.10}$$

onde $\lambda=\lambda_0c^{1-p}$. Além disso, v satisfaz

$$\int_0^\infty(1+v'(t))^p\mathrm{d}t=c^p\delta,\quad v(0)=0,\quad v'(\infty)=-1\quad \text{e}\quad v(\infty)=-\infty. \tag{3.11}$$

Usando integração por partes segue por (3.10)

$$\mathrm{e}^{v(t)}=\frac{\lambda}{p}\left(1+v'(t)\right)^p-\frac{\lambda}{p-1}\left(1+v'(t)\right)^{p-1}+C. \tag{3.12}$$

Por (3.11), fazendo $t\to\infty$ obtemos $C=0$. Portanto, combinando a equação acima com (3.10), segue

$$v''(t)=\frac{1}{p}\left(1+v'(t)\right)^2-\frac{1}{p-1}\left(1+v'(t)\right).$$

Integrando temos

$$1+v'(t)=\frac{p}{p-1}\left(1+B\mathrm{e}^{\frac{t}{p-1}}\right)^{-1}, \tag{3.13}$$

onde $B\geq 0$ é escolhido tal que

$$c^p\delta=\int_0^\infty(1+v'(t))^p\mathrm{d}t. \tag{3.14}$$

Combinando (3.13) e (3.14); e fazendo a mudança de variável $u = 1 + B\mathrm{e}^{\frac{t}{p-1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} c^p\delta &= (\frac{p}{p-1})^p(p-1)\int_{B+1}^{\infty}\frac{1}{(u-1)u^p}\mathrm{d}u = (\frac{p}{p-1})^p(p-1)\sum_{k=1}\frac{1}{(k+p-1)(B+1)^{k+p-1}} \\ &\geq (\frac{p}{p-1})^p(p-1)\left[\log(1+1/B)-(\Psi(p)+\gamma)\right], \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde, nesta última estimativa, usamos as propriedades da função digama destacadas em (3.4). Por outro lado, fazendo $t = 0$ em (3.12), usando (3.11) e (3.13), podemos escrever

$$1 = \frac{\lambda}{p}\left(\frac{p}{p-1}\cdot\frac{1}{1+B}\right)^p - \frac{\lambda}{p-1}\left(\frac{p}{p-1}\cdot\frac{1}{1+B}\right)^{p-1}. \tag{3.16}$$

Levando em conta (3.11), (3.13) e integrando em (3.10) segue

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{v(t)}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{p-1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1+v'(t)\right)^{p-1}\mathrm{d}t = -\frac{\lambda}{p-1}\left(\frac{p}{p-1}\cdot\frac{1}{1+B}\right)^{p-1},$$

a qual junto com (3.15) e (3.16) fornece a estimativa desejada. ■

A seguinte consequência do Lema 3.2.1 fornece uma estimativa que desempenhará um papel chave em nosso trabalho. Este resultado ainda será usado nos capítulos seguintes.

Corolário 3.2.1. *Sejam $p \geq 2$, $a > 0$ e $\delta > 0$ números reais. Para cada função w continuamente diferenciável por partes com $w \geq 0$ e $\int_a^{\infty}|w'|^p\mathrm{d}t \leq \delta$ temos*

$$\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{w^q(a)-a}\frac{1}{1-\delta^{\frac{1}{p-1}}}\exp\left(\left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\frac{c^p\gamma_p}{p}+\Psi(p)+\gamma\right),$$

onde $\gamma_p = \delta(1-\delta^{1/(p-1)})^{1-p}$, $c = qw^{q-1}(a)$ e q é o expoente conjugado de Hölder para p.

Prova: Seja w uma função como acima. Fazendo

$$x = t-a, \quad \psi(x) = w(x+a)-w(a)$$

claramente temos

$$w(t) = \psi(x)+w(a),\ \forall x \geq 0.$$

Para $1 < q \leq 2$ e $d \geq 0$, temos $(s+d)^q \leq d^q + qd^{q-1}s + |s|^q$ para $s \geq -d$. Assim, visto que $w \geq 0$, obtemos

$$w(t)^q = (\psi(x)+w(a))^q \leq w(a)^q + qw(a)^{q-1}\psi(x) + |\psi(x)|^q. \tag{3.17}$$

Uma vez que $\psi(0) = 0$ e $\int_0^{\infty}|\psi'|^p\mathrm{d}x \leq \delta$, a desigualdade de Hölder fornece $|\psi(x)|^q \leq \delta^{1/(p-1)}x$. Portanto, (3.17) implica em

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty}\mathrm{e}^{w^q(t)-t}\mathrm{d}t &\leq \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{w(a)^q+qw(a)^{q-1}\psi(x)+\delta^{\frac{1}{p-1}}x-(x+a)}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{w^q(a)-a}\frac{1}{1-\delta^{\frac{1}{p-1}}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{c\varphi(y)-y}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

onde $y = (1-\delta^{1/(p-1)})x$, $c = qw^{q-1}(a)$ e $\varphi(y) = \psi(x)$. Agora,

$$\int_0^\infty |\varphi'|^p \mathrm{dy} = \left(1-\delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^{1-p} \int_0^\infty |\psi'|^p \mathrm{d}x \le \gamma_p,$$

e o resultado segue do item (c) do Lema 3.2.1. ∎

3.3 Desigualdade de Trudinger-Moser para $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

Nesta seção vamos estabelecer uma generalização natural da estimativa de J. Moser (3.1) para os espaços de Sobolev $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ com $0<R<\infty$ e sob a condição $\alpha-p+1=0$. Neste caso, como vimos no Corolário 2.3.3, para todo $\kappa\ge 0$ e $q\in(1,\infty)$

$$X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^q_\kappa$$

compactamente. Além disso, quando $\alpha-p+1>0$ e $\min\{\kappa,\theta\}\ge\alpha-p$, foi estabelecido no Corolário 2.3.2 que

$$X_R^{1,p}(\alpha,\theta)\hookrightarrow L^q_\kappa, \quad 1<q\le p^* = \frac{(\kappa+1)p}{\alpha-p+1}$$

continuamente e (formalmente) $p^*\to\infty$ quando $\alpha-p+1\to 0$. Apesar destes fatos, para $\alpha-p+1=0$ e $0<R<\infty$, escolhendo

$$u(r) = \ln(\ln(\mathrm{e}R/r))$$

vemos que $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)\not\hookrightarrow L^\infty_\kappa$. No entanto, provaremos que

$$u\in X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \quad \text{implica} \quad \int_0^R \mathrm{e}^{|u|^{\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa<\infty.$$

Mais precisamente, provaremos a seguinte desigualdade do tipo Trudinger-Moser:

Teorema 3.3.1. *Sejam $\alpha\ge 1$, $p\ge 2$ e κ, $\theta\ge 0$ números reais. Suponha que $\alpha-p+1=0$, então $\exp(\mu|u|^{\frac{p}{p-1}})\in L^1_\kappa$ para quaisquer $u\in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e $\mu>0$. Além disso,*

$$\sup_{u\in X_R^{1,p}(\alpha,\theta):\|u\|_{1,L^p_\alpha}\le 1} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa \begin{cases} \le C(\alpha,\mu,\kappa)|B_R|_\kappa & \text{se} \quad \mu\le\mu_{\alpha,\kappa} \\ =\infty & \text{se} \quad \mu>\mu_{\alpha,\kappa}, \end{cases} \tag{3.18}$$

onde

$$\mu_{\alpha,\kappa} = (\kappa+1)\,\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \omega_\alpha = \frac{2\pi^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}. \tag{3.19}$$

Neste ponto, faremos algumas observações rápidas.

1. Considerando a desigualdade de Trudinger-Moser clássica (3.1) restrita ao subespaço das funções simétricas $W^{1,n}_{\mathrm{rad}}(\Omega)\subset W_0^{1,n}(\Omega)$, $\Omega=B_R\subset\mathbb{R}^n$, a desigualdade (3.18) estende esta em dois sentidos: primeiro a dimensão inteira $n\ge 2$ é trocada por um número real qualquer $p\ge 2$ e; segundo, a medida de Lebesgue $\mathrm{d}x$ é trocada por uma medida de Lebesgue ponderada $\mathrm{d}\lambda_\kappa$. Observe que, se $\kappa=n-1$, a medida $\mathrm{d}\lambda_{n-1}$ coincide com a medida de Lebesgue $\mathrm{d}x$ na forma radial.

2. Observe que em (3.18) não há restrições à medida $d\lambda_\theta$, $\theta \geq 0$ apesar de esta aparecer na definição dos espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Isto se deve a fato de que a norma $\|\cdot\|_{W_R^{1,p}(\alpha,\theta)}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$ quando $\alpha - p + 1 = 0$ e $\theta \geq 0$. Como veremos, no caso ilimitado $R = \infty$, essa liberdade não é permitida.

Na prova do Teorema 3.3.1, por um argumento de densidade, é suficiente considerar $u \in X_R \cap C^1(0,R]$. É claro que podemos supor $u \geq 0$. Agora, fazemos

$$r = R\mathrm{e}^{-\frac{t}{\kappa+1}} \quad \text{e} \quad w(t) = \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} (\kappa+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} u(r).$$

Usando $\alpha - p + 1 = 0$, é fácil verificar

$$\int_0^R |u'(r)|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t \tag{3.20}$$

e ainda

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa = |B_R|_\kappa \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}|w|^{\frac{p}{p-1}} - t} \mathrm{d}t. \tag{3.21}$$

Como consequência da redução (3.20)-(3.21) a prova do Teorema 3.3.1 reduz-se ao seguinte Lema.

Lema 3.3.1. *Considere $p \geq 2$ e $q = p/(p-1)$ o expoente conjugado de Hölder para p. Seja $\mathbb{K}$ o conjunto das funções $w \in C^1[0,\infty)$ tais que $w \geq 0$, $w(0) = 0$ e $\int_0^\infty |w'|^p \,\mathrm{d}t \leq 1$. Então, $\exp(\rho w^q(t) - t) \in L^1(0,\infty)$ para quaisquer $\rho > 0$ e $w \in \mathbb{K}$. Ademais,*

$$\sup_{w \in \mathbb{K}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\rho w^q(t) - t} \mathrm{d}t \quad \begin{cases} \leq c_1 & \text{se} \quad \rho \leq 1 \\ = \infty & \text{se} \quad \rho > 1, \end{cases} \tag{3.22}$$

onde c_1 depende apenas de p.

Prova: Inicialmente, iremos provar que para quaisquer $\rho > 0$ e $w \in \mathbb{K}$ temos

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\rho w^q(t) - t} \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.23}$$

Para isso, note que dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon)$ tal que $\int_T^\infty |w'|^p \mathrm{d}t < \varepsilon$. Assim, a desigualdade de Hölder fornece

$$w(t) \leq w(T) + \varepsilon^{\frac{1}{p}} (t-T)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{para todo} \quad t \geq T.$$

Segue que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{w(t)}{t^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Portanto, temos $\rho w^q(t) < t/2$, para t grande o suficiente, o que implica em (3.23). A seguir, vamos mostrar que (3.23) tem uma cota superior uniforme para $w \in \mathbb{K}$, desde que $\rho \leq 1$. Se $\rho < 1$ é bem simples. De fato, neste caso, para qualquer $w \in \mathbb{K}$ temos

$$w(t) = \int_0^t w'(s)\mathrm{d}s \leq \left(\int_0^t |w'(s)|^p \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}} \leq t^{\frac{1}{q}};$$

e, portanto,

$$\int_0^\infty e^{\rho w^q(t)-t}dt \le \int_0^\infty e^{(\rho-1)t}dt \le 1/(1-\rho).$$

Agora, suponha $\rho = 1$ e tome $w \in \mathbb{K}$. Iremos analisar dois casos:

Caso (a): $w^q(t) \le t - 2\ln^+ t$ para todo $t \in [1,\infty)$. Neste caso, temos

$$\int_0^\infty e^{w^q(t)-t}dt \le \int_0^\infty e^{-2\ln^+ t}dt \le 2.$$

Caso (b): Existe $a \in [1,\infty)$, menor número real, tal que $w^q(a) = a - 2\ln^+ a$. Aqui, fazemos

$$\delta = \int_a^\infty |w'(t)|^p dt.$$

Pelo Corolário 3.2.1, obtemos a desigualdade

$$\int_a^\infty e^{w^q(t)-t}dt \le \frac{1}{1-\delta^{\frac{1}{p-1}}} e^{K+\Psi(p)+\gamma}, \tag{3.24}$$

onde

$$K = w^q(a)\left[1 + \frac{1}{p-1}\frac{\delta}{(1-\delta^{\frac{1}{p-1}})^{p-1}}\right] - a.$$

Ainda, a desigualdade de Hölder fornece

$$w^q(a) \le \left(\int_0^a |w'(s)|^p ds\right)^{\frac{q}{p}} a \le (1-\delta)^{\frac{1}{p-1}} a.$$

o que implica

$$\delta \le 1 - \left(1 - \frac{2\ln^+ a}{a}\right)^{p-1} \le (p-1)\frac{2\ln^+ a}{a}, \tag{3.25}$$

pois $w^q(a) = a - 2\ln^+ a$ e $1 - t^d \le d(1-t)$, $t \ge 0$ para qualquer $d \ge 1$. Agora

$$K = a(1-\delta^{\frac{1}{p-1}})^{1-p} F(a),$$

onde

$$F(a) = \frac{\delta}{p-1} - \frac{\delta}{p-1}\frac{2\ln^+ a}{a} - \frac{2\ln^+ a}{a}\left(1-\delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

Uma vez que

$$1 - \left(1-\delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \le (p-1)\delta^{\frac{1}{p-1}},$$

a estimativa (3.25) fornece

$$F(a) \le \frac{2\ln^+ a}{a}\left[1 - \left(1-\delta^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} - \frac{\delta}{p-1}\right] \le (p-1)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{2\ln^+ a}{a}\right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Assim, concluímos

$$K \leq \frac{(p-1)^q}{(1-\delta^{\frac{1}{p-1}})^{p-1}} \cdot a \left(\frac{2\ln^+ a}{a} \right)^q. \tag{3.26}$$

Visto que $\mathrm{e} \ln a \leq a$ para $a > 0$, usando (3.25), obtemos $\delta \leq 1 - \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{p-1} := d_p$; donde

$$\frac{1}{1-\delta^{\frac{1}{p-1}}} \leq \frac{1}{1-d_p{}^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{3.27}$$

Agora note que a função $g(x) = x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^q$ é uniformemente limitada em $[1,\infty)$ por uma constante que depende apenas de p. Assim, combinando (3.24), (3.26) e (3.27), concluímos

$$\int_a^\infty \mathrm{e}^{w^q(t)-t} \mathrm{d}t \leq c_1.$$

Esta estimativa e a desigualdade

$$\int_0^a \mathrm{e}^{w^q(t)-t} \mathrm{d}t \leq 2$$

implicam que (3.23) é uniformemente limitada para $w \in \mathbb{K}$, quando $\rho \leq 1$.

Finalmente, vamos provar que $\mu_{\alpha,\kappa}$ no Teorema 3.3.1 é a melhor constante ou, equivalentemente, que $\rho = 1$ é a melhor constante no Lema 3.3.1. Para isso, consideramos as funções de J. Moser definidas por:

$$w_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{j^{\frac{1}{p}}} & \text{se} \quad 0 \leq t \leq j, \\ j^{\frac{1}{q}} & \text{se} \quad t \geq j. \end{cases}$$

É claro que $\int_0^\infty |w_j'|^p \mathrm{d}t = 1$. Além disso, se $\rho > 1$, temos

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\rho w_j^q(t)-t} \mathrm{d}t \geq \mathrm{e}^{(\rho-1)j} \to \infty, \quad \text{se} \quad j \to \infty.$$

■

Apontamos que, sob a hipótese mais forte $w' \geq 0$, o Lema 3.3.1 foi provado por J. Moser [54]. J. Moser dispunha desta hipótese na sua redução do tipo (3.20)-(3.21) devido ao uso da desigualdade de Pólya-Szegö, a qual garante que, se $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ então seu rearranjamento simétrico decrescente com respeito a medida de Lebesgue u^* ainda pertence a $W_0^{1,n}(B_R)$, com $|\Omega| = |B_R|$. Aqui, na presença de medidas de Lebesgue ponderadas do tipo $\mathrm{d}\lambda_\alpha$, $\alpha \geq 0$, não temos uma desigualdade de Pólya-Szegö para $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ que permita trocar $u \in X_R$ por sua simetrizada com respeito à medida $\mathrm{d}\lambda_\alpha$ e garantir a monotonicidade na redução. Assim, uma extensão do resultado de J. Moser foi necessária. Observamos ainda que a prova dada acima não segue as linhas daquela dada por J. Moser e, portanto, apresentamos uma nova prova do resultado clássico de J. Moser.

3.4 Desigualdade do tipo Trundiger-Moser na forma singular

Nesta seção estabeleceremos uma desigualdade de Trudinger-Moser para os espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, $0 < R < \infty$ na presença de um termo singular $1/r^{\sigma}$, $\sigma > 0$. Inicialmente, para cada $p \geq 2$ denotaremos $p' = p/(p-1)$. Como esta notação, temos

Teorema 3.4.1. *Sejam $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e $\theta \geq 0$ tais que $\alpha - p + 1 = 0$. Então, para qualquer $\mu > 0$ e $\sigma \in [0, \kappa+1)$, temos*

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{p'}} r^{-\sigma} \mathrm{d}\lambda_\kappa < \infty, \quad \forall\, u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta). \tag{3.28}$$

Além disso,

$$\sup_{u \in X_R : \|u\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{p'}} r^{-\sigma} \mathrm{d}\lambda_\kappa < \infty \tag{3.29}$$

se, e somente se, $\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{\sigma}{\kappa+1} \leq 1$.

Prova: Seja $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Um vez que $\int_0^R |u'|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $r_0 > 0$ pequeno o suficiente para que $\int_0^{r_0} |u'|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha < \varepsilon$. Dessa forma, se $0 < r \leq r_0$, a desigualdade de Hölder implica

$$|u(r)| \leq |u(r_0)| + (\varepsilon/\omega_\alpha)^{\frac{1}{p}} \left(\ln \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Segue que

$$\lim_{r\to 0} \frac{u(r)}{\left(\ln \frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}} = 0.$$

Portanto, se r_1 é pequeno o suficiente, temos

$$\mu|u|^{p'} \leq a(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}, \quad 0 < r \leq r_1, \tag{3.30}$$

onde a é escolhido tal que $0 < a < 1 - \frac{\sigma}{\kappa+1}$. Assim, temos

$$\kappa - \sigma - a(\kappa+1) + 1 = (\kappa+1)\left(1 - \frac{\sigma}{\kappa+1} - a\right) > 0.$$

Logo, segue de (3.30)

$$\int_0^{r_1} \mathrm{e}^{\mu|u|^{p'}} r^{-\sigma} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq \int_0^{r_1} \mathrm{e}^{a(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}} r^{-\sigma} \mathrm{d}\lambda_\kappa = R^{a(\kappa+1)} \int_0^{r_1} r^{-\sigma - a(\kappa+1)} \mathrm{d}\lambda_\kappa < \infty.$$

Uma vez que a integral em (3.28) é finita no compacto $[r_1, R]$, a conclusão (3.28) segue da estimativa acima.

Se $\sigma = 0$, a estimativa em (3.29) se reduz ao caso não-singular garantido pelo Teorema 3.3.1. Assim, podemos supor $\sigma > 0$. Inicialmente, se $\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{\sigma}{\kappa+1} < 1$, o resultado segue da desigualdade de Hölder. De fato, por meio do teorema do valor intermediário, escolha $s > 1$ tal que

$$\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{s\sigma}{\kappa+1} = 1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{\mu|u|^{p'}} r^{-\sigma} d\lambda_\kappa &\leq \left(\int_0^R e^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} d\lambda_\kappa\right)^{\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}} \left(\int_0^R r^{-\frac{\kappa+1}{s}} d\lambda_\kappa\right)^{\frac{s\sigma}{\kappa+1}} \\ &\leq C\left(\int_0^R e^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} d\lambda_\kappa\right)^{\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}},\end{aligned}$$

pois $\kappa - \frac{\kappa+1}{s} + 1 > 0$. Assim, (3.29) segue do Teorema 3.3.1.

Agora, suponha $\sigma \in (0, \kappa+1)$ e considere o caso crítico: $\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{\sigma}{\kappa+1} = 1$. Este caso será analisado por meio de uma mudança de variável adequada. Por simplicidade, denotamos $d = \frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}$ e daí $\frac{\sigma}{\kappa+1} = 1 - d$. Com esta notação (3.29) torna-se

$$\sup_{u \in X_R:\ \|u\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1} \int_0^R e^{d\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} r^{(d-1)(\kappa+1)} d\lambda_\kappa < \infty.$$

Seja $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Considere a mudança

$$r = t^{\frac{1}{d}} \quad \text{e} \quad v(t) = d^{\frac{1}{p'}} u(r). \tag{3.31}$$

Obviamente $\frac{1}{d}[\alpha - p(1-d) + 1 - d] = \alpha$, pois $\alpha - p + 1 = 0$. Logo,

$$\int_0^R |u'(r)| d\lambda_\alpha = \int_0^{R^d} |v'(t)|^p d\lambda_\alpha \tag{3.32}$$

e ainda

$$\int_0^R e^{d\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} r^{(d-1)(\kappa+1)} d\lambda_\kappa = \frac{1}{d}\int_0^{R^d} e^{\mu_{\alpha,\kappa}|v(t)|^{p'}} d\lambda_\kappa. \tag{3.33}$$

Por (3.32) e (3.33) segue

$$\sup_{u \in X_R:\|u\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1} \int_0^R e^{d\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} r^{(d-1)(\kappa+1)} d\lambda_\kappa \leq \frac{1}{d} \sup_{v \in X_{R^d}:\|v\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1} \int_0^{R^d} e^{\mu_{\alpha,\kappa}|v(t)|^{p'}} d\lambda_\kappa. \tag{3.34}$$

Portanto, (3.29) segue do Teorema 3.3.1 aplicado a $X_{R^d}^{1,p}(\alpha,\theta)$. Resta verificar que (3.29) não vale sob a condição $\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{\sigma}{\kappa+1} > 1$. Para isso, para cada $0 < l < R$ defina

$$u_l(r) = \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}} \begin{cases} \left(\ln \dfrac{R}{l}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se} \quad 0 \leq r \leq l, \\ \dfrac{\ln \frac{R}{r}}{\left(\ln \frac{R}{l}\right)^{\frac{1}{p}}} & \text{se} \quad l \leq r \leq R. \end{cases} \tag{3.35}$$

Para cada l, usando $\alpha - p + 1 = 0$, é fácil verificar que $\|u_l\|_{1,L^p_\alpha} = 1$. Além disso, pela definição $\mu_{\alpha,\kappa} = (\kappa+1)\omega_\alpha^{1/\alpha}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{\mu|u_l|^{p'}} r^{-\sigma} d\lambda_\kappa &\geq \int_0^l e^{\mu|u_l|^{p'}} r^{-\sigma} d\lambda_\kappa \\
&= e^{\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}(\kappa+1)\ln\frac{R}{l}} \int_0^l r^{-\sigma} d\lambda_\kappa \\
&= \omega_\kappa \left(\frac{R}{l}\right)^{(\kappa+1)\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}} \frac{l^{\kappa-\sigma+1}}{\kappa-\sigma+1} \\
&= \frac{R^{\frac{(\kappa+1)\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}}}{\kappa-\sigma+1} \frac{1}{l^{(\kappa+1)\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}}+\frac{\sigma}{\kappa+1}-1\right)}}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\kappa}} + \frac{\sigma}{\kappa+1} > 1$, obtemos

$$\limsup_{l\to 0} \int_0^R e^{\mu|u_l|^{p'}} r^{-\sigma} d\lambda_\kappa = \infty.$$

■

3.5 Forma invariante por escalar

Para cada $p \geq 2$, defina

$$A_p(x) = e^x - \sum_{m=0}^{\lfloor p \rfloor} \frac{x^m}{m!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

onde $\lfloor p \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que p.

Teorema 3.5.1. *Sejam $\alpha \geq 1$, $\theta \geq 0$ e $p = \alpha + 1$. Então, para qualquer $\mu \in (0, \mu_{\alpha,\theta})$, existe uma constante C que depende apenas de μ, p e θ tal que*

$$\int_0^\infty A_p\left(\mu\left(\frac{|u(r)|}{\|u'\|_{L^p_\alpha}}\right)^{p'}\right) d\lambda_\theta \leq C\left(\frac{\|u\|_{L^p_\theta}}{\|u'\|_{L^p_\alpha}}\right)^p, \ \forall\, u \in X^{1,p}_\infty(\alpha,\theta)\setminus\{0\}, \tag{3.36}$$

onde $p' = p/(p-1)$ é o expoente conjugado de Hölder para p.

Prova: Seja $u \in X_\infty$ de classe $C^1(0,\infty)$. Primeiro, usamos a mudança de variável

$$r(t) = e^{-\frac{t}{\theta+1}}, \quad w(t) = \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}}(\theta+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} u(r).$$

Então $w(t)$ está definida em $\mathbb{R}$ e satisfaz

$$\lim_{t\to-\infty} w(t) = 0. \tag{3.37}$$

Uma vez que $\alpha - p + 1 = 0$, é simples verificar

$$\int_0^\infty |u'(r)|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_{-\infty}^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t, \tag{3.38}$$

$$\int_0^\infty |u(r)|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta = \frac{\omega_\theta}{\omega_\alpha}(\theta+1)^{-p} \int_{-\infty}^\infty |w(t)|^p \,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{3.39}$$

e ainda

$$\int_0^\infty A_p\left(\mu|u(r)|^{p'}\right) \mathrm{d}\lambda_\theta = |B_1|_\theta \int_{-\infty}^\infty A_p\left(\frac{\mu}{\mu_{\alpha,\theta}}|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{3.40}$$

Dessa forma, para completar a prova do Teorema 3.5.1 é suficiente mostrar que, para cada $0 < \rho < 1$, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de ρ tal que

$$\int_{-\infty}^\infty A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \le C \int_{-\infty}^\infty |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \tag{3.41}$$

para toda $w \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição (3.37) e tal que

$$\int_{-\infty}^\infty |w'(t)|^p \mathrm{d}t = 1. \tag{3.42}$$

Considere os conjuntos

$$A = \{t \in \mathbb{R} : |w(t)| \le 1\} \quad \text{e} \quad B = \{t \in \mathbb{R} : |w(t)| > 1\}.$$

É claro que a A e B são disjuntos e $\mathbb{R} = A \cup B$. Assim, vamos dividir (3.41) em duas partes. Primeiro, note que (3.37) implica $A \neq \emptyset$. No entanto, existe $M > 0$ que só depende de p tal que $A_p(x) \le M x^{\lfloor p \rfloor}$ sempre que $0 \le x \le 1$. Assim, para $t \in A$ temos $|w(t)| \le 1$ e portanto

$$\int_A A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \le M \int_{-\infty}^\infty |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{3.43}$$

A análise para o conjunto B é mais delicada. Primeiro, note que B é um aberto em $\mathbb{R}$. Pela estrutura de abertos da reta, B se exprime de modo único como reunião enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Isto é, podemos escrever

$$B = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i, \quad I_i = (a_i, b_i) \quad \text{com} \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Uma vez que os intervalos $I_i = (a_i, b_i)$ são disjuntos, seus extremos não pertence ao conjunto B. Assim, $a_i \in A$ ou $a_i = -\infty$ e $b_i \in A$ ou $b_i = \infty$. Pela condição (3.37), temos $a_i \in A$ e daí $w(a_i) \le 1$. Logo, a desigualdade de Hölder e (3.42) implicam

$$|w(t)| \le 1 + \int_{a_i}^t |w'(s)|\mathrm{d}s \le 1 + (t - a_i)^{\frac{1}{p'}}, \quad t \in (a_i, b_i). \tag{3.44}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe C_ε tal que

$$1 + s^{\frac{1}{p'}} \le ((1+\varepsilon)s + C_\varepsilon)^{\frac{1}{p'}}, \quad \forall\, s \ge 0.$$

Portanto, (3.44) implica

$$|w(t)|^{p'} \leq (1+\varepsilon)(t-a_i)+C_\varepsilon, \quad t \in (a_i, b_i).$$

Sendo $0 < \rho < 1$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\rho(1+\varepsilon) < 1$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{a_i}^{b_i} A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &\leq \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(\rho|w(t)|^{p'}-t\right)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{a_i}^{b_i} \exp\{\rho(1+\varepsilon)(t-a_i)+\rho C_\varepsilon - t\} \\
&= \int_{a_i}^{b_i} \exp\{\rho(1+\varepsilon)-1)(t-a_i)+\rho C_\varepsilon - a_i\}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}}{1-(\rho(1+\varepsilon))}\left(\mathrm{e}^{-a_i}-\mathrm{e}^{-b_i}\right) f(b_i-a_i),
\end{aligned}$$

onde $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\rho(1+\varepsilon)x}}{\mathrm{e}^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}$ e $f(\infty) = 1$, se $b_i = \infty$. Note que f é uniformemente limitada. De fato, $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\int_{a_i}^{b_i} A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}}{1-(\rho(1+\varepsilon))}\left(\mathrm{e}^{-a_i}-\mathrm{e}^{-b_i}\right). \tag{3.45}$$

Por outro lado, como $|w| > 1$ em B, para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{a_i}^{b_i} |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geq \int_{a_i}^{b_i} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left(\mathrm{e}^{-a_i}-\mathrm{e}^{-b_i}\right). \tag{3.46}$$

Combinando (3.45) e (3.46), obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i} A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}}{1-(\rho(1+\varepsilon))}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i} |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Portanto, o teorema da convergência monótona implica em

$$\int_B A_p\left(\rho|w(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}}{1-(\rho(1+\varepsilon))}\int_B |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq \frac{\mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}}{1-(\rho(1+\varepsilon))}\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Segue da desigualdade acima e de (3.43) que (3.41) é válida escolhendo

$$C \geq M + \mathrm{e}^{\rho C_\varepsilon}/(1-\rho(1+\varepsilon)).$$

Isto prova o teorema. ■

Uma propriedade importante da estimativa (3.36) é a sua invariância por escalar. De fato, para $a > 0$ e $u \in X_\infty^{1,p}(\alpha,\theta)$ considere $u_a(r) = u(ar)$. Usando a condição $\alpha - p + 1 = 0$ é fácil verificar

$$\|u_a\|_{1,L_\alpha^p} = \|u\|_{1,L_\alpha^p}.$$

Além disso,

$$\|u_a\|^p_{L^p_\theta} = a^{-(\theta+1)}\|u\|^p_{L^p_\theta}$$

e

$$\int_0^\infty A_p\left(\mu\left(\frac{|u_a(r)|}{\|u_a'\|_{L^p_\alpha}}\right)^{p'}\right)\mathrm{d}\lambda_\theta = a^{-(\theta+1)}\int_0^\infty A_p\left(\mu\left(\frac{|u(r)|}{\|u'\|_{L^p_\alpha}}\right)^{p'}\right)\mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Note que a constante crítica $\mu_{\alpha,\theta}$ do Teorema 3.5.1 depende da medida $\mathrm{d}\lambda_\theta$ que aparece na definição do espaço $X^{1,p}_\infty(\alpha,\theta)$. Além disso, o próximo resultado mostra que a restrição $\mu < \mu_{\alpha,\theta}$ no Teorema 3.5.1 é ótima. Observe que esta exclui o caso $\mu = \mu_{\alpha,\theta}$ em contraste com (3.18).

Teorema 3.5.2. *Sejam $\alpha \geq 1$, $\theta \geq 0$ e $p = \alpha+1$. Para cada $\mu \geq \mu_{\alpha,\theta}$ existe uma sequência $(u_j) \subset X^{1,p}_\infty(\alpha,\theta)$ tal que*

$$\|u_j'\|_{L^p_\alpha} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\|u_j\|^p_{L^p_\theta}}\int_0^\infty A_p\left(\mu\left(|u_j(r)|\right)^{p'}\right)\mathrm{d}\lambda_\theta \to \infty \quad se \quad j\to\infty.$$

Prova: Considere a seguinte sequência de funções

$$w_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ j^{-\frac{1}{p}}t, & \text{se } 0 \leq t \leq j, \\ j^{\frac{1}{p'}}, & \text{se } t \geq j. \end{cases}$$

É simples verificar

$$\lim_{t\to-\infty} w_j(t) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^\infty |w_j'(t)|^p \mathrm{d}t = 1. \tag{3.47}$$

Além disso, temos

$$\int_{-\infty}^\infty |w_j(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{j}\int_0^j t^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + j^{p-1}\mathrm{e}^{-j} \to 0 \quad \text{se} \quad j\to\infty,$$

donde

$$\int_{-\infty}^\infty |w_j(t)|^p \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{se} \quad j\to\infty. \tag{3.48}$$

Um cálculo simples permite concluir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty A_p\left(|w_j(t)|^{p'}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \int_0^j A_p\left(j\left(\frac{t}{j}\right)^{p'}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int_j^\infty A_p(j)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^j \exp\left(j\left(\frac{t}{j}\right)^{p'} - t\right)\mathrm{d}t - \sum_{m=0}^{\lfloor p\rfloor}\frac{1}{m!}j^{-\frac{m}{p-1}}\int_0^j t^{mp'}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&+ \left(\mathrm{e}^j - \sum_{m=0}^{\lfloor p\rfloor}\frac{j^m}{m!}\right)\mathrm{e}^{-j} \\
&\geq \int_0^j \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \sum_{m=0}^{\lfloor p\rfloor}\frac{1}{m!}j^{-\frac{m}{p-1}}\int_0^j t^{mp'}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \left(\mathrm{e}^j - \sum_{m=0}^{\lfloor p\rfloor}\frac{j^m}{m!}\right)\mathrm{e}^{-j}
\end{aligned}$$

Dessa forma, para j grande o suficiente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_p\left(|w_j(t)|^{p'}\right) \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \geq \frac{1}{2}. \tag{3.49}$$

Agora, a prova do Teorema 3.5.2 segue do argumento do início da prova do Teorema 3.5.1, veja (3.40), depois de combinar as estimativas (3.47) e (3.49). ■

CAPÍTULO 4

Funções extremais

O objetivo desse Capítulo é provar a existência de funções extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser estabelecida pelo Teorema 3.3.1. Para isso, provaremos um princípio de concentração e compacidade para os espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e, com ajuda do Corolário 3.2.1, aplicaremos um método baseado na estratégia em duas etapas devido L. Carleson e A. Chang.

4.1 Introdução

4.1.1 Crescimento crítico em $W_0^{1,p}(\Omega)$: O caso $p=n$ versus $1<p<n$

Seja $W_0^{1,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev clássico munido com a norma de Dirichlet $\|\nabla u\|_p$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira regular.

No caso $1<p<n$, as desigualdades de Sobolev garantem que as inclusões

$$W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega),\quad 1<q\leq p^*=p^*(p,n)=\frac{np}{n-p}$$

são contínuas. Além disso, os resultados de compacidade de Rellich-Kondrachov garantem que estas inclusões são compactas no caso estrito $q<p^*$. Dessa forma, definindo

$$S(n,p,q,\Omega)=\sup_{\|\nabla u\|_p\leq 1}\int_\Omega |u|^q\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

temos

$$S(n,p,q,\Omega)<\infty,\quad \text{se}\quad 1<q\leq p^*.$$

Além disso, por compacidade, $S(n,p,q,\Omega)$ é atingido por uma função $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, se $q<p^*$. No caso crítico $q=p^*$, a constante $S(n,p,p^*,\Omega)$ nunca é atingida e é explicitamente independente do domínio Ω.

No caso $p=n$, o crescimento crítico é determinado pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.1). De acordo com esta desigualdade, definindo

$$J(\mu,n,\Omega)=\sup_{\|\nabla u\|_n\leq 1}\int_\Omega \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}}\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

temos

$$J(\mu,n,\Omega)<\infty,\quad \text{se}\quad 0<\mu\leq\mu_n=n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$$

e ainda $J(\mu,n,\Omega)$ é explicitamente dependente do domínio Ω. É relativamente fácil garantir que $J(\mu,n,\Omega)$ é atingido por uma *função extremal* $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, quando $0<\mu<\mu_n$. Já o caso crítico $\mu=\mu_n$, é delicado. No entanto, em contraste com o caso $1<p<n$, L. Carleson e A. Chang [16] provaram que $J(\mu_n,n,\Omega)$ possui função extremal, quando $\Omega = B_1$ é a bola unitária com centro em $0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Alguns anos depois, M. Struwe [61], usando técnicas de *blow-up analysis*, garantiu a existência de função extremal para pequenas pertubações da bola $B_1 \subset \mathbb{R}^2$. Introduzindo um novo método, deformações conformes, M. Flucher [34] provou a existência de extremal quando Ω é um domínio limitado (suave) qualquer em $\mathbb{R}^2$. Por fim, K. Lin [51] generalizou estes resultados para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

4.1.2 Crescimento crítico em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$: O caso $\alpha-p+1=0$ versus $\alpha-p+1>0$

Seja $0<R<\infty$. Suponha $\alpha-p+1>0$ e $\min\{\kappa,\theta\} \geq \alpha-p$. Como vimos no Capítulo 2, neste caso, as inclusões

$$X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\kappa^q, \quad 1<q\leq p^* = p^*(\alpha,p,\kappa) = \frac{(\kappa+1)p}{\alpha-p+1}$$

são contínuas e, sob a condição $1<q<p^*$, estas são compactas. Seja

$$S(\alpha,p,q,\kappa,R) = \sup_{\|u\|_{1,L_\alpha^p}\leq 1} \int_0^R |u|^q \,\mathrm{d}\lambda_\kappa.$$

Segue que

$$S(\alpha,p,q,\kappa,R) < \infty, \quad 1<q\leq p^*.$$

Para $1<q<p^*$, a inclusão compacta descrita acima assegura que $S(\alpha,p,q,\kappa,R)$ possui uma função extremal $u \in X_R$. Por outro lado, no caso crítico $q=p^*$, D. G. de Figueiredo *et al.* [19] mostraram que $S(\alpha,p,p^*,\kappa,R)$ não é atingido e que independe de R.

No caso $\alpha-p+1=0$, o crescimento crítico é dado pelo Teorema 3.3.1. Neste caso, definindo

$$J(\alpha,\mu,p,\kappa,R) = \sup_{\|u\|_{1,L_\alpha^p}\leq 1} \int_0^R e^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa, \tag{4.3}$$

temos

$$J(\alpha,\mu,p,\kappa,R) < \infty, \quad \text{se} \quad 0<\mu\leq\mu_{\alpha,\kappa} = (\kappa+1)\omega_\alpha^{1/\alpha}.$$

No que segue veremos que $J(\alpha,\mu,p,\kappa,R)$ possui uma função extremal $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ mesmo no caso crítico $\mu=\mu_{\alpha,\kappa}$. Para $\mu<\mu_{\alpha,\kappa}$ isto será uma consequência do teorema da convergência de Vitali. No caso crítico, $\mu=\mu_{\alpha,\kappa}$, usaremos alguns resultados de compacidade estabelecidos na próxima seção combinados com um método baseado em uma estratégia de duas etapas devido a L. Carleson e A. Chang [16].

4.2 Alternativas de concentração ou compacidade

Em 1985 P. -L. Lions [52] estabeleceu um célebre princípio que passou a ser conhecido como *concentration-compactness principle*. Em seu trabalho P. -L. Lions investiga a questão crucial da compacidade para inclusão de Trudinger-Moser $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_\mu}(\Omega)$ e prova que exceto por "pequenas vizinhanças fracas de 0" esta inclusão é compacta e a constante μ_n pode ser melhorada ao longo de certas sequências em $W_0^{1,n}(\Omega)$. Mais precisamente, seja (u_j) uma sequência maximizante para o supremo (3.1), como $\mu = \mu_n$. A menos de um refinamento por subsequência, podemos assumir que $u_j \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,n}(\Omega)$. O princípio de P. -L. Lions afirma que há apenas duas alternativas:

(i) *Compacidade*: u realiza o supremo (3.1),

(ii) *Concentração*: a sequência (u_j) é tal que $u_j \rightharpoonup 0$ e $\|\nabla u_j\|_n \rightharpoonup \delta_{x_0}$ para algum $x_0 \in \Omega$, onde δ_{x_0} denota a medida de Dirac concentrada em $x_0 \in \Omega$.

No argumento da prova desse princípio, P. -L. Lions provou que dada uma seguência (u_j) em $W_0^{1,n}(\Omega)$ tal que $\|\nabla u_j\|_n \le 1$ e $u_j \rightharpoonup u \not\equiv 0$ em $W_0^{1,n}(\Omega)$, então

$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega e^{\mu_n q |u_j|^{\frac{n}{n-1}}}\,dx < \infty, \quad \text{se} \quad 0 < q < \frac{1}{(1 - \|\nabla u\|_n^n)^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{4.4}$$

Esse resultado garante que, ao longo de tais sequências, a constante crítica μ_n pode ser melhorada. Mais recentemente, R. Černý *et al.* [17], seguindo um novo enfoque, provaram uma versão mais apurada dos resultados acima.

Nesta seção, investigaremos a desigualdade (3.18) estabelecida no Teorema 3.3.1 e obteremos uma alternativa de concentração ou compacidade para a classe de espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Inicialmente, seguindo as idéias contidas em [17, Theorem 1.1] obteremos uma versão de (4.4) para dimensões não-inteiras.

Teorema 4.2.1. *Sejam $\alpha \ge 1$, $\theta, \kappa \ge 0$ e $p = \alpha + 1$. Considere uma sequência (u_j) em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ tal que*

$$\|u_j\|_{1,L_\alpha^p} \le 1 \quad \text{e} \quad u_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \quad \text{com} \quad u \not\equiv 0. \tag{4.5}$$

Então,

$$\limsup_{j\to\infty} \int_0^R e^{q\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{\frac{p}{p-1}}}\,d\lambda_\kappa \quad \begin{cases} < \infty & \text{se} \quad q < P \\ = \infty & \text{se} \quad q \ge P, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde

$$P = P(\alpha,p,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1 - \int_0^R |u'|^p\,d\lambda_\alpha)^{\frac{1}{p-1}}} & \text{se} \quad \|u\|_{1,L_\alpha^p} < 1, \\ \infty & \text{se} \quad \|u\|_{1,L_\alpha^p} = 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Prova: Inicialmente, para qualquer $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ satisfazendo $\|u\|_{1,L_\alpha^p} \le 1$ temos

$$|u(r)| \le \left(\omega_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \ln \frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad r \in (0,R), \tag{4.8}$$

onde $p' = p/(p-1)$. De fato, dado $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ temos $\lim_{r\to R} u(r) = 0$, logo a desigualdade de Hölder e a hipótese $\alpha - p + 1 = 0$ fornecem

$$\begin{aligned} |u(r)| \leq \int_r^R |u'(s)|\,\mathrm{d}s &= \int_r^R \left(\omega_\alpha^{\frac{1}{p}} s^{\frac{\alpha}{p}} |u'(s)|\right)\left(\omega_\alpha^{-\frac{1}{p}} s^{-\frac{\alpha}{p}}\right)\mathrm{d}s \\ &\leq \|u\|_{1,L^p_\alpha}\left(\omega_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Agora, argumentamos por contradição. Suponha que exista uma sequência $(u_j) \subset X_R$ satisfazendo (4.5) com $0 < \|u\|_{1,L^p_\alpha} < 1$ e tal que

$$\int_0^R \mathrm{e}^{q_1 \mu_{\alpha,\kappa} |u_j|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa \to \infty \quad \text{se} \quad j \to \infty, \tag{4.9}$$

para algum $q_1 < P$. Afirmamos que dados $q_2 \in (q_1, P)$, $j_0 \in \mathbb{N}$ e $r_0 \in (0,R)$ existem $j > j_0$ e $r \in (0, r_0)$ tais que

$$|u_j(r)| \geq \left(\frac{1}{q_2 \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Suponha que esta afirmação é falsa. Então existem $j_0 \in \mathbb{N}$ e $r_0 \in (0,R)$ tais que

$$|u_j(r)| < \left(\frac{1}{q_2 \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad \forall\, r \in (0,r_0),\ j \geq j_0.$$

Isto em combinação com $\alpha - p + 1 = 0$ e (4.8) implica que para quaisquer $q_1 < q_2$ e $k \geq k_0$,

$$\int_0^R \mathrm{e}^{q_1 \mu_{\alpha,\kappa} |u_j|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa \leq \int_0^{r_0} \mathrm{e}^{\frac{q_1}{q_2}(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa + \int_{r_0}^R \mathrm{e}^{q_1(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa < \infty,$$

o que contradiz (4.9) e prova nossa afirmação. Portanto, a menos de um refinamento por subsequência de (u_j), existe uma sequência (r_j) tal que

$$|u_j(r_j)| \geq \left(\frac{1}{q_2 \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \ln\frac{R}{r_j}\right)^{\frac{1}{p'}} \quad \text{e} \quad r_j < \frac{1}{j}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Agora, dado $L > 0$, definimos os operadores T^L e T_L agindo em qualquer função $v : (0,R) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$T^L(v) = \min\{|v|, L\}\,\mathrm{sign}(v) \quad \text{e} \quad T_L(v) = v - T^L(v),$$

onde $\mathrm{sign}(x)$ representa a função sinal. Se $v \in AC(0,R)$ então $T^L(v)$ e $T_L(v)$ ainda pertencem a $AC(0,R)$. Além disso, em quase todo ponto $r \in (0,R)$ vale

$$T^L(v)'(r) = \begin{cases} v'(r) & \text{se} \quad |v(r)| \leq L, \\ 0 & \text{se} \quad |v(r)| > L. \end{cases}$$

É fácil verificar

$$\int_0^R |u_j'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^R |T^L(u_j)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha + \int_0^R |T_L(u_j)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha. \tag{4.11}$$

Usando a hipótese (4.5) e a inclusão compacta $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\kappa^p$, $\kappa \geq 0$, veja Corolário 2.3.3, a menos de subsequência, $u_j \to u$ em L_κ^p e $u_j(r) \to u(r)$ em quase todo ponto $r \in (0,R)$. Em particular,

$$T^L(u_j)(r) \to T^L(u)(r) \quad \text{e} \quad T_L(u_j)(r) \to T_L(u)(r) \quad \text{q.t.p em} \quad (0,R).$$

Ainda, por (4.11), as sequências $(T^L(u_j))$ e $(T_L(u_j))$ são limitadas no espaço uniformemente convexo X_R, veja Teorema 2.2.2. Assim,

$$T^L(u_j) \rightharpoonup T^L(u) \text{ em } X_R \quad \text{e} \quad T_L(u_j) \rightharpoonup T_L(u) \text{ em } X_R.$$

Uma vez que $|T^L(u)'| \to |u'|$ q.t.p em $(0,R)$ quando $L \to \infty$, para qualquer $q_3 \in (q_2, P)$ fixado, o lema de Fatou garante

$$\frac{1 - \int_0^R |u'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha}{1 - \int_0^R |T^{L_0}(u)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha} > \left(\frac{q_3}{P}\right)^{p-1}, \tag{4.12}$$

desde que L_0 seja escolhido grande o suficiente. Por (4.10), para cada $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos $|u_j(r_j)| > L_0$. Assim, visto que $u_j(r) \to 0$ se $r \to R$, existe $s_j \in (r_j, R)$, o menor número tal que $|u_j(s_j)| = L_0$. Análogo a (4.8), usando (4.10) e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{q_2}\omega_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \ln \frac{R}{r_j}\right)^{\frac{1}{p'}} - L_0 &\leq |u_j(r_j)| - |u_j(s_j)| \leq |u_j(r_j) - u_j(s_j)| \\
&\leq \int_{r_j}^{s_j} |u_j'(r)| \, \mathrm{d}r \\
&\leq \left(\int_{r_j}^{s_j} |u_j'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \left(\omega_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}} \ln \frac{R}{r_j}\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Portanto, se j é suficientemente grande,

$$\left(\frac{1}{q_3}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_{r_j}^{s_j} |u_j'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.13}$$

Sendo $s_j > r_j$ o menor número em (r_j, R) tal que $|u_j(s_j)| = L_0$, temos $|u_j| > L_0$ em (r_j, s_j). Assim, pela definição de T_{L_0}, segue

$$\int_0^R |T_{L_0}(u_j)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha \geq \int_{r_j}^{s_j} |T_{L_0}(u_j)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_{r_j}^{s_j} |u_j'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha.$$

Logo, combinando (4.5), (4.11) e (4.13) podemos escrever

$$\int_0^R |T^{L_0}(u_j)'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha \leq 1 - \left(\frac{1}{q_3}\right)^{p-1}.$$

Usando a semicontinuidade da norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$ na topologia fraca de $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ e (4.12) a estimativa acima implica em

$$\begin{aligned} q_3 &\geq \left(1-\liminf_j \int_0^R |T^{L_0}(u_j)'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &\geq \left(1-\int_0^R |T^{L_0}(u)'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{-\frac{1}{p-1}} \\ &> \frac{q_3}{P}\left(1-\int_0^R |u'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{-\frac{1}{p-1}} = q_3, \end{aligned}$$

o que representa uma contradição.

Para o caso $\int_0^R |u'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = 1$, podemos proceder de forma análoga com algumas pequenas modificações que indicaremos a seguir. Dado $q_1 > 0$, fixamos $q_2 > q_1$. Na parte final do argumento, fixamos $q_3 > q_2$ qualquer e escolhemos $L_0 > 0$ tal que

$$\int_0^R |T^{L_0}(u)'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha > 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_3}\right)^{p-1},$$

em vez de (4.12). Então, como anteriormente, se j é grande o suficiente para que (4.13) seja satisfeita, obtemos

$$\int_0^R |T^{L_0}(u_j)'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \leq 1-\left(\frac{1}{q_3}\right)^{p-1}.$$

Assim, visto que $T^{L_0}(u_j) \rightharpoonup T^{L_0}(u)$ em X_R, a semicontinuidade da norma $\|\cdot\|_{1,L^p_\alpha}$ na topologia fraca fornece uma contradição.

A seguir, vamos mostrar que o expoente $P = P(\alpha,p,u)$ dada por (4.7) é ótimo. Para isso, dado $a_0 \in (0,1)$, exibiremos uma sequência $(u_j) \subset X_R$ tal que

$$\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} = 1, \quad u_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_R, \quad u_j(r) \to u(r) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad (0,R)$$

e

$$\|u\|_{1,L^p_\alpha} = a_0, \quad \text{e} \quad \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}\left(1-a_0^p\right)^{-\frac{1}{p-1}}|u_j|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa \to \infty \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Para conseguir isso, introduzimos a seguinte versão da sequência de Moser:

$$v_j(r) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \dfrac{R}{3} \leq r \leq R, \\ c_1 j^{-\frac{1}{p}} \ln \dfrac{R}{3r} & \text{se} \quad \dfrac{R}{3}\mathrm{e}^{-\frac{j}{\kappa+1}} \leq r \leq \dfrac{R}{3}, \\ c_2 j^{\frac{1}{p'}} & \text{se} \quad 0 \leq r \leq \dfrac{R}{3}\mathrm{e}^{-\frac{j}{\kappa+1}}, \end{cases}$$

onde $c_1 = (\kappa+1)^{1/p}\omega_\alpha^{-1/p}$ e $c_2 = (\kappa+1)^{-1}c_1$ foram escolhidos de forma que cada v_j seja continuamente diferenciável por partes e $\|v_j\|_{1,L^p_\alpha} = 1$. Considere a função $u \in X_R$ dada por

$$u(r) = \begin{cases} A & \text{se} \quad 0 \leq r \leq \dfrac{2R}{3}, \\ 3A - \dfrac{3A}{R}r & \text{se} \quad \dfrac{2R}{3} \leq r \leq R, \end{cases}$$

onde A foi escolhido tal que $\|u\|_{1,L^p_\alpha} = a_0$. Finalmente, defina

$$u_j = u + (1 - a_0^p)^{\frac{1}{p}} v_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, existem constantes C_1' e C_2' tais que

$$\begin{aligned} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}\left(1-a_0^p\right)^{-\frac{1}{p-1}}|u_j|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa &\geq \int_0^{\frac{R}{3}\mathrm{e}^{-\frac{j}{\kappa+1}}} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}\left(1-a_0^p\right)^{-\frac{1}{p-1}}|u_j|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \\ &= C_1' \mathrm{e}^{\left(C_2'+j^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'}-j} \to \infty, \text{ se } j \to \infty. \end{aligned}$$

Além disso, visto que os suportes de u' e v_j' são disjuntos, temos $\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} = 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Em particular, a menos de subsequência, $u_j \rightharpoonup w$ em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e a inclusão compacta $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^p_\kappa$ garante que $u_j(r) \rightharpoonup w(r)$ q.t.p em $(0,R)$. Mas, usando que $v_j(r) \to 0$ em quase todo ponto $r \in (0,R)$, é fácil verificar que $u_j(r) \to u(r)$ q.t.p em $(0,R)$. Assim,

$$\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} = 1, \quad u_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_R, \quad u_j(r) \to u(r) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad (0,R)$$

como desejado. ■

É conveniente introduzir a seguinte notação.

Definição 4.2.1. *Uma sequência $(u_j) \subset X_R$ será dita concentrada na origem se*

$$\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1, \quad u_j \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad X_R \quad \text{e} \quad \limsup_{j\to\infty} \int_{r_0}^R |u_j'|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = 0, \ \forall\, r_0 > 0.$$

Ainda, sob a condição $\alpha - p + 1 = 0$, denotamos

$$I(u) = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa, \quad \forall\, u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \tag{4.14}$$

e

$$J(\alpha,p,\kappa,R) = \sup_{\|u\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1} I(u). \tag{4.15}$$

Com esta notação, temos a seguinte versão da alternativa de concentração ou compacidade de P. -L. Lions para a classe de espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$.

Corolário 4.2.1. *Sejam $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e θ, $\kappa \geq 0$ tais que $\alpha - p + 1 = 0$. Seja (u_j) uma sequência tal que $\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1$ e $u_j \rightharpoonup u$ em X_R. Então, temos as seguintes alternativas:*

(a) *Compacidade, isto é, $I(u_j) \to I(u)$, onde I é definido em (4.14); ou*

(b) *Concentração, isto é, (u_j) é uma sequência concentrada na origem.*

Prova: Se $u_j \rightharpoonup u \not\equiv 0$, pelo Teorema 4.2.1, podemos tomar

$$1 < q < P = (1 - \|u\|^p_{1,L^p_\alpha})^{-\frac{1}{p-1}}$$

tal que a sequência $(\mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}})$ seja limitada em L^q_κ. Então, o teorema da convergência de Vitali garante que **(a)** ocorre. Resta provar a seguinte afirmação.

Afirmação 4.2.1. *Se $u_j \rightharpoonup u \equiv 0$ e (u_j) não concentra-se na origem, então*

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa = |B_R|_\kappa.$$

Uma vez que (u_j) não é concentrada na origem, existem $0 < A < 1$ e $r_0 > 0$ tais que

$$\int_{r_0}^R |u_j'|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha > A$$

para j suficientemente grande. Isto implica em

$$\int_0^{r_0} |u_j'|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha \le 1 - A.$$

Assim, a desigualdade de Hölder fornece

$$\begin{aligned} u_j(r) &= u_j(r_0) + \int_r^{r_0} -u_j'(s)\,\mathrm{d}s \\ &\le u_j(r_0) + \omega_\alpha^{-\frac{1}{p}}(1-A)^{\frac{1}{p}}\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Ainda, sendo $\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \le 1$ e $\lim_{r\to R} u_j(r) = 0$, segue

$$u_j(r_0) \le \omega_\alpha^{-\frac{1}{p}}\left(\ln\frac{R}{r_0}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Logo, as desigualdades acima implicam em

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'} \le (\kappa+1)\ln\frac{r_0}{r}\left[\left(\frac{\ln R - \ln r_0}{\ln r_0 - \ln r}\right)^{\frac{1}{p'}} + (1-A)^{\frac{1}{p}}\right]^{p'}.$$

A expressão entre colchetes na desigualdade acima tende para$(1-A)^{1/(p-1)}$, quando $r \to 0$. Logo, podemos tomar $0 < r_1 < r_0$ pequeno tal que valha

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'} \le (\kappa+1)((1-A)^{\frac{1}{p-1}} + \nu_0)\ln\frac{r_0}{r}, \quad 0 < r \le r_1, \tag{4.16}$$

onde ν_0 é escolhido tal que

$$1 - (1-A)^{\frac{1}{p-1}} > \nu_0 > 0.$$

Agora, seja $\rho > 0$ arbitrário. Usando(4.16) e reduzindo r_1, se necessário, podemos escrever

$$\int_0^{r_1} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq \int_0^{r_1} \mathrm{e}^{(\kappa+1)((1-A)^{\frac{1}{p-1}}+\nu_0)\ln\frac{r_0}{r}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq c' r_1^{c_\kappa} < \rho, \tag{4.17}$$

onde

$$c_\kappa = \kappa - (\kappa+1)((1-A)^{\frac{1}{p-1}} + \nu_0) + 1$$

e c' é uma constante positiva que só depende de α e κ. Note que $c_\kappa > 0$ em vista da escolha de ν_0. Por conveniência, para $u \in X_R$ tal que $\|u\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1$, denotamos

$$I(u) = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa, \quad I_1(u) = \int_0^{r_1} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{r_1}^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa.$$

Claramente $I(u) = I_1(u) + I_2(u)$. Agora, pela desigualdade de Hölder, para $r_1 < r \leq R$, podemos escrever

$$u_j(r) \leq \omega_\alpha^{-\frac{1}{p}} \left(\ln\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \omega_\alpha^{-\frac{1}{p}} \left(\ln\frac{R}{r_1}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Visto que $u_j(r) \to 0$ q.t.p em $(0,R)$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue fornece

$$\lim_{l\to\infty} I_2(u_l) = I_2(0) \geq I_2(u_j) - \rho, \tag{4.18}$$

onde j é suficientemente grande. Combinando (4.17) e (4.18) segue que

$$I(0) \geq I_2(0) \geq I_2(u_j) - \rho = I(u_j) - I_1(u_j) - \rho \geq I(u_j) - 2\rho. \tag{4.19}$$

Levando em conta (4.19), temos

$$I(0) \leq \lim_{j\to\infty} I(u_j) \leq I(0) + 2\rho.$$

Uma vez que $\rho > 0$ foi tomado arbitrário, segue a afirmação. ∎

4.3 Análise das sequências concentradas

Na tentativa de encontrar funções extremais para (4.3), no caso crítico $\mu = \mu_{\alpha,\kappa}$, veja (4.15); segundo o Corolário 4.2.1, o que pode dá errado é a sequência maximizante tomada concentrar-se na origem. Assim, necessitamos analisar o valor do funcional de Moser (4.14) ao logo destas sequências. Nesse sentido, temos

Teorema 4.3.1. *Seja $(u_j) \subset X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ uma sequência concentrada na origem. Então*

$$\limsup_{j\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq |B_R|_\kappa \left(1 + \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}\right)$$

onde $\Psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p)$ é a função digama e

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln(m)\right)$$

é a constante de Euler.

Prova: Observamos que $\Psi(p)+\gamma>0$, veja [3, p.13]. Logo, podemos assumir

$$\limsup_{j\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{\frac{p}{p-1}}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa > 2|B_R|_\kappa, \tag{4.20}$$

pois caso contrário, não há o que provar. Assim, seja $(u_j)\subset X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ uma sequência concentrada na origem satisfazendo (4.20). Uma vez que $\|u_j\|_{1,L^p_\alpha}\leq 1$ e $\lim_{r\to R}u_j(r)=0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, temos

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'}\leq(\kappa+1)\ln\frac{R}{r},\quad \forall\, r\in(0,R), \tag{4.21}$$

onde $p'=p/(p-1)$. Afirmamos que, para cada $j\in\mathbb{N}$, existe um maior número $r_j\in(0,R\mathrm{e}^{-1/(\kappa+1)}]$ tal que

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r_j)|^{p'}=(\kappa+1)\ln\frac{R}{r_j}-2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r_j} \tag{4.22}$$

e ainda

$$\lim_{j\to\infty} r_j=0. \tag{4.23}$$

De fato, tendo em vista (4.21), temos

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'}\leq(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}=(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}-2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r},\quad \forall\, r\geq R\mathrm{e}^{-\frac{1}{\kappa+1}}.$$

Assim, se (4.22) não é válida, devemos ter

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'}\leq(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}=(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}-2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r},\quad \forall\, r\in(0,R).$$

Usando a mudança $t=(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}$, a desigualdade acima fornece

$$\begin{aligned}
\int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa &\leq \int_0^R \mathrm{e}^{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}-2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa\\
&= \int_0^{R\mathrm{e}^{-\frac{1}{\kappa+1}}} \mathrm{e}^{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}-2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa+\int_{R\mathrm{e}^{-\frac{1}{\kappa+1}}}^R \mathrm{e}^{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\kappa\\
&\leq |B_R|_\kappa\left(\int_1^\infty\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{d}t\right)\\
&= 2|B_R|_\kappa.
\end{aligned}$$

Isto contraria (4.20). Portanto, existe uma sequência (r_j) como em (4.22). Resta verificar que $r_j\to 0$, se $j\to\infty$. Isto segue da hipótese de concentração de (u_j). De fato, dado $\varepsilon>0$, existe $j_0=j_0(\varepsilon)$ tal que

$$\left(\int_\varepsilon^R |u_j'|^p\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}}<\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}},\quad \forall\, j\geq j_0.$$

Note que

$$\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}(\kappa+1)\ln\frac{R}{r} \le (\kappa+1)\ln\frac{R}{r} - 2\ln^{+}(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}, \quad \forall\, r \in (0,R),$$

assim, a desigualdade de Hölder implica em

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'} &\le \left(\int_{\varepsilon}^{R} |u_j'|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}} (\kappa+1)\ln\frac{R}{r} \\ &< \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}(\kappa+1)\ln\frac{R}{r} \\ &\le (\kappa+1)\ln\frac{R}{r} - 2\ln^{+}(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}, \quad \forall\, r\in(\varepsilon,R) \quad \text{e} \quad j \ge j_0. \end{aligned}$$

Isto implica em $r_j < \varepsilon$, para todo $j \ge j_0$. Portanto, vale (4.23).

Agora, executamos a mudança

$$t = (\kappa+1)\ln\frac{R}{r}, \quad w_j(t) = \omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}}(\kappa+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} u_j(r)$$

e denotamos

$$a_j = (\kappa+1)\ln\frac{R}{r_j}.$$

Aplicando o Corolário 3.2.1, com

$$w = w_j, \quad a = a_j \quad \text{e} \quad \delta = \delta_j = \int_0^{r_j} |u_j'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_{a_j}^{\infty} |w_j'|^p \,\mathrm{d}t,$$

obtemos

$$\int_0^{r_j} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa = |B_R|_\kappa \int_{a_j}^{\infty} \mathrm{e}^{w_j^{p'}(t)-t}\mathrm{d}t \le |B_R|_\kappa \frac{\mathrm{e}^{K_j+\Psi(p)+\gamma}}{1-\delta_j^{\frac{1}{p-1}}}, \tag{4.24}$$

onde

$$K_j = w_j^{p'}(a_j)\left[1 + \frac{\delta_j}{(p-1)(1-\delta_j^{\frac{1}{p-1}})^{p-1}}\right] - a_j.$$

Afirmamos que $\delta_j \to 0$ e $K_j \to 0$, se $j \to \infty$. De fato, note

$$\begin{aligned} w_j^{p'}(a_j) = \mu_{\alpha,\kappa} u_j^{p'}(r_j) &= \mu_{\alpha,\kappa}\left(\int_{r_j}^{R} -u'(s)\,\mathrm{d}s\right)^{p'} \\ &\le \left(\int_{r_j}^{R} |u_j'|\,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}} (\kappa+1)\ln\frac{R}{r_j} \\ &\le \left(1-\delta_j\right)^{\frac{1}{p-1}} a_j. \end{aligned}$$

Combinando esta desigualdade com (4.22) podemos escrever

$$\delta_j \leq 1 - \left(1 - \frac{2\ln^+ a_j}{a_j}\right)^{p-1} \leq (p-1)\frac{2\ln^+ a_j}{a_j} \to 0, \quad \text{se} \quad j \to \infty,$$

pois $a_j \to \infty$ por (4.23). Agora, note que (4.22) equivale a $w_j^{p'}(a_j) = a_j - 2\ln^+ a_j$. Assim, argumentando como no Lema 3.3.1, equações (3.25) e (3.26), podemos escrever

$$K_j \leq \frac{(p-1)^{p'}}{(1-\delta_j^{\frac{1}{p-1}})^{p-1}} \cdot a_j \left(\frac{2\ln^+ a_j}{a_j}\right)^{p'}$$

o que implica $K_j \to 0$, se $j \to \infty$. Isto prova nossa afirmação. Dessa forma, segue de (4.24)

$$\limsup_{j\to\infty} \int_0^{r_j} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq |B_R|_\kappa \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}. \tag{4.25}$$

Por outro lado, dado $r_0 > 0$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'} &\leq \left(\int_{r_0}^R |u_j'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}} (\kappa+1)\ln\frac{R}{r} \\ &\leq \left(\int_{r_0}^R |u_j'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}} (\kappa+1)\ln\frac{R}{r_0}, \quad \forall\, r \in [r_0, R]. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de concentração, concluímos que $\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'} \to 0$ uniformemente em todo compacto da forma $[r_0, R] \subset (0, R)$. Assim, dados $\varepsilon > 0$ e $r_0 \in (r_j, R\mathrm{e}^{-1/(\kappa+1)})$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_{\alpha,\kappa}|u_j(r)|^{p'} \leq \varepsilon, \quad \forall\, r \in [r_0, R] \quad \text{e} \quad \forall\, j \geq j_0.$$

Tendo em vista que r_j é o maior número em $(0, R\mathrm{e}^{-1/(\kappa+1)}]$ satisfazendo (4.22), segue

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa &= \int_{r_j}^{r_0} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa + \int_{r_0}^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa \\ &\leq \int_{r_j}^{r_0} \mathrm{e}^{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r} - 2\ln^+(\kappa+1)\ln\frac{R}{r}} \,\mathrm{d}\lambda_\kappa + \mathrm{e}^\varepsilon \int_{r_0}^R \mathrm{d}\lambda_\kappa \\ &= \mathrm{e}^\varepsilon \int_{r_0}^R \mathrm{d}\lambda_\kappa + |B_R|_\kappa \left(\frac{1}{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r_0}} - \frac{1}{(\kappa+1)\ln\frac{R}{r_j}}\right) \\ &\leq |B_R|_\kappa, \end{aligned}$$

para ε e r_0 pequenos o suficiente. Combinando esta última estimativa com (4.25), concluímos a prova do Teorema. ∎

4.4 Existência de funções extremais

A existência de funções extremais para (4.3), no caso subcrítico $\mu < \mu_{\alpha,\kappa}$, é garantida facilmente pelo teorema da convergência de Vitali. De fato, seja $(u_j) \subset X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ uma sequência tal que

$$\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1 \quad \text{e} \quad J(\alpha,\mu,p,\kappa,R) = \lim_{j\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u_j|^{\frac{p}{p-1}}}\mathrm{d}\lambda_\kappa. \tag{4.26}$$

A menos de um refinamento por subsequência, podemos supor

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \quad \text{e} \quad u_j(r)\to u(r) \quad \text{q.t.p em} \quad (0,R). \tag{4.27}$$

Dado $\mu < \mu_{\alpha,\kappa}$, podemos tomar $q>1$ tal que $q\mu < \mu_{\alpha,\kappa}$. Dessa forma, usando o Teorema 3.3.1, temos $\exp(\mu|u_j|^{p/(p-1)})$ uniformemente limitada em L^q_κ para algum $q>1$. Assim, usando (4.27), o teorema da convergência de Vitali fornece

$$J(\alpha,\mu,p,\kappa,R) = \lim_{j\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u_j|^{\frac{p}{p-1}}}\mathrm{d}\lambda_\kappa = \int_0^R \lim_{j\to\infty}\mathrm{e}^{\mu|u_j|^{\frac{p}{p-1}}}\mathrm{d}\lambda_\kappa = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}}\mathrm{d}\lambda_\kappa.$$

No caso crítico $\mu = \mu_{\alpha,\kappa}$, a existência de extremal para (4.3) é delicada. Para lidar com esta situação usaremos um método que generaliza uma estratégia em duas etapas devido a L. Carleson e A. Chang que descrevemos brevemente a seguir.

Assumindo que o supremo (4.2), com $\Omega = B_1$ e $\mu = \mu_n$ não tem função extremal, L. Carleson e A. Chang provaram que qualquer sequência maximizante é necessariamente concentrada na origem e, para obter uma contradição, calcularam o valor do funcional de Moser ao longo destas sequências. Mais precisamente, suponha que (4.2) não é atingido, então qualquer sequência maximizante $(u_j) \subset W_0^{1,n}(B_1)$ para (4.2) satisfaz

$$u_j \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,n}(B_1) \quad \text{e} \quad \lim_{j\to\infty}\int_{\rho\leq|x|\leq 1}|\nabla u_j|^n\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \forall\,\rho>0.$$

Além disso, em uma parte bastante intrigante, L. Carleson e A. Chang provaram a seguinte estimativa para o funcional de Moser agindo em qualquer sequência maximizante concentrada na origem $(u_j)\subset W_0^{1,n}(B_1)$:

$$\limsup_{j\to\infty}\int_B \mathrm{e}^{\mu_n|u_j|^{\frac{n}{n-1}}}\,\mathrm{d}x \leq |B_1|\left(1+\mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right).$$

Em seguida, para obter uma contradição, para cada $n\geq 2$, eles exibiram uma função $w_n \in W_0^{1,n}(B_1)$ tal que

$$\|\nabla w_n\|_n = 1 \quad \text{e} \quad \int_{B_1}\mathrm{e}^{\mu_n|w_n|^{\frac{n}{n-1}}}\,\mathrm{d}x > |B_1|\left(1+\mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right).$$

A seguir, com a ajuda do Teorema 4.3.1, aplicaremos uma estratégia semelhante à descrita acima e provaremos existência de funções extremais para (4.3) mesmo para $\mu = \mu_{\alpha,\kappa}$.

Teorema 4.4.1. *Sejam $\alpha \geq 1$, $\theta, \kappa \geq 0$ e $p = \alpha + 1$. Então, para todo $\mu \leq \mu_{\alpha,\kappa}$, existe uma função extremal para o supremo em (4.3). Isto é, existe $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ tal que*

$$J(\alpha,\mu,p,\kappa,R) = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu|u|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa.$$

Prova: Como vimos no início desta seção, podemos supor $\mu = \mu_{\alpha,\kappa}$. Neste caso, suponha que o supremo em (4.3) não possui função extremal e tome $(u_j) \subset X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ uma sequência maximizante como em (4.26) e (4.27). De acordo com o Corolário 4.2.1, a sequência (u_j) é necessariamente concentrada na origem. Assim, o Teorema 4.3.1 fornece

$$\limsup_{j\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|u_j|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa \leq |B_R|_\kappa \left(1 + \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}\right)$$

onde $\Psi(p) = \Gamma'(p)/\Gamma(p)$ é a função digama e $\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{i} - \ln(m)\right)$ é a constante de Euler. Portanto, para concluir a prova do Teorema é suficiente mostrar que, para cada $p \geq 2$, existe uma função $w_p \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ tal que $\|w_p\|_{1,L^p_\alpha} = 1$ e

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|w_p|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa > |B_R|_\kappa \left(1 + \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}\right), \tag{4.28}$$

onde $p' = p/(p-1)$ o que representa uma contradição. Para isso, para cada $p \geq 2$, defina

$$w_p(r) = \frac{1}{\omega_\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}}(\kappa+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \begin{cases} \dfrac{(p-1)^{\frac{1}{p'}}}{p}(\kappa+1)\ln\dfrac{R}{r}, & \text{se} \quad R\mathrm{e}^{-\frac{p}{\kappa+1}} \leq r \leq R \\ \left((\kappa+1)\ln\dfrac{R}{r} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}, & \text{se} \quad R\mathrm{e}^{-\frac{N_p}{\kappa+1}} \leq r \leq R\mathrm{e}^{-\frac{p}{\kappa+1}} \\ (N_p - 1)^{\frac{1}{p'}}, & \text{se} \quad 0 < r \leq R\mathrm{e}^{-\frac{N_p}{\kappa+1}}, \end{cases}$$

onde N_p é uma constante escolhida de forma que $w_p \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ e $\|w_p\|_{1,L^p_\alpha} = 1$. De fato, temos

$$N_p = 1 + (p-1)\mathrm{e}^{p'^p - p'}. \tag{4.29}$$

Definimos

$$I(w_p) \;:=\; \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\kappa}|w_p|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^{R\mathrm{e}^{-\frac{N_p}{\kappa+1}}} \mathrm{e}^{N_p - 1} \mathrm{d}\lambda_\kappa, \\ I_2 &:= \int_{R\mathrm{e}^{-\frac{N_p}{\kappa+1}}}^{R\mathrm{e}^{-\frac{p}{\kappa+1}}} \mathrm{e}^{((\kappa+1)\ln\frac{R}{r} - 1)} \mathrm{d}\lambda_\kappa, \\ I_3 &:= \int_{R\mathrm{e}^{-\frac{p}{\kappa+1}}}^R \mathrm{e}^{\frac{p-1}{p^{p'}}((\kappa+1)\ln\frac{R}{r})^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\kappa. \end{aligned}$$

A seguir, vamos calcular cada uma dessas três integrais. Primeiro, é fácil verificar que

$$I_1 = \frac{|B_R|_\kappa}{\mathrm{e}} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{|B_R|_\kappa}{\mathrm{e}}(N_p - p).$$

Ainda, usando a mudança de variável $t = (\kappa+1)\ln\frac{R}{r}$, podemos escrever

$$I_3 = |B_R|_\kappa \int_0^p \mathrm{e}^{\frac{p-1}{p'}t^{p'}-t}\, \mathrm{d}t$$

donde, fazendo $\tau = t/p$, obtemos

$$I_3 = p|B_R|_\kappa \int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)\tau^{p'}-p\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

Portanto, usando a definição de N_p em (4.29), temos

$$\begin{aligned} I(w_p) &= \left(\frac{1+N_p-p}{\mathrm{e}} + p\int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)\tau^{p'}-p\tau}\, \mathrm{d}\tau\right)|B_R|_\kappa \\ &= \left(\frac{2-p}{\mathrm{e}} + p\int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)\tau^{p'}-p\tau}\, \mathrm{d}\tau + (p-1)\mathrm{e}^{p'^p-p'-1}\right)|B_R|_\kappa. \end{aligned}$$

Dessa forma, para concluir (4.28), basta verificar que

$$\frac{2-p}{\mathrm{e}} + p\int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)\tau^{p'}-p\tau}\, \mathrm{d}\tau + (p-1)\mathrm{e}^{p'^p-p'-1} > 1 + \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}, \quad \forall\, p \geq 2. \tag{4.30}$$

Para isso, note que $h(\tau) = (p-1)\tau^{p'} - p\tau$ satisfaz: $h(\tau) > -p\tau$ para $\tau \in (0, \frac{1}{p}]$ e $h(\tau) \geq -1$ para $\tau \in [1/p, 1]$. Logo,

$$p\int_0^1 \mathrm{e}^{h(\tau)}\mathrm{d}\tau > p\int_0^{\frac{1}{p}} \mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau + \frac{p}{\mathrm{e}}\int_{\frac{1}{p}}^1 \mathrm{d}\tau = 1 - \frac{2-p}{\mathrm{e}}.$$

Portanto, (4.30) reduz-se a

$$(p-1)\mathrm{e}^{p'^p-p'-1} \geq \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}, \quad \forall\, p \geq 2. \tag{4.31}$$

Isto equivale à verificar que a função $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(p) = \Psi(p) + \gamma - \ln(p-1) - p'^p + p' + 1$$

é não-positiva. Usando o cálculo elementar, é suficiente verificar que $f(2) = 0$ e $f'(p) \leq 0$, para todo $p \in (2,\infty)$. De fato, usando as propriedades da função digama destacadas em (3.4), temos

$$f(2) = \Psi(2) + \gamma - 1 = -\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j}\right) - 1 = 0.$$

Por outro lado,

$$f'(p) = \Psi'(p) - \left(p' - 1 + \frac{d}{dp}(p'^p + p')\right).$$

Além disso,

$$\Psi'(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+p)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+p-\frac{1}{2})(k+p+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)}$$

e

$$\frac{d}{dp}(p'^p - p') = p'^p\left(\ln p' - p' + 1\right) + (p'-1)^2.$$

Portanto, (4.31) segue da seguinte afirmação.

Afirmação 4.4.1. *Para todo $p \geq 2$, temos*

$$\frac{1}{p-\frac{1}{2}} \leq p'^p\left(\ln p' - p' + 1\right) + (p'-1)^2 + (p'-1),$$

onde $p' = p/(p-1)$.

Fazendo

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\frac{1}{2}}\right),$$

temos

$$0 \leq x \leq \frac{1}{3} < 1 \quad \text{e} \quad p' = \frac{1+x}{1-x}.$$

Portanto, lembrando que

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}, \quad \text{se} \quad |x| < 1,$$

podemos escrever

$$\frac{1}{p-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12(p-\frac{1}{2})^3} \leq \ln p' \leq \frac{1}{p-\frac{1}{2}} + \frac{1}{10(p-\frac{1}{2})^3}. \tag{4.32}$$

Seja $g : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(p) = p\ln p'$. Temos $g'(p) = \ln p' - p' + 1$. Logo, a igualdade $g(p) = g(2) + \int_2^p g'(t)\mathrm{d}t$ equivale a

$$\ln p'^p = \ln 4 + \int_2^p \left(\ln\frac{t}{t-1} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t,$$

e, usando (4.32), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\ln p'^p &\leq \ln 4 + \int_2^p \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} + \frac{1}{10(t-\frac{1}{2})^3} - \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln 4 + \ln(p-\frac{1}{2}) - \ln\frac{3}{2} + \rho - \ln(p-1),
\end{aligned}$$

onde

$$\rho := \frac{1}{10}\int_2^p \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2}\right) < \frac{1}{45}.$$

Dessa forma,

$$p'^p \leq \frac{8\mathrm{e}^\rho}{3}\,\frac{(p-\frac{1}{2})}{p-1}.$$

Portanto, visto que $\ln p' - p' + 1 \leq 0$, nossa afirmação reduz-se a

$$\frac{1}{p-\frac{1}{2}} \leq \frac{8\mathrm{e}^\rho}{3}\,\frac{(p-\frac{1}{2})}{p-1}\left(\ln p' - p' + 1\right) + (p'-1)^2 + (p'-1). \tag{4.33}$$

Fazendo $s = p' - 1 = \frac{1}{p-1}$, temos, por (4.32),

$$\ln p' - s \geq \frac{1}{p-\frac{1}{2}} - \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{2(p-\frac{1}{2})(p-1)}.$$

Portanto, a expressão no lado direito de (4.33) não é menor do que

$$s + s^2 - \frac{4\mathrm{e}^\rho}{3}s^2$$

e o lado esquerdo é igual a $2s/(s+2)$. Assim, para garantir (4.33), é suficiente verificar

$$\left(\frac{4\mathrm{e}^\rho}{3} - 1\right)(s+2) \leq 1. \tag{4.34}$$

Se $p \geq 3$, temos $s \leq 1/2$, e como $\rho < 1/45$, a desigualdade acima é clara. Suponha $2 \leq p \leq 3$. Pela definição de ρ é fácil verificar $\rho \leq (p-2)/30$. Agora, note que

$$\mathrm{e}^{ax} \leq 1 + bx, \quad 0 < a < b, \quad \text{sempre que} \quad 0 \leq x \leq \frac{\ln\frac{b}{a}}{a}.$$

Para $x = p-2$, escolhendo $a = 1/30$ e $b = 1/28$ temos

$$\mathrm{e}^\rho \leq \mathrm{e}^{\frac{p-2}{30}} \leq 1 + \frac{p-2}{28}.$$

Note ainda $s + 2 = 3 - (p-2)/(p-1)$, assim o lado esquerdo em (4.34) não é maior do que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{3} + \frac{p-2}{21} - 1\right)\left(3 - \frac{p-2}{p-1}\right) &= \left(1 + \frac{p-2}{7}\right)\left(1 - \frac{p-2}{3(p-1)}\right)\\
&= 1 + \frac{p-2}{7} - \frac{p-2}{3(p-1)} - \frac{(p-2)^2}{21(p-1)}\\
&\leq 1 + (p-2)\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3(p-1)}\right)\\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

pois $1/7 \leq 1/3(p-1)$, para todo $2 \leq p \leq 3$. Isto prova nossa afirmação. ∎

CAPÍTULO 5

Forma otimizada para a desigualdade de Trudinger-Moser em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$

Neste capítulo discutiremos uma forma otimizada para a desigualdade de Trundiger-Moser estabelecida no Capítulo 3. A forma ótima que iremos apresentar dará informações mais precisas; tanto a respeito da alternativa de concentração e compacidade do Capítulo 4, Corolário 4.2.1, quanto da desigualdade de Trudinger-Moser do Capítulo 3, Teorema 3.3.1. Além disso, investigaremos a existência de funções extremais para a desigualdade obtida. Nosso estudo será baseado nos resultados do Corolário 4.2.1, técnicas de *blow up analysis* e no método em duas etapas de L. Carleson e A. Chang aprimorado para os espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$.

5.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ domínio limitado com bordo regular e considere $W_0^{1,n}(\Omega)$ o espaço de Sobolev clássico. Motivados pela desigualdade de Trudinger-Moser clássica e pelos resultados de Lions, Adimurthi e O. Druet [4], para $n = 2$, e, mais recentemente, Y. Yang [67], para $n \geq 3$, investigaram o supremo

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\,:\,\|\nabla u\|_n \leq 1} \int_\Omega \mathrm{e}^{\mu_n (1+\eta\|u\|_n^n)^{\frac{1}{n-1}} |u|^{\frac{n}{n-1}}} \mathrm{d}x,$$

onde η é um número real não-negativo. Constatou-se que existe um número $\Lambda_1 > 0$ tal que o supremo acima é finito sempre que $\eta \in [0,\Lambda_1)$ e torna-se infinito para $\eta \geq \Lambda_1$. Além disso, no caso em que é finito, o supremo referido possui uma função extremal. O principal objetivo desse capítulo é oferecer uma análise semelhante do supremo acima para a classe de espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, com $p = \alpha + 1$. Os resultados que provaremos neste capítulo estendem os resultados dos autores acima para dimensões fracionárias.

Inicialmente, vamos apresentar alguns fatos que motivam a análise de um tal supremo. Sejam $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e $\theta \geq 0$ tais que $\alpha - p + 1 = 0$. Definimos o funcional de Moser $J_\mu : X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \to \mathbb{R}$ associado à constante $\mu > 0$ por

$$J_\mu(u) = \int_0^R \mathrm{e}^{\mu |u|^{\frac{p}{p-1}}} \mathrm{d}\lambda_\kappa.$$

Como vimos no Capítulo 3, para cada $\mu > 0$ e $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, temos $\exp(\mu|u|^{p/(p-1)}) \in L^1_\kappa$, $\kappa \geq 0$. Assim, J_μ está bem definido. Ainda, segundo o Teorema 3.3.1, existe uma constante crítica $\mu_{\alpha,\kappa}$ tal que

$$\sup_{u\in X_R\,:\,\|u\|_{1,L^p_\alpha}\leq 1} J_\mu(u) < \infty, \quad \text{se, e somente se,} \quad \mu \leq \mu_{\alpha,\kappa}.$$

Por outro lado, segundo o Teorema 4.2.1, ao longo de certas sequências o funcional de Moser pode ser uniformemente limitado mesmo para alguns valores $\mu > \mu_{\alpha,\kappa}$. Mais precisamente, se (u_j) é uma sequência tal que $\|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1$ e $u_j \rightharpoonup u \not\equiv 0$ em X_R, então

$$\limsup_{j\to\infty} J_{q\mu_{\alpha,\kappa}}(u_j) < \infty, \quad \text{sempre que } 1 < q < \left(1 - \|u\|^p_{1,L^p_\alpha}\right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Se o limite fraco é nulo, isto é, $u_j \rightharpoonup 0$ em X_R o limite superior acima ainda é finito, pelo Teorema 3.3.1, no entanto, nenhuma informação extra é obtida, pois não é possível escolher um tal $q > 1$. Neste capítulo obteremos informações precisas mesmo quando $u_j \rightharpoonup u \equiv 0$. Para isso, note que para quaisquer $\eta > 0$ e $u \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$, com $0 < \|u\|_{1,L^p_\alpha} < 1$ satisfazendo $\eta\|u\|^p_{L^p_\theta} \leq \|u\|^p_{1,L^p_\alpha}$, temos

$$1 + \eta\|u\|^p_{L^p_\theta} \leq 1 + \|u\|^p_{1,L^p_\alpha} < \frac{1}{1 - \|u\|^p_{1,L^p_\alpha}}.$$

Portanto, o Teorema 4.2.1 sugere que existem valores $\eta > 0$ tais que

$$\sup_{u\in X_R\,:\,\|u\|_{1,L^p_\alpha}\leq 1} \int_0^R e^{\mu_{\alpha,\theta}\left(1+\eta\|u\|^p_{L^p_\theta}\right)^{\frac{1}{p-1}}|u|^{\frac{p}{p-1}}}\, \mathrm{d}\lambda_\theta < \infty. \tag{5.1}$$

No caso $\eta = 0$, isto reduz-se ao Teorema 3.3.1. Iremos analisar os valores $\eta \in (0,\infty)$. Mais precisamente, mostrararemos que existe uma constante $\Lambda_1 > 0$ tal que o supremo acima é finito e possui função extremal para $\eta \in [0,\Lambda_1)$ e torna-se infinito se $\eta \geq \Lambda_1$.

5.2 Optimalidade

Nesta seção, vamos verificar que existe uma constante $\Lambda_1 > 0$ tal que o supremo em (5.1) é infinito sempre que $\eta \geq \Lambda_1$. Inicialmente, necessitamos de alguns resultados a respeito do problema de autovalor associado à classe de operadores definida por (2.4).

5.2.1 O primeiro autovalor

Sejam $\alpha, \theta \geq 0$ e $p \geq 2$ números reais. O problema de autovalores, com condição de Dirichlet homogênea, para a classe de operadores definida em (2.4) consiste em encontrar $\Lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta)\setminus\{0\}$ tais que

$$\begin{cases} Lu + \Lambda|u|^{p-2}u = 0 \quad \text{em} \quad (0,R) \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde

$$Lu = -r^{-\theta}(r^{\alpha}|u'|^{p-2}u')'. \tag{5.3}$$

Definimos o primeiro autovalor associado à classe de problemas acima por

$$\Lambda_1 := \Lambda_1(\alpha, p, \theta, R) = \inf_{u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^R |u'(r)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha}{\int_0^R |u(r)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\theta}. \tag{5.4}$$

Sob as condições $\alpha - p + 1 > 0$ e $\theta \geq \alpha - p$, o Corolário 2.3.2 garante que a inclusão

$$X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^p$$

é contínua. Ainda, se $\theta > \alpha - p$, esta é compacta. Isto garante que Λ_1 é positivo. Além disso, se a condição de regularidade $\theta > \alpha - 1$ é assumida, D. de Figueiredo *et al.* [19] mostraram que Λ_1 é, de fato, o menor autovalor do problema acima e possui uma função extremal (autofunção) $\phi_1 \in X_R \cap C^1[0,R]$ com $\phi_1 > 0$ em $[0,R)$. A seguir, mostraremos que estes resultados continuam válidos sob as condições

$$\alpha - p + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \theta > \alpha - 1.$$

Nestas condições, seja (u_j) em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante para Λ_1. Isto é,

$$\|u_j\|_{L_\theta^p} = 1 \quad \text{e} \quad \Lambda_1 = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{1,L_\alpha^p}^p.$$

Isto implica que (u_j) é limitada no espaço uniformemente convexo X_R e podemos assumir que $u_j \rightharpoonup u_0$ em X_R, a menos de um refinamento por subsequência. Ainda, passando novamente a uma subsequência, a inclusão compacta $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^p$ dada pelo Corolário 2.3.3, implica que $u_j \to u_0$ em L_θ^p. Assim, $\|u_0\|_{L_\theta^p} = 1$. Agora, usando a primeira desigualdade de Clarkson, podemos escrever

$$\left\|\frac{u_j + u_l}{2}\right\|_{1,L_\alpha^p}^p + \left\|\frac{u_j - u_l}{2}\right\|_{1,L_\alpha^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|u_j\|_{1,L_\alpha^p}^p + \|u_l\|_{1,L_\alpha^p}^p\right)$$

donde

$$\left\|\frac{u_j - u_l}{2}\right\|_{1,L_\alpha^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|u_j\|_{1,L_\alpha^p}^p + \|u_l\|_{1,L_\alpha^p}^p\right) - \Lambda_1\left\|\frac{u_j + u_l}{2}\right\|_{L_\theta^p}^p \to 0 \quad \text{se} \quad j, l \to \infty.$$

Segue que (u_j) é uma sequência de Cauchy em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Logo,

$$\Lambda_1 = \lim_{j\to\infty} \|u_j\|_{1,L_\alpha^p}^p = \|u_0\|_{1,L_\alpha^p}^p, \quad \text{e} \quad \|u_0\|_{L_\theta^p} = 1. \tag{5.5}$$

Assim, $u_0 \in X_R$ é uma função extremal para Λ_1. Resta verificar que podemos escolher $u_0 \in C^1[0,R]$ com $u_0 > 0$ em $[0,R)$. Para isso, argumentamos como em [19]. Primeiro, note que podemos supor $u_0 \geq 0$, pois trocando u_0 por $|u_0|$ o valor Λ_1 não se altera. Uma vez que u_0

é uma função extremal, pelo teorema de multiplicadores de Lagrange, u_0 é uma solução fraca para a classe de problema (5.2) com $\Lambda = \Lambda_1$, isto é, u_0 satisfaz

$$\int_0^R |u_0'|^{p-2}u_0'v \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \Lambda_1 \int_0^R |u_0|^{p-2}u_0 v \,\mathrm{d}\lambda_\theta, \quad \forall\, v \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta). \tag{5.6}$$

Para cada $\rho > 0$, escolhemos uma função teste $v_\rho \in X_R$ dada por

$$v_\rho(s) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le s \le r, \\ 1 + \dfrac{1}{\rho}(r-s) & \text{se} \quad r \le s \le r+\rho, \\ 0 & \text{se} \quad r+\rho \le s \le R. \end{cases} \tag{5.7}$$

Usando v_ρ na equação (5.6) e fazendo $\rho \to 0$, obtemos a equação integral

$$-(\omega_\alpha r^\alpha |u_0'(r)|^{p-2}u_0'(r)) = \Lambda_1 \int_0^r |u_0|^{p-2}u_0 \mathrm{d}\lambda_\theta. \tag{5.8}$$

Segue desta equação que u_0 é estritamente decrescente em $(0,R)$. Portanto, $\lim_{r\to R} u_0(r) = 0$ implica $u_0 > 0$ em $(0,R)$. Além disso, fazendo

$$\xi(t) = |t|^{\frac{2-p}{p-1}}t \quad \text{e} \quad g(r) = \frac{\Lambda_1}{\omega_\alpha r^\alpha}\int_0^r |u_0|^{p-2}u_0 \mathrm{d}\lambda_\theta,$$

a equação (5.8) fornece $-u_0' = \xi \circ g$. Notando que $g \in C^1(0,R]$ e ξ é contínua em $\mathbb{R}$, temos $u_0 \in C^1(0,R]$. Para verificar a continuidade de u_0' em 0, usamos a condição $\theta > \alpha - 1$, para garantir que $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$.

5.2.2 A constante ótima

Nesta seção, vamos verificar que o supremo em (5.1) torna-se infinito para $\eta \ge \Lambda_1$. Por simplicidade, para $\mu, \eta \ge 0$ e $u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$, denotamos

$$\mathtt{M}(\mu,\eta,u) = \mu(1+\eta\|u\|^p_{L^p_\theta})^{\frac{1}{p-1}}, \tag{5.9}$$

e então

$$J^\eta_\mu(u) = \int_0^R \mathrm{e}^{\mathtt{M}(\mu,\eta,u)|u|^{p'}} \mathrm{d}\lambda_\theta \quad \text{e} \quad D_1 = \left\{u \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \ : \ \|u\|_{1,L^p_\alpha} \le 1\right\}, \tag{5.10}$$

onde $p' = p/(p-1)$. Com esta notação temos.

Teorema 5.2.1. *Sejam $\alpha \ge 1$, $p \ge 2$ e $\theta \ge 0$ tais que $\alpha - p + 1 = 0$ e $\theta > \alpha - 1$. Então, existe uma sequência $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset D_1$ tal que $J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(v_\varepsilon) \to \infty$, para todo $\eta \ge \Lambda_1$, se $\varepsilon \to 0$.*

Prova: Seja $\varphi_0 = u_0/\Lambda_1^{1/p}$, onde $u_0 \in X_R \cap C^1[0,R]$ com $u_0 > 0$ em $(0,R)$ satisfaz (5.5). É fácil verificar que ϕ_0 satisfaz

$$\Lambda_1 = \frac{\int_0^R |\varphi_0'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha}{\int_0^R |\varphi_0|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta} \quad \text{e} \quad \|\varphi_0\|_{1,L^p_\alpha} = 1. \tag{5.11}$$

Para cada $0 < \varepsilon < \delta$, definimos $\varphi_\varepsilon : (0,R) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln \dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}} & \text{se} \quad 0 \le r \le \varepsilon, \\ a \ln \dfrac{1}{r} + b & \text{se} \quad \varepsilon \le r \le \delta, \\ t_\varepsilon \left(c_\delta + \zeta(\varphi_0 - c_\delta)\right) & \text{se} \quad \delta \le r \le R, \end{cases} \tag{5.12}$$

onde

$$c_\delta = \varphi_0(\delta), \quad a = \frac{\left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}} - t_\varepsilon c_\delta}{\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\delta}}, \quad b = t_\varepsilon c_\delta - a \ln \frac{1}{\delta},$$

e a função $\zeta \in C^1[0,R]$ satisfaz $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta \equiv 0$ em $0 \le r \le \delta$, $\zeta \equiv 1$ em $2\delta \le r \le R$ e $|\zeta'| \le 2/\delta$ para $\delta > 0$ pequeno o suficiente. A constante t_ε é escolhida talque

$$t_\varepsilon \to 0, \quad t_\varepsilon^p \ln \frac{1}{\varepsilon} \to \infty \quad \text{e} \quad t_\varepsilon^{p+1} \ln \frac{1}{\varepsilon} \to 0, \quad \text{se} \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.13}$$

Por exemplo, podemos tomar $t_\varepsilon = (\ln(1/\varepsilon))^{-1/\rho}$, com $p < \rho < p+1$. Assim, temos φ_ε em $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Finalmente, seja

$$v_\varepsilon = \frac{\varphi_\varepsilon}{\| \varphi_\varepsilon \|_{1,L^p_\alpha}}.$$

A seguir, vamos verificar que $J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(v_\varepsilon) \to \infty$, para todo $\eta \ge \Lambda_1$, se $\varepsilon \to 0$. Para isso, usando $\alpha - p + 1 = 0$ e (5.13), para $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_\varepsilon^\delta |\varphi_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \omega_\alpha a^p \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\delta}\right) = 1 - \frac{t_\varepsilon c_\delta p}{\left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}}} \left(1 + o_\varepsilon(1)\right).$$

Além disso, para $\delta \to 0$,

$$\int_\delta^{2\delta} |\varphi_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = t_\varepsilon^p O(\delta^p)$$

e, uma vez que $\| \varphi_0 \|_{1,L^p_\alpha} = 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{2\delta}^R |\varphi_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha &= t_\varepsilon^p \left(1 - \int_0^{2\delta} |\varphi_0'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha\right) \\ &= t_\varepsilon^p \left(1 - O(\delta^p)\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^R |\varphi_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = 1 - \frac{t_\varepsilon c_\delta p}{\left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}}}\left(1+o_\varepsilon(1)\right) + t_\varepsilon^p\left(1+O(\delta^p)\right). \tag{5.14}$$

Portanto, combinando esta estimativa com (5.11), temos

$$\begin{aligned}
\Lambda_1\|v_\varepsilon\|_{L_\theta^p}^p &\geq \Lambda_1\left(\int_{2\delta}^R |v_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)\\
&= \frac{\Lambda_1 t_\varepsilon^p}{\|\varphi_\varepsilon\|_{1,L_\alpha^p}^p}\left(\int_0^R |\varphi_0|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta - \int_0^{2\delta}|\varphi_0|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)\\
&= t_\varepsilon^p\left(1+O(\delta^p)+O\left(t_\varepsilon^p\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ainda por (5.14), temos

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{1,L_\alpha^p}^{-p'} = 1 + \frac{p' t_\varepsilon c_\delta}{\left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}}}\left(1+o_\varepsilon(1)\right) - \frac{t_\varepsilon^p}{p-1}\left(1+O(\delta^p)\right). \tag{5.16}$$

Para $0 \leq r \leq \varepsilon$, temos

$$\varphi_\varepsilon(r) = \left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Portanto, usando (5.15) e (5.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\Lambda_1,v_\varepsilon)|v_\varepsilon|^{p'} &= (\theta+1)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\Lambda_1\|v_\varepsilon\|_{L_\theta^p}^p\right)^{\frac{1}{p-1}}\|\varphi_\varepsilon\|_{1,L_\alpha^p}^{-p'}\\
&\geq (\theta+1)\ln\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\theta+1}{p-1}t_\varepsilon^p\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)O(\delta^p)\\
&+ p'(\theta+1)\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}c_\delta t_\varepsilon\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}(1+o_\varepsilon(1)).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = 1/t_\varepsilon(\ln(1/\varepsilon))^{1/p}$, pela definição de t_ε em (5.13), temos $\varepsilon/\delta \to 0$ e $t_\varepsilon^p O(\delta^p)\ln(1/\varepsilon) = O(1)$, quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, $c_\delta = \varphi_0(0) + O(\delta)$. Assim, se $\eta \geq \Lambda_1$, levando em conta a estimativa acima, temos

$$\begin{aligned}
J_{\mu_{\alpha,\theta}}^\eta(v_\varepsilon) &\geq J_{\mu_{\alpha,\theta}}^{\Lambda_1}(v_\varepsilon) \geq \int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\Lambda_1,v_\varepsilon)|v_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\\
&\geq C\mathrm{e}^{p'(\theta+1)\omega_\alpha^{\frac{1}{p}}\varphi_0(0)t_\varepsilon\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}(1+o_\varepsilon(1))+O(1)}
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos $J_{\mu_{\alpha,\theta}}^\eta(v_\varepsilon) \to \infty$. ■

5.3 Sequência de extremais subcríticos

Nesta seção mostraremos que o supremo em (5.1) é finito para o caso subcrítico, isto é, quando a constante $\mu_{\alpha,\theta}$ é trocada por $\mu < \mu_{\alpha,\theta}$. Além disso, esse supremo possui funções extremais para cada $\mu < \mu_{\alpha,\theta}$. De fato, exibiremos uma sequência de funções extremais subcríticos que ainda é uma "sequência maximizante" para o caso crítico $\mu = \mu_{\alpha,\theta}$. Para isso, sejam D_1 e $J^{\eta}_{\mu}(u)$ definido por (5.10) e Λ_1 o primeiro autovalor definido por (5.4).

Teorema 5.3.1. *Sejam $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e $\theta \geq \alpha$ tais que $\alpha - p + 1 = 0$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ e $\eta \in [0,\Lambda_1)$, existe $u_\varepsilon \in X_R \cap C^1[0,R]$ com $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} = 1$ tal que*

$$J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u). \tag{5.17}$$

Prova: Seja $(u_j) \subset D_1$ uma sequência maximizante para o supremo acima, ou seja,

$$\lim_{j\to\infty} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_j) = \sup_{D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u).$$

A menos de um refinamento por subsequência, podemos assumir que (u_j) satisfaz

$$u_j \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ em } X_R, \quad u_j(r) \to u_\varepsilon(r) \text{ q.t.p em } (0,R) \quad \text{e} \quad u_j \to u_\varepsilon \text{ em } L^p_\theta.$$

Por simplicidade, denotaremos

$$f_j(r) = \mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon, \eta, u_j)|u_j(r)|^{p'} \quad \text{e} \quad f_\varepsilon(r) = \mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon, \eta, u_\varepsilon)|u_\varepsilon(r)|^{p'},$$

onde $\mathtt{M}$ é dado por (5.9). Assim, temos $\exp f_j(r) \to \exp f_\varepsilon(r)$ q.t.p em $(0,R)$, se $j \to \infty$. Neste ponto, afirmamos que, para cada $\varepsilon > 0$, o limite fraco u_ε é tal que $u_\varepsilon \not\equiv 0$. De fato, suponha por contradição que $u_\varepsilon \equiv 0$. Isto implica que $1 + \eta\|u_j\|^p_{L^p_\theta} \to 1$. Assim, visto que $\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon < \mu_{\alpha,\theta}$, podemos tomar $q > 1$ tal que $q\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon, \eta, u_j) \leq \mu_{\alpha,\theta}$, para j suficientemente grande, e segue do Teorema 3.3.1 que $\big(\exp f_j\big)$ é uniformemente limitada em L^q_θ, $q > 1$. Uma vez que $f_j(r) \to 0$ q.t.p em $(0,R)$, o teorema da convergência de Vitali assegura que $\exp f_j \to 1$ em L^1_θ. Isto implica que

$$|B_R|_\theta = \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u)$$

o que é uma contradição. Isto prova nossa afirmação. Uma vez que $u_\varepsilon \not\equiv 0$ e $\eta \in [0,\Lambda_1)$, temos

$$1 + \eta\|u_j\|^p_{L^p_\theta} \to 1 + \eta\|u_\varepsilon\|^p_{L^p_\theta} < \frac{1}{1 - \|u_\varepsilon\|^p_{1,L^p_\alpha}}, \quad \text{se} \quad j \to \infty.$$

Logo, para j grande o suficiente, podemos escrever

$$(1 + \eta\|u_j\|^p_{L^p_\theta})^{\frac{1}{p-1}} < \Big(1 - \|u_\varepsilon\|^p_{1,L^p_\alpha}\Big)^{-\frac{1}{p-1}} = P(\alpha, p, u_\varepsilon).$$

Portanto, escolhendo $m > 1$ tal que $m(\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon) \leq \mu_{\alpha,\theta}$, o Teorema 4.2.1, garante que $\big(\exp f_j\big)$ é uniformemente limitada em L^m_θ, $m > 1$. Visto que $f_j(r) \to f_\varepsilon(r)$ q.t.p em $(0,R)$, argumentando como acima, o teorema da convergência de Vitali implica que $\exp f_j \to \exp f_\varepsilon$ em L^1_θ. Dessa forma,

$$J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{D_1} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u). \tag{5.18}$$

Note que $u_j \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ implica $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} \le \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_{1,L^p_\alpha} \le 1$. Além disso, $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} < 1$ implica $J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(w_\varepsilon) \ge J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon)$, para $w_\varepsilon = u_\varepsilon/\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha}$. Logo, podemos assumir que $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} = 1$ e, visto que $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ é uniformemente convexo, deduzimos que $u_j \to u_\varepsilon$ em $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$. Dessa forma, podemos assumir que a sequência de extremais subcríticos (u_ε) satisfaz:

$$\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} = 1, \quad u_\varepsilon \ge 0 \quad \text{em} \quad (0,R) \quad \text{e} \quad u_j \to u_\varepsilon \quad \text{em} \quad X^{1,p}_R(\alpha,\theta).$$

Agora, visto que cada u_ε é uma função extremal, o teorema de multiplicadores de Lagrange afirma que, para todo $v \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$, u_ε satisfaz a equação

$$\int_0^R |u'_\varepsilon|^{p-2} u'_\varepsilon v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon} \int_0^R u_\varepsilon |u_\varepsilon|^{-\frac{p-2}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} v \, \mathrm{d}\lambda_\theta + c_\varepsilon \int_0^R |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon v \, \mathrm{d}\lambda_\theta, \tag{5.19}$$

na qual

$$\begin{cases} \mu_\varepsilon = (\mu_{\alpha,\theta} - \varepsilon)(1 + \eta \|u_\varepsilon\|^p_{L^p_\theta})^{\frac{1}{p-1}}, \\ b_\varepsilon = (1 + \eta \|u_\varepsilon\|^p_{L^p_\theta})/(1 + 2\eta \|u_\varepsilon\|^p_{L^p_\theta}), \\ c_\varepsilon = \eta/(1 + 2\eta \|u_\varepsilon\|^p_{L^p_\theta}), \\ d_\varepsilon = \displaystyle\int_0^R |u_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta. \end{cases} \tag{5.20}$$

Para garantir que $u_\varepsilon \in C^1[0,R]$, procedemos como em [19], veja Seção 5.2.1. Para resultados mais gerais recomendamos [64]. Usando a função teste v_ρ definida em (5.7) e fazendo $\rho \to 0$, a equação fraca (5.19) fornece a equação integral

$$\omega_\alpha r^\alpha (-|u'_\varepsilon(r)|^{p-2} u'_\varepsilon(r)) = \int_0^r f(u_\varepsilon(s)) \, \mathrm{d}\lambda_\theta, \quad \text{q.t.p em} \quad (0,R]. \tag{5.21}$$

onde

$$f(u_\varepsilon(s)) = \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon} |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} + c_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon.$$

Assim, aplicando a função $\xi(t) = |t|^{-\frac{p-2}{p-1}} t$ (esta função é a inversa de $t \mapsto |t|^{p-2} t$), a equação (5.21) implica

$$-u'_\varepsilon = \xi \circ g_\varepsilon, \tag{5.22}$$

onde

$$g_\varepsilon(r) := \frac{1}{\omega_\alpha r^\alpha} \int_0^r f(u_\varepsilon(s)) \, \mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Sendo g_ε contínua em $(0,R]$, segue que $u_\varepsilon \in C^1(0,R]$. Para $r = 0$; visto que $\theta > \alpha - 1$, temos $\lim_{r\to 0} g_\varepsilon(r) = 0$. Assim, $u'_\varepsilon(0) = 0$ e $u_\varepsilon \in X^{1,p}_R(\alpha,\theta) \cap C^1[0,R]$. ∎

Observação 5.3.1. *Observamos que* $u_\varepsilon \geq 0$ e (5.22) *implicam que* $u_\varepsilon \in C^1[0,R]$ *é uma função decrescente. Em particular, para cada* $\varepsilon > 0$, *podemos denotar*

$$a_\varepsilon := \max_{r\in[0,R]} u_\varepsilon(r) = u_\varepsilon(0).$$

O próximo resultado mostra que a sequência de extremais subcríticos (u_ε) do teorema acima, em um certo sentido, pode ser usada como sequência maximizante para o problema crítico. Mais precisamente,

Corolário 5.3.1. *Nas hipóteses do Teorema 5.3.1; seja* (u_ε) *a sequência de extremais satisfazendo* (5.17). *Então,* $\lim_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u)$.

Prova: É claro que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) \leq \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u).$$

Por outro lado, pelo Teorema 5.3.1, para cada $u \in D_1$, temos

$$J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon)$$

o qual implica

$$\sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon).$$

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u),$$

o que completa a prova. ■

Neste ponto, enfatizamos que a análise completa do supremo em (5.1) pode ser realizada através de um estudo detalhado da "sequência maximizante" (u_ε) construída no Teorema 5.3.1. A seguir, vamos provar uma alternativa de concentração ou compacidade, análoga ao Corolário 4.2.1, para o supremo (5.1) ao longo da sequência (u_ε). Isto ainda será uma consequência do Teorema 4.2.1. Inicialmente, a menos de um refinamento por subsequência, podemos supor

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ em } X^{1,p}_R(\alpha,\theta), \quad u_\varepsilon \to u_0 \text{ em } L^p_\theta \text{ e } u_\varepsilon(r) \to u_0(r) \text{ q.t.p em } (0,R). \tag{5.23}$$

Com esta notação temos o seguinte.

Teorema 5.3.2. *Nas hipóteses do Teorema 5.3.1; seja* (u_ε) *a sequência de extremais subcríticos satisfazendo* (5.17) e (5.23). *Então, ocorre uma das seguinte alternativas:*

(a) *Compacidade, isto é,* $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \not\equiv 0$ *em* $X^{1,p}_R(\alpha,\theta)$ e $J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0) = \sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u)$, *ou*

(b) *Concentração, isto é,* (u_ε) *é uma sequência concentrada na origem.*

Além disso, no caso **(a)**, *temos* $u_0 \in C^1[0,R]$.

Prova: Inicialmente, denotamos

$$f_\varepsilon(r) := \mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'} \quad \text{e} \quad f_0(r) := \mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_0)|u_0|^{p'}. \tag{5.24}$$

A prova é dada analisando dois casos:

(I). Suponha $u_0 \not\equiv 0$ em (5.23). Como $u_\varepsilon \to u_0$ em L^p_θ, para cada $0 \le \eta < \Lambda_1$,

$$\mathtt{M}(1,\eta,u_\varepsilon) \to \mathtt{M}(1,\eta,u_0) < (1-\|u_0\|^p_{1,L^p_\alpha})^{-\frac{1}{p-1}} = P(\alpha,p,u_0).$$

Portanto, podemos tomar $m>1$ tal que $1<q_m := \mathtt{M}(m,\eta,u_\varepsilon) < P(\alpha,p,u_0)$, para $\varepsilon>0$ pequeno o suficiente. Assim, o Teorema 4.2.1 implica que $(\exp f_\varepsilon)$ é uniformemente limitada em L^m_θ. Ainda, visto que por (5.23), $f_\varepsilon(r) \to f_0(r)$ q.t.p em $(0,R)$, o teorema da convergência de Vitali garante que $\exp f_\varepsilon \to \exp f_0$ em L^1_θ. Ou equivalente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_\varepsilon) = J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0).$$

No entanto, pelo Corolário 5.3.1

$$\sup_{u\in D_1} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) = \lim_{\varepsilon\to 0} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) \le \lim_{\varepsilon\to 0} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_\varepsilon) = J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0).$$

Portanto, temos $J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0) = \sup_{u\in D_1} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u)$. Ou seja, ocorre a alternativa **(a)**. Resta verificar que $u_0 \in C^1[0,R]$. Para isso, como u_0 é uma função extremal, pelo teorema de multiplicadores de Lagrange, u_0 satisfaz a equação fraca

$$\int_0^R |u_0'|^{p-2}u_0'v'\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{b_0}{d_0}\int_0^R |u_0|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_0|u_0|^{p'}}v\,\mathrm{d}\lambda_\theta + c_0\int_0^R |u_0|^{p-2}u_0 v\,\mathrm{d}\lambda_\theta, \quad \forall\, v\in X^{1,p}_R(\alpha,\theta),$$

onde

$$\begin{cases} \mu_0 = \mu_{\alpha,\theta}(1+\eta\|u_0\|^p_{L^p_\theta})^{\frac{1}{p-1}}, \\ b_0 = (1+\eta\|u_0\|^p_{L^p_\theta})/(1+2\eta\|u_0\|^p_{L^p_\theta}), \\ c_0 = \eta/(1+2\eta\|u_0\|^p_{L^p_\theta}), \\ d_0 = \displaystyle\int_0^R |u_0|^{p'}\mathrm{e}^{\mu_0|u_0|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta. \end{cases}$$

Portanto, a regularidade de u_0 segue como no Teorema 5.3.1.

(II) Se $u_0 \equiv 0$ em (5.23), veremos que (u_ε) é concentrada na origem. O argumento para isto é análogo ao que usamos no Corolário 4.2.1, parte **(b)**. Em vista disso, vamos omitir alguns detalhes repetitivos. Segundo este, argumentando por contradição, podemos tomar $0<A<1$ e $r_0>0$ tais que

$$\mu_{\alpha,\theta}|u_\varepsilon|^{p'} \le (\theta+1)\ln\frac{r_0}{r}\left[\left(\frac{\ln R-\ln r_0}{\ln r_0-\ln r}\right)^{\frac{1}{p'}} + (1-A)^{1/p}\right]^{p'},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Uma vez que $u_\varepsilon \to 0$ em L^p_θ, a estimativa acima fornece

$$\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'} \leq (\theta+1)(1+\delta)((1-A)^{\frac{1}{p-1}}+\delta_0)\ln\frac{r_0}{r}, \quad 0<r\leq r_1, \tag{5.25}$$

onde $r_1 < r_0$ é tomado pequeno o suficiente, $\delta > 0$ e $\delta_0 > 0$ foram escolhidos satisfazendo

$$(1+\delta)^{-1} - (1-A)^{\frac{1}{p-1}} > \delta_0.$$

Agora, seja $\rho > 0$ fixado arbitrariamente. Por (5.25), reduzindo r_1 se necessário, concluímos

$$\int_0^{r_1} \mathrm{e}^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq \int_0^{r_1} \mathrm{e}^{(\theta+1)(1+\delta)((1-A)^{\frac{1}{p-1}}+\delta_0)\ln\frac{r_0}{r}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq c' r_1^{c_\theta} < \rho, \tag{5.26}$$

onde $c' > 0$ é uma constante positiva, que só depende de α e θ, e

$$c_\theta = \theta - (\theta+1)(1+\delta)((1-A)^{\frac{1}{p-1}}+\delta_0)+1.$$

Note que $c_\theta > 0$, tendo em vista as escolhas de δ e δ_0.

Agora, para cada $u \in D_1$, denotemos

$$J_1(u) = \int_0^{r_1} \mathrm{e}^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u)|u|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \quad \text{e} \quad J_2(u) = \int_{r_1}^{R} \mathrm{e}^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u)|u|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Levando em conta (5.23), o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dá

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_2(u_\varepsilon) = J_2(u_0) \geq J_2(u_\varepsilon) - \rho, \tag{5.27}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Combinando (5.26) e (5.27) segue-se

$$J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0) \geq J_2(u_0) \geq J_2(u_\varepsilon) - \rho \geq J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_\varepsilon) - 2\rho \geq J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) - 2\rho. \tag{5.28}$$

Usando (5.28) e o Corolário 5.3.1 e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\sup_{u\in D_1} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \leq J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0) + 2\rho.$$

Uma contradição, pois estamos supondo $u_0 \equiv 0$ e $\rho > 0$ é arbitrário. Logo, u_ε é concentrada na origem. ∎

Corolário 5.3.2. *Nas hipóteses do Teorema 5.3.1; se a sequência de números reais $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, definida por $a_\varepsilon = \max_{r\in[0,R]}|u_\varepsilon(r)|$, é limitada, então vale a alternativa **(a)** do Teorema 5.3.2.*

Prova: Se (a_ε) é limitada, devido à inclusão $X^{1,p}_R(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^p_\theta$ e à igualdade $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} = 1$, temos $(\exp f_\varepsilon)$ uniformemente limitada em L^p_θ, para todo $p > 1$ e $f_\varepsilon(r) \to f_0(r)$ q.t.p em $(0,R)$. Aqui, f_ε e f_0 são definidas como em (5.24). Assim, como na parte (I) do Teorema 5.3.2, o teorema da convergência de Vitali e o Corolário 5.3.1 fornecem $J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u_0) = \sup_{u\in D_1} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}}(u)$. Isto implica que $u_0 \not\equiv 0$ e o resultado segue como no caso (I) acima. ∎

Observação 5.3.2. *De acordo com os resultados acima, o problema de investigação do supremo* (5.1) *para* $\eta \in [0, \infty)$, *pode ser completado ao analisarmos o caso em que*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad em \quad X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \quad e \quad a_\varepsilon \to \infty, \quad se \quad \varepsilon \to 0. \tag{5.29}$$

De fato. Para $\eta \geq \Lambda_1$, *o Teorema 5.2.1 garante que este supremo torna-se infinito. No caso em que* $\eta \in [0, \Lambda_1)$, *segundo o Teorema 5.3.2 e o Corolário 5.3.2; se a condição* (5.29) *falha, então o supremo em questão é finito e possui uma função extremal* $u_0 \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta) \cap C^1[0, R]$.

De agora em diante, vamos nos dedicar ao (último) caso dado por (5.29). Esta é uma situação bastante complexa e; para sua análise, necessitaremos de várias resultados a respeito da classe de operadores definida por (5.3) aliados à técnicas de *blow up analysis*.

5.4 Estimativa uniforme para uma família de soluções

Nesta seção provaremos estimativas uniformes para uma família de soluções de um problema associado à classe de operadores definida por (5.3). Mais precisamente, investigaremos do problema

$$\begin{cases} Lu + f + \eta |u|^{p-2}u = 0 \quad \text{em} \quad (0, R) \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

onde $f \in L^1_\theta$ e $Lu = -r^{-\theta}(r^\alpha |u'(r)|^{p-2} u'(r))'$, com α, p, θ e η satisfazendo as condições

$$\alpha - p + 1 = 0, \quad \theta \geq \alpha \quad \text{e} \quad \eta \in [0, \Lambda_1), \tag{5.30}$$

para Λ_1 dado por (5.4). Enfatizamos que durante essa seção estaremos assumindo estas condições sobre α, p e θ.

Estimativas análogas às que iremos apresentar, no caso clássico, foram inicialmente obtidas por H. Brezis e F. Merle [12], depois desenvolvidas por M. Struwe [60] e; mais recentemente, Y. Yang [67]. Aqui, estenderemos estes resultados para a classe de problema acima.

Lema 5.4.1. *Seja* $g \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta)$ *uma função decrescente satisfazendo a equação*

$$\int_0^R |g'|^{p-2} g' v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^R f v \, \mathrm{d}\lambda_\theta, \quad \forall\, v \in X_R^{1,p}(\alpha, \theta), \tag{5.31}$$

onde $f \in L^1_\theta$. *Então, para qualquer* $0 < \chi < \mu_{\alpha,\alpha} / \|f\|_{L^1_\theta}^{1/\alpha}$, *temos* $\exp(\chi g) \in L^1_\alpha$ *com*

$$\int_0^R e^{\chi g} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha \leq C(\alpha, \chi) |B_R|_\alpha. \tag{5.32}$$

Além disso, $g \in X_R^{1,q}(\alpha, \theta)$ *para qualquer* $1 < q < p$ *com*

$$\|g\|_{1, L^q_\alpha} \leq C(\alpha, q, R, \|f\|_{L^1_\theta}). \tag{5.33}$$

Prova: Para cada $t \geq 1$, definimos $g^t = \min\{g,t\}$. Usando g^t como função teste em (5.31) seque-se

$$\int_0^R |\nabla g|^{p-2}\nabla g \nabla g^t \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \leq t\|f\|_{L^1_\theta}. \tag{5.34}$$

Uma vez que g é uma função decrescente, para cada $t \geq 1$, existe um número $\rho = \rho(t)$ tal que $g \geq t$ no intervalo $[0,\rho]$. Portanto, $g^t(r) = t$ em $[0,\rho]$ e $g^t(r) = g(r)$ para qualquer $r \geq \rho$. Por (5.34), obtemos

$$\inf_{\{\varphi \in X_R : \varphi_{|[0,\rho]=t}\}} \int_0^R |\nabla\varphi|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \leq \int_0^R |\nabla g^t|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \leq t\|f\|_{L^1_\theta}. \tag{5.35}$$

Pela compacidade da inclusão $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^m_\kappa$, $\kappa \geq 0$ e $1 < m < \infty$, podemos verificar que o ínfimo acima possui uma função extremal $\varphi_0 \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ tal que $\varphi_0(r) = t$ no intervalo $(0,\rho)$. A equação de Euler-Lagrange associada com este ínfimo tem única solução dada por

$$\varphi_0(r) = \begin{cases} \dfrac{t\ln\frac{R}{r}}{\ln\frac{R}{\rho}} & \text{em} \quad (\rho,R), \\ t & \text{em} \quad (0,\rho). \end{cases} \tag{5.36}$$

Calculando o valor $\|\varphi_0\|^p_{1,L^p_\alpha}$, (5.35) fornece

$$\rho \leq R\mathrm{e}^{-c_1 t}, \text{ onde } \quad c_1 = (\omega_\alpha/\|f\|_{L^1_\theta})^{1/\alpha}.$$

Uma vez que $\{g \geq t\} = (0,\rho)$, a estimativa anterior implica em

$$\lambda_\alpha(\{g \geq t\}) = |B_\rho|_\alpha \leq \mathrm{e}^{-Bt}|B_R|_\alpha \tag{5.37}$$

onde $B = \mu_{\alpha,\alpha}/\|f\|^{1/\alpha}_{L^1_\theta}$. Agora, (5.32) segue da seguinte afirmação.

Afirmação 5.4.1. *Suponha que, para qualquer $t \geq 1$, valha*

$$\lambda_\alpha(\{r \in (0,R) : g(r) \geq t\}) \leq A\mathrm{e}^{-Bt}|B_R|_\alpha \tag{5.38}$$

com constantes uniformes $A,B \in \mathbb{R}$. Então, (5.32) é válida para qualquer $\chi < B$ com

$$C \leq \exp\chi + 2A\zeta^{(B-\chi)/2}/((B-\chi)\ln\zeta),$$

onde $\zeta = (\chi+B)/2\chi$.

De fato, seja $\zeta = \frac{\chi+B}{2\chi} > 1$. Então, por (5.38),

$$\begin{aligned} \int_{\{g\geq 1\}} \mathrm{e}^{\chi g(r)}\,\mathrm{d}\lambda_\alpha &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\chi\zeta^{j+1}}\lambda_\alpha(\{\zeta^j \leq g(r) \leq \zeta^{j+1}\}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\chi\zeta^{j+1}}\lambda_\alpha(\{\zeta^j \leq g(r)\}) \\ &\leq A\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{(\chi\zeta-B)\zeta^j}|B_R|_\alpha. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Observamos que $\chi\zeta - B = \frac{\chi - B}{2} < 0$. Assim, uma vez que $\zeta^j \leq \exp(\zeta^j)$ para qualquer $j \geq 0$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{e}^{(\chi\zeta - B)\zeta^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{(\chi\zeta - B)j} = \frac{1}{1-\zeta^{\chi\zeta - B}} \leq \frac{2\zeta^{(B-\chi)/2}}{(B-\chi)\ln\zeta}.$$

Como $\int_{\{g\leq 1\}} \mathrm{e}^{\chi g}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha \leq \mathrm{e}^{\chi}|B_R|_\alpha$, esta última estimativa e (5.39) comprovam nossa afirmação.

Agora, escolhendo $A = 1$ e $B = \mu_{\alpha,\alpha}/\|f\|_{L^1_\theta}^{1/\alpha}$ e usando (5.37), então a Afirmação 5.4.1 implica em (5.32).

Nos resta averiguar a estimativa (5.33). Para isso, usamos a função teste $\ln(1+2g)/(1+g)$ na equação (5.31) para obter

$$\int_0^R \frac{|\nabla g|^p}{(1+g)(1+2g)}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha \leq \|f\|_{L^1_\theta} \ln 2. \tag{5.40}$$

Pela desigualdade de Young, para qualquer $1 < q < p$, temos

$$\begin{aligned} |\nabla g|^q &\leq \frac{|\nabla g|^p}{((1+g)(1+2g))} + ((1+g)(1+2g))^{\frac{q}{p-q}} \\ &\leq \frac{|\nabla g|^p}{((1+g)(1+2g))} + C(\alpha, q, \|f\|_{L^1_\theta})\, \mathrm{e}^{(\mu_{\alpha,\alpha} g)/2\|f\|_{L^1_\theta}^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto, combinando (5.32) e (5.40) obtemos (5.33). ∎

Teorema 5.4.1. *Para cada $\varepsilon > 0$, seja $g_\varepsilon \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ uma função decrescente satisfazendo*

$$\int_0^R |g_\varepsilon'|^{p-2} g_\varepsilon' v'\, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^R f_\varepsilon v\, \mathrm{d}\lambda_\theta + \eta \int_0^R |g_\varepsilon|^{p-2} g_\varepsilon v\, \mathrm{d}\lambda_\theta,\ \forall\, v \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta), \tag{5.41}$$

onde (f_ε) é limitada em L^1_θ e $0 \leq \eta < \Lambda_1$. Então, $g_\varepsilon \in X_R^{1,q}(\alpha,\theta)$ para qualquer $p/2 < q < p$ e

$$\|g_\varepsilon\|_{1,L^q_\alpha} \leq C(\alpha, q, R, c_0)$$

onde c_0 é uma cota superior para (f_ε) em L^1_θ.

Prova: Se $\eta = 0$ isto segue imediatamente do Lema 5.4.1.

Para o caso geral $0 < \eta < \Lambda_1$, primeiro afirmamos que (g_ε) é limitada em L^{p-1}_θ. Para provar isso, argumentamos por contradição. Suponhamos que $\|g_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta} \to \infty$, se $\varepsilon \to 0$. Defina, $h_\varepsilon = g_\varepsilon/\|g_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta}$. Obviamente, $\|h_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta} = 1$ e $h_\varepsilon'(r) = g_\varepsilon'(r)/\|g_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta}$. Pela equação (5.41) podemos verificar que h_ε satisfaz

$$\int_0^R |h_\varepsilon'|^{p-2} h_\varepsilon' v'\, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^R \overline{f}_\varepsilon v\, \mathrm{d}\lambda_\theta,\ \forall\, v \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta), \tag{5.42}$$

onde

$$\overline{f}_\varepsilon = \frac{1}{\|g_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta}} \left(f_\varepsilon + \eta |g_\varepsilon|^{p-1}\right).$$

Note que $(\overline{f}_\varepsilon)$ é limitada em L^1_θ. Usando o caso especial em que $\eta = 0$, temos (h_ε) limitada em $X^{1,q}_R(\alpha,\theta)$, sempre que $\theta \geq \alpha - q$, veja Lema 2.3.1. Em particular, $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ em $X^{1,q}_R(\alpha,\theta)$. Uma vez que $p > q$ e $\alpha - p + 1 = 0$, temos $\alpha - q + 1 > 0$. Logo, fica definido o expoente crítico

$$p^* = p^*(\alpha, q, \theta) = \frac{(\theta+1)q}{\alpha - q + 1}.$$

Visto que, por (5.30), $\theta + 1 \geq p$ e, por hipótese, $q > p/2$, temos $p - 1 < p^*$. Segue do Corolário 2.3.2 que a inclusão $X^{1,q}_R(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^{p-1}_\theta$ é compacta. Assim, $h_\varepsilon \to h$ em L^{p-1}_θ e $h_\varepsilon(r) \to h(r)$ q.t.p em $(0,R)$. Logo, temos $\|h\|_{L^{p-1}_\theta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|h_\varepsilon\|_{L^{p-1}_\theta} = 1$. Por outro lado, a equação (5.42) implica que h satisfaz

$$\int_0^R |h'|^{p-2} h' v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \eta \int_0^R |h|^{p-2} h v \, \mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Como $\eta < \Lambda_1$, temos $h \equiv 0$ o que contraria $\|h\|_{L^{p-1}_\theta} = 1$. Portanto (g_ε) é limitada em L^{p-1}_θ e podemos escrever a equação (5.41) como

$$\int_0^R |g'_\varepsilon|^{p-2} g'_\varepsilon v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^R \tilde{f}_\varepsilon v \, \mathrm{d}\lambda_\theta,$$

com $\tilde{f}_\varepsilon = f_\varepsilon + \eta |g_\varepsilon|^{p-2} g_\varepsilon$ limitada em L^1_θ. Assim, o resultado geral segue do caso particular em que $\eta = 0$ trocando f_ε por $\tilde{f}_\varepsilon$. ■

5.5 Blow up analysis

Nesta seção usaremos técnicas de *blow up analysis* para analisar o caso restante no supremo (5.1), veja a Observação 5.3.2. Isto é, estaremos supondo

$$u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad X^{1,p}_R(\alpha,\theta) \quad \text{e} \quad a_\varepsilon \to \infty, \quad \text{se} \quad \varepsilon \to 0,$$

onde (u_ε) é a sequência de extremais subcríticos dada pelo Teorema 5.3.1. Ainda, durante esta seção estaremos supondo que $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e $\theta \geq 0$ são tais que

$$\alpha - p + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \theta \geq \alpha. \tag{5.43}$$

Na situação acima, as constantes μ_ε, b_ε e c_ε em (5.20) satisfazem

$$\mu_\varepsilon \to \mu_{\alpha,\theta}, \quad b_\varepsilon \to 1 \quad \text{e} \quad c_\varepsilon \to \eta, \quad \text{se} \quad \varepsilon \to 0.$$

Nossa análise será concluída por uma série de Lemas. Inicialmente, para investigar o comportamento de cada u_ε em torno de $r = 0$, vamos considerar as seguintes funções auxiliares.

Para cada $\varepsilon > 0$, seja r_ε definido por

$$r_\varepsilon^{\theta+1} = \frac{d_\varepsilon}{a_\varepsilon^{p'} b_\varepsilon \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon a_\varepsilon^{p'}}}, \tag{5.44}$$

onde $p' = p/(p-1)$ e d_ε é dado em (5.20). Assim, para $0 < r \leq r_\varepsilon R$, definimos

$$\begin{cases} v_\varepsilon(r) = \dfrac{u_\varepsilon(r_\varepsilon r)}{a_\varepsilon}, \\ w_\varepsilon(r) = a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\left(u_\varepsilon(r_\varepsilon r) - a_\varepsilon\right). \end{cases} \tag{5.45}$$

Para começar, temos o seguinte.

Lema 5.5.1. *Sejam r_ε, v_ε e w_ε dados por* (5.44) *e* (5.45)*. Então*

(i) *Para qualquer $0 < \mu < \mu_{\alpha,\theta}$, temos $\lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon^{\theta+1} \mathrm{e}^{\mu a_\varepsilon^{p'}} = 0$. Em particular, $\lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon = 0$,*

(ii) *Se $\varepsilon \to 0$, temos $v_\varepsilon \to 1$ em $C^1_{loc}[0,\infty)$ e $w_\varepsilon \to w$ em $C^0_{loc}[0,\infty)$, onde w é dada por*

$$w(r) = -\frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln\left(1 + c_{\alpha,\theta} r^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right), \quad \text{com} \quad c_{\alpha,\theta} = \left(\frac{\omega_\theta}{\theta+1}\right)^{1/\alpha},$$

(iii) *A função w do item (ii) satisfaz $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta} w(r)}\,\mathrm{d}\lambda_\theta = 1$.*

Prova: **(i)** Note que $\mu < \mu_{\alpha,\theta}$ e $\mu_\varepsilon \to \mu_{\alpha,\theta}$ implicam em $(\mu_\varepsilon - \mu)(|u_\varepsilon|^{p'} - a_\varepsilon^{p'}) \leq 0$, para ε suficientemente pequeno. Assim, pela definição r_ε, temos

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^{\theta+1}\mathrm{e}^{\mu a_\varepsilon^{p'}} &= \frac{1}{b_\varepsilon a_\varepsilon^{p'}} \int_0^R |u_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{(\mu_\varepsilon-\mu)(|u_\varepsilon|^{p'} - a_\varepsilon^{p'}) + \mu|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \\ &\leq \frac{1}{b_\varepsilon a_\varepsilon^{p'}} \int_0^R |u_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{\mu|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Escolhendo $m > 1$ tal que $m\mu < \mu_{\alpha,\theta}$ e aplicando a desigualdade de Hölder, segue

$$\int_0^R |u_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{\mu|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq \left(\int_0^R \mathrm{e}^{m\mu|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{mp'}{m-1}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq c,$$

onde na última estimativa usamos o Teorema 3.3.1 e a inclusão contínua $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^{\frac{mp'}{m-1}}$. Assim, **(i)** segue de (5.46), lembrando que $b_\varepsilon \to 1$ e $a_\varepsilon \to \infty$.

(ii) Usando (5.19) podemos verificar que cada v_ε satisfaz

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |v_\varepsilon'|^{p-2} v_\varepsilon' z'\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = &\frac{1}{a_\varepsilon^p} \int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon(|u_\varepsilon(r_\varepsilon r)|^{p'} - a_\varepsilon^{p'})} z\,\mathrm{d}\lambda_\theta \\ &+ r_\varepsilon^{\theta+1} c_\varepsilon \int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |v_\varepsilon|^{p-2} v_\varepsilon z\,\mathrm{d}\lambda_\theta, \end{aligned} \tag{5.47}$$

para todo $z(r) = v(r_\varepsilon r)$ com $v \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Para cada $\rho > 0$, escolhendo a função teste v_ρ, dada por (5.7), na equação acima e fazendo $\rho \to 0$, podemos concluir

$$\omega_\alpha |v_\varepsilon'(r)|^{p-1} = \frac{1}{a_\varepsilon^p}\frac{1}{r^\alpha}\int_0^r |v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon(|u_\varepsilon(r_\varepsilon s)|^{p'}-a_\varepsilon^{p'})}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + r_\varepsilon^{\theta+1}c_\varepsilon \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda_\theta. \quad (5.48)$$

Fixado $r_0 > 0$ arbitrário, em vista do item **(i)**, temos $r_0 \le R/r_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente. Além disso, temos $\theta \ge \alpha$, $|v_\varepsilon| \le 1$ e $(|u_\varepsilon|^{p'}(r_\varepsilon s) - a_\varepsilon^{p'}) \le 0$. Assim, como $a_\varepsilon \to \infty$, $c_\varepsilon \to \eta$ e $r_\varepsilon^{\theta+1} \to 0$, a equação (5.48) implica que $v_\varepsilon' \to 0$ uniformemente em $[0,r_0]$. Uma vez que $v_\varepsilon(0) = 1$ para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $v_\varepsilon \to 1$ em $C^1_{loc}[0,\infty)$.

Para analisar o comportamento de w_ε, argumentamos como acima. A equação (5.19) fornece

$$\int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |w_\varepsilon'|^{p-2}w_\varepsilon' z'\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon(|u_\varepsilon(r_\varepsilon r)|^{p'}-a_\varepsilon^{p'})} z\,\mathrm{d}\lambda_\theta + a_\varepsilon r_\varepsilon^{\theta+1}c_\varepsilon \int_0^{\frac{R}{r_\varepsilon}} |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon z\,\mathrm{d}\lambda_\theta$$

e, portanto

$$\omega_\alpha |w_\varepsilon'(r)|^{p-1} = \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r |v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon(|u_\varepsilon(r_\varepsilon s)|^{p'}-a_\varepsilon^{p'})}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + a_\varepsilon r_\varepsilon^{\theta+1}c_\varepsilon \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda_\theta. \quad (5.49)$$

Por **(i)**, obtemos $a_\varepsilon r_\varepsilon^{\theta+1}c_\varepsilon \to 0$. Assim, por (5.49), temos (w_ε') limitada em $C[0, r_0]$ para qualquer $r_0 > 0$. Uma vez que $w_\varepsilon(0) = 0$, para qualquer $\varepsilon > 0$, concluímos que (w_ε) é equicontínua e uniformemente limitada em $C[0, r_0]$. Portanto, o teorema de Ascoli-Arlezà nos dá $w_\varepsilon \to w$ uniformemente em $[0, r_0]$. Sendo $r_0 > 0$ arbitrário, segue que $w_\varepsilon \to w$ em $C^0_{loc}[0,\infty)$. Resta verificar que w é dada pela expressão do item **(ii)**. Um cálculo simples fornece

$$|u_\varepsilon|^{p'}(r_\varepsilon s) - a_\varepsilon^{p'} = p' w_\varepsilon(s)\,(1 + O_\varepsilon(|v_\varepsilon| - 1)). \quad (5.50)$$

Aplicando a função $t \mapsto |t|^{-\frac{p-2}{p-1}}t$ em (5.49) e integrando em $(0, r)$, podemos verificar

$$w_\varepsilon(r) = -\int_0^r \left(\frac{1}{\omega_\alpha t^\alpha}\int_0^t \left(|v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon(|u_\varepsilon(r_\varepsilon s)|^{p'}-a_\varepsilon^{p'})} + a_\varepsilon r_\varepsilon^{\theta+1}c_\varepsilon |v_\varepsilon|^{p-2}v_\varepsilon\right)\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t.$$

Uma vez que $w_\varepsilon \to w$ em $C^0_{loc}[0,\infty)$ e $v_\varepsilon \to 1$ em $C^1_{loc}[0,\infty)$, levando em conta (5.50) e fazendo $\varepsilon \to 0$, o teorema da convergência dominada de Lebesgue garante a igualdade

$$w(r) = -\int_0^r \left(\frac{1}{\omega_\alpha t^\alpha}\int_0^t \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta}w(s)}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t.$$

Portanto, w é uma função diferenciável e satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\omega_\alpha(r^\alpha|w'|^{p-2}w')' = \omega_\theta r^\theta\, \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta}w(r)} & \text{em} \quad [0,\infty), \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 0. \end{cases}$$

É fácil verificar que $w(r)$, dado pela expressão do item **(ii)**, satisfaz esta equação. Por unicidade de solução segue o resultado.

(iii) Inicialmente, relembramos a igualdade

$$\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y>0.$$

Esta integral é conhecida como *beta integral* sobre a semi-reta positiva. Além disso, a função gama de Euler satisfaz $\Gamma(1)=1$ e $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, para $x>0$. Para detalhes sobre estes fatos, recomendamos [3].

Em vista dos resultados acima, executando a mudança de variável $s=c_{\alpha,\theta}r^{\frac{\theta+1}{p-1}}$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta}w(r)}\,\mathrm{d}\lambda_\theta &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda_\theta}{\left(1+c_{\alpha,\theta}r^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)^p}\\
&= (p-1)\int_0^\infty \frac{s^{p-2}}{(1+s)^p}\mathrm{d}s \qquad (5.51)\\
&= (p-1)\frac{\Gamma(p-1)\Gamma(1)}{\Gamma(p)} = 1.
\end{aligned}$$

■

Neste ponto, enfatizamos que o resultado do item **(ii)** involve um problema de classificação de soluções para a classe de operadores definidas por (5.3). Resultados semelhantes, no caso clássico, pode ser encontrados em W. Chen e C. Li [18].

O próximo resultado fornece um limite superior para o supremo (5.1).

Lema 5.5.2. $\lim_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) \le |B_R|_\theta + \limsup_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon/a_\varepsilon^{p'}$. *Em particular,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a_\varepsilon}{d_\varepsilon}=0.$$

Prova: Para cada $A>1$, definimos $u_\varepsilon^A=\min\{u_\varepsilon, a_\varepsilon/A\}$. Afirmamos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^R \left|\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{A-1}{A} \qquad (5.52)$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^R \left|\nabla u_\varepsilon^A\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{1}{A}. \qquad (5.53)$$

De fato, como $\|u_\varepsilon\|_{L^p_\theta}\to 0$, usando a função teste $v=(u_\varepsilon-a_\varepsilon/A)^+$ em (5.19) (onde $u^+=\max\{u,0\}$), para $\overline{R}>0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^R \left|\nabla\left(u_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha &= \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon}\int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}(u_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A})^+\,\mathrm{d}\lambda_\theta\\
&+ c_\varepsilon\int_0^R |u_\varepsilon|^{p-1}\left(u_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\mathrm{d}\lambda_\theta\\
&\ge \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon}\int_0^{r_\varepsilon\overline{R}} |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}\left(u_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\mathrm{d}\lambda_\theta + o_\varepsilon(1)\\
&= \int_0^{\overline{R}}\left(v_\varepsilon-\frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+|v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon p' w_\varepsilon(s)(1+o_\varepsilon(1))}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + o_\varepsilon(1).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo item **(ii)** do Lema 5.5.1, temos

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^R \left|\nabla\left(u_\varepsilon - \frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha \geq \frac{A-1}{A}\int_0^{\overline{R}} \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta}w(s)}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Uma vez que $\overline{R}$ foi tomado arbitrário, segue do item **(iii)** do Lema 5.5.1 que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^R \left|\nabla\left(u_\varepsilon - \frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha \geq \frac{A-1}{A}. \tag{5.54}$$

De forma análoga, usando a função teste $v = u_\varepsilon^A$ em (5.19), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^R |\nabla u_\varepsilon^A|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha &= \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon}\int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}u_\varepsilon^A\,\mathrm{d}\lambda_\theta + c_\varepsilon\int_0^R |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon^A\,\mathrm{d}\lambda_\theta\\
&\geq \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon}\int_0^{r_\varepsilon\overline{R}} |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}u_\varepsilon^A\,\mathrm{d}\lambda_\theta + o_\varepsilon(1)\\
&= \int_0^{\overline{R}} \frac{u_\varepsilon^A(r_\varepsilon s)}{a_\varepsilon}|v_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon p' w_\varepsilon(s)(1+o_\varepsilon(1))}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + o_\varepsilon(1).
\end{aligned}$$

Note $u_\varepsilon^A(r_\varepsilon s)/a_\varepsilon \to 1/A$. Assim,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^R |\nabla u_\varepsilon^A|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha \geq \frac{1}{A}\int_0^{\overline{R}} \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta}w(s)}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \geq \frac{1}{A}. \tag{5.55}$$

Note que $\|u_\varepsilon\|_{1,L^p_\alpha} = 1$ implica

$$\int_0^R |\nabla u_\varepsilon^A|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha + \int_0^R \left|\nabla\left(u_\varepsilon - \frac{a_\varepsilon}{A}\right)^+\right|^p \mathrm{d}\lambda_\alpha = 1.$$

Combinando esta igualdade com (5.54) e (5.55), podemos verificar que (5.52) e (5.53) são válidas.

Agora, se $\limsup_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon/a_\varepsilon^{p'} = \infty$, a primeira parte do Lema 5.5.2 é claramente verdadeira. Suponha $\limsup_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon/a_\varepsilon^{p'} < \infty$. Obviamente $A|u_\varepsilon| \geq a_\varepsilon$ em $\{u_\varepsilon > a_\varepsilon/A\}$, logo

$$\begin{aligned}
J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_{\{u_\varepsilon\leq a_\varepsilon/A\}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon^A|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + \int_{\{u_\varepsilon > a_\varepsilon/A\}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\\
&\leq \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon^A|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + d_\varepsilon\frac{A^{p'}}{a_\varepsilon^{p'}}\int_0^R \frac{|u_\varepsilon|^{p'}}{d_\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.\\
&\leq \int_0^R \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon^A|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta + d_\varepsilon\frac{A^{p'}}{a_\varepsilon^{p'}}.
\end{aligned}$$

Por (5.53), temos $\|A^{1/p}\nabla u_\varepsilon^A\|_{L^p_\alpha} \leq 1$, para cada $A > 1$. Assim, $\left(\exp\left(\mu_\varepsilon|u_\varepsilon^A|^{p'}\right)\right)$ é limitada em L^δ_θ com $\delta = A^{\frac{1}{p-1}}$. Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J^\eta_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) \leq |B_R|_\theta + A^{p'}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d_\varepsilon}{a_\varepsilon^{p'}}.$$

Finalmente, fazendo $A \to 1$, concluímos a primeira parte do Lema 5.5.2.

Por contradição, suponha que $(d_\varepsilon/a_\varepsilon)$ é limitada. Neste caso, a primeira parte do Lema 5.5.2 e o Lema 5.3.1 fornecem

$$\sup_{u\in S_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \leq |B_R|_\theta + \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{d_\varepsilon}{a_\varepsilon}\frac{1}{a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}} = |B_R|_\theta,$$

o qual é impossível, como veremos na próxima seção. ■

Destacamos a seguinte consequência do Lema 5.5.2.

Lema 5.5.3. $\lim_{\varepsilon\to 0} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) = |B_R|_\theta + \lim_{\overline{R}\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.$

Prova: Fixado $\overline{R} > 0$, temos

$$\int_{r_\varepsilon \overline{R}}^{R} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \geq |B_R|_\theta - |B_{r_\varepsilon \overline{R}}|_\theta.$$

Usando isto em combinação com $\lim_{\varepsilon\to 0}|B_{r_\varepsilon \overline{R}}|_\theta = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^{R} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta - \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{r_\varepsilon \overline{R}}^{R} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^{R} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta - |B_R|_\theta \qquad (5.56)
\end{aligned}$$

e ainda

$$\int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta = \frac{d_\varepsilon}{a_\varepsilon^{p'} b_\varepsilon}\int_0^{\overline{R}} \mathrm{e}^{p'\mu_\varepsilon w_\varepsilon(s)(1+O_\varepsilon(|v_\varepsilon|-1))}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.$$

Assim, aplicando o item **(ii)** do Lema 5.5.1 podemos escrever

$$\lim_{\overline{R}\to\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta = \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{d_\varepsilon}{a_\varepsilon^{p'}}. \qquad (5.57)$$

Portanto, o resultado segue por (5.56)-(5.57) e Lema 5.5.2. ■

Lema 5.5.4. *Para cada $v \in C^0[0,R]$ e $0 < r_0 \leq R$, temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{r_0} \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon} a_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\, v\,\mathrm{d}\lambda_\theta = \delta_0(v), \qquad (5.58)$$

onde δ_0 é a medida de Dirac concentrada na origem. Em particular,

$$\left(\frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon} a_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}}\right) \quad \textit{é limitada em} \quad L^1_\theta.$$

Prova: Para $0 < r_0 \leq R$, $\overline{R} > 0$ e $A > 1$, escrevemos

$$(0, r_0) = \big(\{u_\varepsilon > a_\varepsilon/A\} \backslash (0, r_\varepsilon \overline{R})\big) \cup \{u_\varepsilon \leq a_\varepsilon/A\} \cup (0, r_\varepsilon \overline{R})$$

onde $\varepsilon > 0$ é pequeno tal que $(0, r_\varepsilon \overline{R}) \subset (0, r_0)$,

$\{u_\varepsilon > a_\varepsilon/A\} := \{r \in (0, r_0) : u_\varepsilon(r) > a_\varepsilon/A\}$ e $\{u_\varepsilon \leq a_\varepsilon/A\} := \{r \in (0, r_0) : u_\varepsilon(r) \leq a_\varepsilon/A\}$.

Dividimos a integral em (5.58) em três partes, conforme a decomposição acima, e denotamos por I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Fazendo $c = \sup_{r\in[0,R]} |v(r)|$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{Ab_\varepsilon c}{d_\varepsilon} \int_{\{u_\varepsilon > a_\varepsilon/A\}\backslash(0, r_\varepsilon \overline{R})} |u_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta \\
&\leq Ab_\varepsilon c \left(1 - \frac{1}{b_\varepsilon} \int_0^{\overline{R}} |v_\varepsilon|^{p'} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon \left(|u_\varepsilon(r_\varepsilon s)|^{p'} - a_\varepsilon^{p'}\right)} \, \mathrm{d}\lambda_\theta\right) \\
&\to Ac \left(1 - \int_0^{\overline{R}} \mathrm{e}^{p'\mu_{\alpha,\theta} w(s)} \, \mathrm{d}\lambda_\theta\right), \quad \text{se} \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $\overline{R} \to \infty$ e usando o item **(iii)** do Lema 5.5.1, concluímos $I_1 \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$.

É claro que

$$I_2 \leq \frac{a_\varepsilon}{d_\varepsilon} b_\varepsilon c \int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon^A|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta. \tag{5.59}$$

Para $\delta > p$, podemos escolher $A > 1$ (suficientemente próximo 1) e $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que $1/\delta + 1/(A^{\frac{1}{p-1}} - \varepsilon) = 1$. Fazendo $\overline{u_\varepsilon^A} = A^{1/p} u_\varepsilon^A$, por (5.53), temos $\|\overline{u_\varepsilon^A}\|_{1,L^p_\alpha} \leq 1$. Ainda,

$$\left(A^{\frac{1}{p-1}} - \varepsilon\right) \mu_\varepsilon |u_\varepsilon^A|^{p'} = \frac{A^{\frac{1}{p-1}} - \varepsilon}{A^{\frac{1}{p-1}}} \mu_\varepsilon |\overline{u_\varepsilon^A}|^{p'} \leq \mu_\varepsilon |\overline{u_\varepsilon^A}|^{p'}.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a compacidade da inclusão $X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L^q_\theta$, $q > 1$ e o Teorema 3.3.1, temos

$$\int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon^A|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta \leq \left(\int_0^R |u_\varepsilon|^{\frac{\delta}{p}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\int_0^R \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |\overline{u_\varepsilon^A}|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{1/(A^{\frac{1}{p-1}} - \varepsilon)} < \infty.$$

Portanto, combinando (5.59) e o Lema 5.5.2, concluímos que $I_2 \to 0$ se $\varepsilon \to 0$.

Agora, para algum $\tau \in [0, \overline{R}]$, temos

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\overline{R}} |v_\varepsilon(s)|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon \left(|u_\varepsilon(r_\varepsilon s)|^{p'} - a_\varepsilon^{p'}\right)} v(r_\varepsilon s) \, \mathrm{d}\lambda_\theta \\
&= v(r_\varepsilon \tau) \int_0^{\overline{R}} |v_\varepsilon(s)|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{p' w_\varepsilon(s)(1 + O_\varepsilon(|v_\varepsilon| - 1))} \, \mathrm{d}\lambda_\theta.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ primeiro, e então fazendo $\overline{R} \to \infty$, obtemos $I_3 \to \delta_0(v) = v(0)$.

Finalmente, escolhendo $v \equiv 1$ e $r_0 = R$ em (5.58), podemos verificar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^R \frac{b_\varepsilon}{d_\varepsilon} a_\varepsilon |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \, \mathrm{d}\lambda_\theta = 1,$$

o qual completa a prova. ■

A seguir, com a ajuda das estimativas dadas pelo Teorema 5.4.1, descreveremos a forma como a sequência de extremais subcríticos (u_ε) converge no entorno do ponto de *blow up* $r = 0$.

Teorema 5.5.1. *Seja $p/2 < q < p$. Para cada $0 \leq \eta < \Lambda_1$, existe uma função $g = g_\eta$ tal que $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon \rightharpoonup g$ em $X_R^{1,q}(\alpha,\theta)$ e satisfaz*

$$\int_0^R |g'|^{p-2} g' v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \delta_0(v) + \eta \int_0^R |g|^{p-2} g v \, \mathrm{d}\lambda_\theta, \ \forall\, v \in X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \cap C^0[0,R], \tag{5.60}$$

onde δ_0 é a medida de Dirac concentrada na origem. Além disso,

(i) $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon \to g$ *em* $C^0_{loc}(0,R]$,

(ii) $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u'_\varepsilon \to g'$ *em* $L^p_\alpha(r_1,R]$, *para todo* $r_1 > 0$,

(iii) *Existe* $A_0 = \lim_{r\to 0} \Big(g(r) + \frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln r \Big)$. *E ainda, temos*

$$g(r) = -\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln r + A_0 + z(r),$$

com $z \in C^1(0,R] \cap C^0[0,R]$ *e* $z(0) = 0$.

Prova: Usando a equação (5.19), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^R |a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u'_\varepsilon|^{p-2} a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u'_\varepsilon v' \, \mathrm{d}\lambda_\alpha &= \int_0^R \frac{a_\varepsilon b_\varepsilon}{d_\varepsilon} |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} v \, \mathrm{d}\lambda_\theta \\ &+ c_\varepsilon \int_0^R |a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon|^{p-2} a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon v \, \mathrm{d}\lambda_\theta. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Pelo Lema 5.5.4, temos $(\frac{a_\varepsilon b_\varepsilon}{d_\varepsilon} |u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}})$ limitada em L^1_θ. Portanto, o Teorema 5.4.1 implica que $(a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon)$ é limitada no espaço uniformemente convexo $X_R^{1,q}(\alpha,\theta)$. Em particular, $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon \rightharpoonup g$ em $X_R^{1,q}(\alpha,\theta)$. Segue das hipóteses do teorema, veja ainda (5.43) e Corolário 2.3.2, que a inclusão $X_R^{1,q}(\alpha,\theta) \hookrightarrow L_\theta^{p-1}$ é compacta. Portanto, a menos de um refinamento por subsequência, temos

$$a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon \to g \quad \text{em} \quad L_\theta^{p-1} \quad \text{e} \quad a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon(r) \to g(r) \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad (0,R). \tag{5.62}$$

Argumentando como na equação (5.22), a equação (5.61) fornece

$$\begin{aligned}\omega_\alpha|a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon'|^{p-1} =& \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r \frac{a_\varepsilon b_\varepsilon}{d_\varepsilon}|u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\\ &+\frac{c_\varepsilon}{r^\alpha}\int_0^r |a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon|^{p-2}a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda_\theta.\end{aligned}\tag{5.63}$$

Então, usando a função $t\mapsto|t|^{-\frac{p-2}{p-1}}t$ em (5.63) e depois integrando em (r,R), podemos escrever

$$a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon(r)=\int_r^R\left(\frac{1}{\omega_\alpha t^\alpha}\int_0^t f_\varepsilon(u_\varepsilon)\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t,\tag{5.64}$$

onde

$$f_\varepsilon(u_\varepsilon)=\frac{a_\varepsilon b_\varepsilon}{d_\varepsilon}|u_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{e}^{\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'}}+c_\varepsilon|a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon|^{p-2}a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon.$$

Levando em conta o Lema 5.5.4 e (5.62) e fazendo $\varepsilon\to0$ em (5.64), o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos fornece

$$g(r)=\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\int_r^R\frac{1}{t}\left(1+\eta\int_0^t|g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}t.\tag{5.65}$$

Portanto, g é diferenciável e satisfaz

$$-g'(r)=\left(\frac{1}{\omega_\alpha r^\alpha}\left(1+\eta\int_0^r|g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}.\tag{5.66}$$

Agora, aplicando a função $t\mapsto|t|^{p-2}t$, segue

$$-\omega_\alpha(r^\alpha|g'|^{p-2}g')=1+\eta\int_0^r|g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta.\tag{5.67}$$

Finalmente, dado $v\in X_R^{1,p}(\alpha,\theta)\cap C^0[0,R]$, multiplicando a equação acima por v' e integrando em $(0,R)$, vemos que g satisfaz a equação (5.60).

(i) Seja $r_1>0$ fixado arbitrariamente. Por (5.62), temos $(a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon)$ limitada em L_θ^{p-1}. Assim, combinando (5.63) com o Lema 5.5.4, obtemos $|a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon'(r)|\le c_2/r_1$ em $[r_1,R]$, onde c_2 depende apenas p,R,η,q e θ. Analogamente, (5.64) fornece $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon$ limitada em $C^0[r_1,R]$. Portanto, o teorema de Ascoli-Arzelà implica que $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon$ converge para algum $\tilde{g}$ em $C^0[r_1,R]$ e por (5.62) temos $g=\tilde{g}$.

(ii) Argumentando como no item anterior, podemos verificar $|a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon'(r)|\le c_2/r_1$, para todo $r\in[r_1,R]$. Além disso, combinando (5.63) com (5.66) segue que $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon'(r)\to g'(r)$ em todo ponto $r\in[r_1,R]$. Portanto, o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos fornece o resultado desejado.

(iii) Por (5.43) temos $\theta \geq p-1$. Logo, é fácil verificar

$$\left(1+\eta\int_0^t |g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta\right)^{\frac{1}{p-1}} = 1+o(t) \quad \text{se} \quad t\to 0.$$

Assim, usando (5.65), um cálculo direto fornece

$$g(r)+\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln r = \frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\left(\ln R+O(R-r)\right). \tag{5.68}$$

Portanto, por (5.68), podemos tomar

$$A_0 := \lim_{r\to 0}(g(r)+\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln r).$$

Fazendo

$$z(r)=g(r)+\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln r - A_0$$

obtemos o item **(iii)**. ■

O resultado seguinte é uma consequência do Teorema 5.5.1 e completa a análise do supremo (5.1), veja a Observação 5.3.2.

Corolário 5.5.1. *Suponha que* $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ *em* $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$ *e* $a_\varepsilon = u_\varepsilon(0)\to\infty$, *se* $\varepsilon\to 0$. *Então,*

$$\sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) < \infty, \quad \forall\, \eta\in[0,\Lambda_1).$$

Prova: Seja $\eta\in[0,\Lambda_1)$. Pelo Teorema 5.5.1, existe $g=g_\eta$ tal que $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon \rightharpoonup g$ em $X_R^{1,q}(\alpha,\theta)$ para $p/2<q<p$. Por (5.43), temos $\theta+1\geq p=\alpha+1$ e, sendo $p/2<q$ temos

$$p<p^*=p^*(\alpha,q,\theta)=\frac{(\theta+1)q}{\alpha-q+1}.$$

Assim, a inclusão $X_R^{1,q}(\alpha,\theta)\hookrightarrow L^p_\theta$ é compacta. Logo, a menos de subsequêcia, podemos assumir que $a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon \to g$ em L^p_θ. Por hipótese, $u_\varepsilon\to 0$ em L^p_θ. Logo, podemos verificar

$$\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_\varepsilon)|a_\varepsilon|^{p'}-\mu_{\alpha,\theta}|a_\varepsilon|^{p'} \;=\; \mu_{\alpha,\theta}\frac{\eta}{p-1}\|g\|^p_{L^p_\theta}+o_\varepsilon(1). \tag{5.69}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon}(u_\varepsilon) &= \int_0^R e^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon,\eta,u_\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'}-(\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'}}e^{(\mu_{\alpha,\theta}-\varepsilon)|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \\ &\leq e^{\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,u_\varepsilon)|a_\varepsilon|^{p'}-\mu_{\alpha,\theta}|a_\varepsilon|^{p'}}\int_0^R e^{\mu_{\alpha,\theta}|u_\varepsilon|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta. \end{aligned}$$

Finalmente, combinando o Corolário 5.3.1, o Teorema 3.3.1 e a estimativa (5.69), obtemos o resultado. ■

5.6 Funções extremais

Nesta seção iremos investigar a existência de funções extremais para o supremo (5.1) no último caso. Isto é, sob a condição

$$u_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad X_R^{1,p}(\alpha,\theta) \quad \text{e} \quad a_\varepsilon = u_\varepsilon(0) \to \infty \quad \text{se} \quad \varepsilon \to 0, \tag{5.70}$$

onde (u_ε) é a sequência de extremais subcríticos dados pelo Teorema 5.3.1, veja a Observação 5.3.2. Para lidar com esta situação, usaremos o método em duas etapas devido L. Carleson e A. Chang [16] aprimorado para os espaços $X_R^{1,p}(\alpha,\theta)$. Na primeira etapa, sob a condição (5.70), daremos uma cota superior para o supremo (5.1) e; na segunda etapa, verificaremos que a cota superior dada pela etapa inicial é falsa. Esta contradição exclui o caso (5.70).

Como na seção anterior, estaremos assumindo que $\alpha \geq 1$, $p \geq 2$ e $\theta \geq 0$ são tais que

$$\alpha - p + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \theta \geq \alpha. \tag{5.71}$$

As etapas do método serão dadas nas duas subseções seguintes.

5.6.1 Etapa I: Uma cota superior.

Sob a condição (5.70) *temos o seguinte*

$$\sup_{u\in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \leq |B_R|_\theta + \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta}A_0+\gamma+\Psi(p)}|B_1|_\theta,$$

onde A_0 é dado pelo Teorema 5.5.1, Ψ é a função digama e γ é a constante de Euler.

Prova: Seja $\rho > 0$ número real. Pelo item **(ii)** do Teorema 5.5.1 podemos verificar

$$\int_\rho^R |u_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{1}{a_\varepsilon^{p'}} \int_\rho^R |g'|^{p-1} \,\mathrm{d}\lambda_\alpha + o_\varepsilon(1). \tag{5.72}$$

Ainda, por (5.67), Teorema 5.5.1 (**iii**) e integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_\rho^R |g'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha &= \int_\rho^R -(1+\eta\int_0^r |g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta)g'(r)\mathrm{d}r \\ &= g(\rho) + \eta\int_\rho^R |g|^p \,\mathrm{d}\lambda_\theta + O(\rho\ln\rho) + o_\rho(1). \end{aligned}$$

Combinando esta estimativa com (5.72) e usando o comportamento assintótico de g dada pelo item (**iii**), temos

$$\int_\rho^R |u_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{1}{a_\varepsilon^{p'}}\Big(g(\rho) + \eta\|g\|^p_{L^p_\theta} + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)\Big).$$

Defina $\overline{u}_\varepsilon(r) = \max\{u_\varepsilon(r) - u_\varepsilon(\rho), 0\}$, então $\overline{u}_\varepsilon \in X_\rho^{1,p}(\alpha,\theta)$. A equação acima fornece

$$\begin{aligned}\int_0^\rho |\nabla \overline{u}_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha &\leq \int_0^\rho |u_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \\ &= 1 - \frac{1}{a_\varepsilon^{p'}}\Big(g(\rho) + \eta\|g\|_{L_\theta^p}^p + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)\Big). \end{aligned} \tag{5.73}$$

Defina

$$\tau_\varepsilon = 1 - \frac{1}{a_\varepsilon^{p'}}\Big(g(\rho) + \eta\|g\|_{L_\theta^p}^p + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)\Big).$$

Usando o Teorema 5.3.2 e (5.73), podemos aplicar o Teorema 4.3.1 à sequência $(\overline{u}_\varepsilon/\tau_\varepsilon^{1/p})$ e obter a estimativa

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_0^\rho \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta}|\overline{u}_\varepsilon/\tau_\varepsilon^{1/p}|^{p'}}\,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq |B_\rho|_\theta\Big(1 + \mathrm{e}^{\gamma+\Psi(p)}\Big). \tag{5.74}$$

Agora, voltamos nossa atenção para vizinhanças do tipo $[0, r_\varepsilon\overline{R})$, onde $\overline{R} > 0$ é um número real. Pelo Lema 5.5.1, temos $w_\varepsilon \to w$ em $C^0_{loc}[0,\infty)$, então $u_\varepsilon(s) = a_\varepsilon + o_\varepsilon(\overline{R})$, onde $o_\varepsilon(\overline{R}) \to 0$, se $\varepsilon \to 0$ para qualquer $\overline{R} > 0$ fixado. Assim, para algum $0 < \vartheta < 1$,

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'} &\leq \mu_{\alpha,\theta}|u_\varepsilon|^{p'} + \mu_{\alpha,\theta}\frac{\eta}{p-1}\|u_\varepsilon\|_{L_\theta^p}^p\Big(1 + \eta\vartheta\|u_\varepsilon\|_{L_\theta^p}^p\Big)^{-\frac{p-2}{p-1}}|a_\varepsilon + o_\varepsilon(\overline{R})|^{p'} \\ &= \mu_{\alpha,\theta}|u_\varepsilon|^{p'} + \mu_{\alpha,\theta}\frac{\eta}{p-1}\|a_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon\|_{L_\theta^p}^p + o_\varepsilon(1) \\ &= \mu_{\alpha,\theta}|u_\varepsilon|^{p'} + \mu_{\alpha,\theta}\frac{\eta}{p-1}\|g\|_{L_\theta^p}^p + o_\varepsilon(1). \end{aligned} \tag{5.75}$$

Analogamente,

$$|u_\varepsilon|^{p'} = |\overline{u}_\varepsilon|^{p'} + p'|\overline{u}_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon(\rho) + o_\varepsilon(1). \tag{5.76}$$

Usando (5.75) e (5.76), obtemos

$$\mu_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p'} \leq \mu_{\alpha,\theta}|\overline{u}_\varepsilon|^{p'} + \mu_{\alpha,\theta}\frac{\eta}{p-1}\|g\|_{L_\theta^p}^p + \mu_{\alpha,\theta}p'|\overline{u}_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}}u_\varepsilon(\rho) + o_\varepsilon(1). \tag{5.77}$$

Ainda, pela definição de τ_ε, temos

$$\tau_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} = 1 - \frac{1}{p-1}\frac{1}{a_\varepsilon^{p'}}\Big(g(\rho) + \eta\|g\|_{L_\theta^p}^p + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)\Big).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha,\theta}|\overline{u}_\varepsilon|^{p'} &= \mu_{\alpha,\theta}|\overline{u}_\varepsilon/\tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'}\tau_\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \mu_{\alpha,\theta}|\overline{u}_\varepsilon/\tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'} - \frac{\mu_{\alpha,\theta}}{p-1}g(\rho) - \frac{\mu_{\alpha,\theta}\eta}{p-1}\|g\|_{L_\theta^p}^p + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1). \end{aligned} \tag{5.78}$$

Pelo item **(i)** do Teorema 5.5.1 podemos escrever

$$\mu_{\alpha,\theta} p' |\overline{u}_\varepsilon|^{\frac{1}{p-1}} u_\varepsilon(\rho) \;=\; \mu_{\alpha,\theta} p' g(\rho) + o_\varepsilon(\overline{R}). \tag{5.79}$$

Assim, por (5.77), (5.78) e (5.79) segue

$$\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'} \leq \mu_{\alpha,\theta} |\overline{u}_\varepsilon / \tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'} + \mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1) + o_\varepsilon(\overline{R}),$$

em $[0, r_\varepsilon \overline{R}]$, para qualquer $\overline{R} > 0$ fixado. Esta estimativa implica em

$$\int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1) + o_\varepsilon(\overline{R})} \int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} |\overline{u}_\varepsilon / \tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta. \tag{5.80}$$

Por um argumento análogo ao usado no Lema 5.5.3,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} |\overline{u}_\varepsilon / \tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\rho} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} |\overline{u}_\varepsilon / \tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta - |B_\rho|_\theta.$$

Logo, por (5.80)

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta \;&\leq\; \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1)} \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\rho} \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} |\overline{u}_\varepsilon / \tau_\varepsilon^{\frac{1}{p}}|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta \\
&-\; |B_\rho|_\theta \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, combinando a estimativa (5.74), o Corolário 5.3.1, e o Lema 5.5.3 , a estimativa acima fornece

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in D_1} J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(u) \;&=\; |B_R|_\theta + \lim_{\overline{R} \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^{r_\varepsilon \overline{R}} \mathrm{e}^{\mu_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p'}} \,\mathrm{d}\lambda_\theta \\
&\leq\; |B_R|_\theta + \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1)} \left(1 + \mathrm{e}^{\gamma + \Psi(p)}\right) |B_\rho|_\theta - \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1)} |B_\rho|_\theta \\
&=\; |B_R|_\theta + \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} g(\rho) + o_\rho(1) + \gamma + \Psi(p)} |B_\rho|_\theta.
\end{aligned}$$

Assim, a cota superior desejada segue da estimativa acima fazendo $\rho \to 0$ levando em conta a definição de $|B_\rho|_\theta$ e usando o Teorema 5.5.1 item **(iii)**. ■

5.6.2 Etapa II: Inspeção por funções teste.

Existe uma sequência $(\upsilon_\varepsilon) \subset D_1$ *tal que*

$$J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(\upsilon_\varepsilon) > |B_R|_\theta + \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta} A_0 + \Psi(p) + \gamma} |B_1|_\theta, \tag{5.81}$$

para $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Prova: Inicialmente, destacamos que a função g dada pelo item **(iii)** do Teorema 5.5.1 satisfaz

$$g(r) = -\frac{\theta + 1}{\mu_{\alpha,\theta}} \ln r + A_0 + O\left(r^{\theta+1} \ln^p r\right), \tag{5.82}$$

para $r>0$ em uma vizinhança da origem suficientemente pequena. De fato, pela expressão dada pelo item **(iii)** do Teorema 5.5.1, temos

$$\int_0^r |g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta = O\left(r^{\theta+1}\ln^{p-1} r\right). \tag{5.83}$$

Logo, a equação (5.67) fornece

$$-g'(r) = \frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln r + O\left(r^{\theta}\ln^{p-1} r\right).$$

Assim, (5.82) é válida.

Agora, para cada $\varepsilon>0$, definimos

$$\upsilon_\varepsilon(r) = \begin{cases} C - C^{-\frac{1}{p-1}}\left(\dfrac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}\,(r/\varepsilon)^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)+\Lambda_\varepsilon\right), & 0<r\le\varepsilon L,\\ C^{-\frac{1}{p-1}}g(r), & \varepsilon L<r\le R,\end{cases}$$

onde $c_{\alpha,\theta}=(\omega_\theta/(\theta+1))^{1/\alpha}$. As constantes $C,\ \Lambda_\varepsilon,$ e L são funções de ε, que iremos definir mais adiante satisfazendo:

(i) $L\to\infty,\ C\to\infty$ e $\varepsilon L\to 0$, se $\varepsilon\to 0$,

(ii) $C - C^{-\frac{1}{p-1}}\left(\frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)+\Lambda_\varepsilon\right) = C^{-\frac{1}{p-1}}g(\varepsilon L)$.

Escolhendo $z_\varepsilon(r)=\min\{g(r),g(\varepsilon L)\}$ como função teste na equação (5.60) e usando que g é uma função decrescente (veja (5.66)), é fácil verificar

$$\int_{\varepsilon L}^R |\upsilon_\varepsilon'|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{1}{C^{p'}}\left(g(\varepsilon L)+g(\varepsilon L)\int_0^{\varepsilon L}|g|^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda_\theta - \eta\int_0^{\varepsilon L}|g|^p\,\mathrm{d}\lambda_\theta + \eta\|g\|^p_{L^p_\theta}\right).$$

Dessa forma, por (5.82) e (5.83), podemos escrever

$$\int_{\varepsilon L}^R |\upsilon_\varepsilon'|^p\,\mathrm{d}\lambda_\alpha = \frac{1}{C^{p'}}\left(-\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln\varepsilon L + A_0 + \eta\|g\|^p_{L^p_\theta} + O\left((\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^p(\varepsilon L)\right)\right). \tag{5.84}$$

Relembramos que, para todo $x>1$,

$$-(x-1)\int_0^1 y^{x-2}\ln(1-y)\,\mathrm{d}y = \Psi(x)+\gamma,$$

veja [3, página 26] para detalhes. Assim, para $a>0$ e $x>1$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{s^{x-1}}{(1+s)^x}\,\mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{1+a}}^1 (1-\tau)^{x-1}\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &= \left(\frac{a}{1+a}\right)^{x-1}\ln(1+a) + (x-1)\int_0^{\frac{a}{1+a}} y^{x-2}\ln(1-y)\,\mathrm{d}y \qquad (5.85)\\ &= \left(\frac{a}{1+a}\right)^{x-1}\ln(1+a) - \Psi(x) - \gamma + O\left(\frac{1}{a}\right),\end{aligned}$$

quando $a \to \infty$. Assim, usando (5.85), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon L} |\upsilon_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha \\
&= \frac{1}{C^{p'}}\left(\frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\frac{c_{\alpha,\theta}}{\varepsilon}\right)^p \int_0^{\varepsilon L} \frac{\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{p'(\theta-p+2)}}{\left(1+c_{\alpha,\theta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)^p}\,\mathrm{d}\lambda_\alpha \\
&= \frac{p-1}{C^{p'}\mu_{\alpha,\theta}}\int_0^{c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}} \frac{s^{p-1}}{(1+s)^p}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{p-1}{C^{p'}\mu_{\alpha,\theta}}\left(A_L^{p-1}\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)-\Psi(p)-\gamma+O(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}})\right),
\end{aligned} \tag{5.86}$$

na qual

$$A_L = \frac{c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}}{1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}}.$$

Fazendo $\int_0^R |\upsilon_\varepsilon'|^p \,\mathrm{d}\lambda_\alpha = 1$ e combinando (5.84) e (5.86), temos

$$\begin{aligned}
C^{p'} =& -\frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}(\Psi(p)+\gamma) - \frac{\theta+1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln \varepsilon L + A_0 \\
&+\eta\|g\|_{L^p_\theta}^p + \frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}A_L^{p-1}\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right) \\
&+O\left((\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^p(\varepsilon L)\right)+O(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}}).
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Assim, (ii) e (5.82) fornecem

$$\begin{aligned}
\Lambda_\varepsilon =& -\frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}(\Psi(p)+\gamma)+\eta\|g\|_{L^p_\theta}^p + \frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}(A_L^{p-1}-1)\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right) \\
&+O(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}})+O\left((\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^p(\varepsilon L)\right).
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Ainda, visto que $\|\upsilon_\varepsilon\|_{L^p_\theta}^p \to 0$ e $\|C^{\frac{1}{p-1}}\upsilon_\varepsilon\|_{L^p_\theta}^p \to \|g\|_{L^p_\theta}^p$, é fácil verificar

$$\mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,\upsilon_\varepsilon)C^{p'} \;=\; C^{p'}+\frac{\eta}{p-1}\|g\|_{L^p_\theta}^p + o_\varepsilon(1). \tag{5.89}$$

Por simplicidade, denotaremos

$$\overline{\mu}_\varepsilon = \mathtt{M}(\mu_{\alpha,\theta},\eta,\upsilon_\varepsilon).$$

Observamos que $|1-t|^{p'} \geq 1-p't$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Assim, por (5.89), para $r\in(0,\varepsilon L)$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_{\varepsilon}|\upsilon_{\varepsilon}|^{p'} &= \overline{\mu}_{\varepsilon}C^{p'}\left|1-\frac{\frac{p-1}{\mu_{\alpha,\theta}}\ln(1+c_{\alpha,\theta}(\frac{r}{\varepsilon})^{\frac{\theta+1}{p-1}})+\Lambda_{\varepsilon}}{C^{p'}}\right|^{p'} \\
&\geq \mu_{\alpha,\theta}C^{p'}+\frac{\mu_{\alpha,\theta}\eta}{p-1}\|g\|_{L^p_\theta}-\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)^{p}-\mu_{\alpha,\theta}p'\Lambda_{\varepsilon} \\
&+ O\left(C^{-p'}(\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^{p}(\varepsilon L)\right)+O\left(C^{-p'}A_L^{p-1}\ln(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}})\right).
\end{aligned}
$$

Agora, usando as expressões para $C^{p'}$ e Λ_{ε} dadas (5.87) e (5.88), respectivamente, podemos deduzir da estimativa acima

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_{\varepsilon}|\upsilon_{\varepsilon}|^{p'} &\geq \mu_{\alpha,\theta}A_0+\Psi(p)+\gamma-(\theta+1)\ln\varepsilon L+(p-1)\ln(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}) \\
&- (p)\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right) \\
&+ O\left((\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^{p}(\varepsilon L)\right)+O\left(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}}\right) \\
&+ O\left(C^{-p'}A_L^{p-1}\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}L^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

Denotemos

$$
\Theta(\varepsilon)=O\left((\varepsilon L)^{\theta+1}\ln^{p}(\varepsilon L)\right)+O\left(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}}\right)+O\left(C^{-p'}\ln^{2}L\right).
$$

Com esta notação, segue da estimativa (5.90) acima

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_{\varepsilon}|\upsilon_{\varepsilon}|^{p'} &\geq \mu_{\alpha,\theta}A_0+\Psi(p)+\gamma+\ln\varepsilon^{-(\theta+1)}+\ln c_{\alpha,\theta}^{p-1} \\
&- p\ln\left(1+c_{\alpha,\theta}(r/\varepsilon)^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)+\Theta(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{5.91}
$$

Análogo ao Lema 5.5.1, item **(iii)**, temos

$$
\int_0^L\frac{\mathrm{d}\lambda_\theta}{(1+c_{\alpha,\theta}s^{\frac{\theta+1}{p-1}})^{p}} = 1+O(L^{-\frac{\theta+1}{p-1}}).
$$

Portanto, usando a estimativa acima, a desigualdade elementar $\mathrm{e}^{x}\geq 1+x,\, x\in\mathbb{R}$ e (5.91), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\varepsilon L}\mathrm{e}^{\overline{\mu}_{\varepsilon}|\upsilon_{\varepsilon}|^{p'}}\mathrm{d}\lambda_\theta &\geq \left(\mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta}A_0+\Psi(p)+\gamma}|B_1|_\theta\right) \\
&\times \left(\int_0^L\frac{\mathrm{d}\lambda_\theta}{\left(1+c_{\alpha,\theta}s^{\frac{\theta+1}{p-1}}\right)^{p}}\right)(1+\Theta(\varepsilon)) \\
&= \mathrm{e}^{\mu_{\alpha,\theta}A_0+\Psi(p)+\gamma}|B_1|_\theta+\Theta(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{5.92}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon L}^{R} e^{\overline{\mu}_\varepsilon |\upsilon_\varepsilon|^{p'}} \, d\lambda_\theta &\geq \int_{\varepsilon L}^{R} (1+\overline{\mu}_\varepsilon |\upsilon_\varepsilon|^{p'}) \, d\lambda_\theta \\
&\geq |B_R|_\theta + \mu_{\alpha,\theta} C^{-\frac{p'}{p-1}} \left(\int_0^R |g|^{p'} \, d\lambda_\theta + O\left(C^{\frac{p'}{p-1}} (\varepsilon L)^{\theta+1} \right) \right) \\
&+ O\left(C^{-\frac{p'}{p-1}} (\varepsilon L)^{\theta+1} \ln^{p'}(\varepsilon L) \right) + o\left(C^{-\frac{p'}{p-1}} \right). \qquad (5.93)
\end{aligned}
$$

Assim, combinando (5.92) e (5.93), segue

$$
\begin{aligned}
J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(\upsilon_\varepsilon) &\geq |B_R|_\theta + e^{\mu_{\alpha,\theta} A_0 + \Psi(p) + \gamma} |B_1|_\theta \\
&+ \mu_{\alpha,\theta} C^{-\frac{p'}{p-1}} \left[\int_0^R |g|^{p'} \, d\lambda_\theta + O\left(C^{\frac{p'}{p-1}} (\varepsilon L)^{\theta+1} \ln^p(\varepsilon L) \right) + o(1) \right] \\
&+ \mu_{\alpha,\theta} C^{-\frac{p'}{p-1}} \left[O\left(C^{\frac{p'}{p-1}} L^{-\frac{\theta+1}{p-1}} \right) + O\left(C^{-\frac{p'(p-2)}{p-1}} \ln^2 L \right) \right].
\end{aligned}
$$

Escolha $L = -\ln \varepsilon$. Logo, fazendo $\varepsilon \to 0$, temos

$$
C^{\frac{p'}{p-1}} \left((\varepsilon L)^{\theta+1} \ln^p(\varepsilon L) + L^{-\frac{\theta+1}{p-1}} \right) \to 0 \quad \text{e} \quad C^{-\frac{p'(p-2)}{p-1}} \ln^2 L \to 0.
$$

Portanto, para ε pequeno o suficiente, temos

$$
J^{\eta}_{\mu_{\alpha,\theta}}(\upsilon_\varepsilon) > |B_R|_\theta + e^{\mu_{\alpha,\theta} A_0 + \Psi(p) + \gamma} |B_1|_\theta.
$$

■

Referências Bibliográficas

[1] S. Adachi, K. Tanaka, *Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2051–2057.

[2] R. A. Adams, J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, Second Edition, Academic Press, 2003.

[3] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] Adimurthi, O. Druet, *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 295–322.

[5] Adimurthi, K. Sandeep, *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **13** (2007), 585–603.

[6] Adimurthi, S. L. Yadava, *Nonexistence of nodal solutions of elliptic equations with critical growth in $\mathbb{R}^2$*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 449–458.

[7] F. V. Atkinson, L. A. Peletier, *Elliptic equations with nearly critical growth*, J. Differential Equations **70** (1987), 349–365.

[8] F. V. Atkinson, L. A. Peletier, *Emden–Fowler equations involving critical exponents*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 755–776.

[9] F. V. Atkinson, L. A. Peletier, *Ground states and Dirichlet problems for $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^2$*, Arch. Ration. Mech. Anal. **96** (1986), 147–165.

[10] A. Bahri, J. -M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: The effect of topology of the domain*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), 253–294.

[11] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995.

[12] H. Brezis, F. Merle, *Uniform estimates and blow up behavior for solutions $\Delta u = V(x)\mathrm{e}^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991) 1223–1253.

[13] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983) 437–477.

[14] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* Universitext, Springer, New York (2010).

[15] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 407–435.

[16] L. Carleson, S. Y. A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. **110** (1986), 113–127.

[17] R. Černý, A. Cianchi, S. Hencl, *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*, to appear in Ann. Mat. Pura Appl.

[18] W. Chen, C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991), 615–622.

[19] P. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri, *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **7** (1996), 133–170.

[20] J. -M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, (French) [Topology and limit case of Sobolev embeddings], C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I, **299** (1984), 209–212.

[21] L. Damascelli, F. Pacella, *Monotonicity and symmetry of solutions of* $p-$*Laplace equations,* $1 < p < 2$*; via the moving plane method*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 26 (**4**) (1998) 689–707.

[22] L. Damascelli, F. Pacella, M. Ramaswamy, *Symmetry of ground states of* $p-$*Laplace equations via the moving plane method*, Arch. Ration. Mech. Anal. **148** (1999) 291–308.

[23] L. Damascelli, B. Sciunzi, *Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of* $m-$*Laplace equations*, J. Differential Equations, **206** (2004), 483–515.

[24] D. G. de Figueiredo, J. V. Gonçalves, O. H. Miyagaki, *On a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponents*, Commun. Contemp. Math. **2** (2000), 47–59.

[25] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó, B. Ruf, *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 135–152.

[26] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó, B. Ruf, *Elliptic Equations and Systems with critical Trudinger-Moser nonlinearities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **30** (2011), 455–476.

[27] D. G. de Figueiredo, B. Ruf, *Existence and non-existence of radial solutions for elliptic equations with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 639-655.

[28] Ph. Delanoë, *Radially symmetric boundary value problems for real and complex elliptic Monge-Ampère equations*, J. Differential Equations **58** (1985), 318–344.

[29] J. M. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the N-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in the critical growth range*, Differential Integral Equations (1996), 967–979.

[30] J. M. do Ó, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), 301–315.

[31] J. Dolbeault, P. Felmer, R. Monneau, *Symmetry and non–uniformly elliptic operators*, Differential Integral Equations, **18** (2005), 141–154.

[32] H. Egnell, *Semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rational Mech. Anal. **104** (1988), 27–56.

[33] H. Egnell, *Existence and nonexistence results for m-Laplace equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Ration. Mech. Anal. **104** (1988), 57–77.

[34] M. Flucher, *Extremal functions for the Trudinger–Moser inequality in 2 dimensions*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 471–497.

[35] J. P. García Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 1389–1430.

[36] M. García–Huidobro, R. Manásevich, J. Serrin, M. Tang, C.S. Yarur, *Ground states and free boundary value problems for the n-Laplacian in n dimensional space*, J. Funct. Anal. **172** (2000), 177–201.

[37] F. Gazzola, J. Serrin, M. Tang, *Existence of ground states and free boundary value problems for quasilinear elliptic operators*, Adv. Differential Equations, **5** (2000), 1–30.

[38] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243.

[39] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$*. Mathematical analysis and applications, Part A, pp. 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.

[40] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[41] M. Guedda, L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13** (1989),879–902.

[42] J. A. Hempel, G. R. Morris, N. S. Trundinger, *On the sharpness of a limiting case of the Sobolev imbedding theorem*, Bull. Austral. Math. Soc. **3** (1970), 369–373.

[43] J. Jacobsen, K. Schmitt, *Radial solutions of quasilinear elliptic differential equations*. Handbook of differential equations, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, (2004), 359–435.

[44] J. Jacobsen, K. Schmitt, *The Liouville–Bratu–Gelfand problem for radial operators*, J. Differential Equations **184**, (2002), 283–298.

[45] M. C. Knaap, L. A. Peletier, *Quasilinear elliptic equations with nearly critical growth*, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 1351–1383.

[46] M. C. Knaap, *Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Ph.D. Thesis, University of Leiden, 1991.

[47] A. Kufner, B. Opic, *Hardy–type Inequalities*, Pitman Res. Notes in Math., vol. 219, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1990.

[48] A. Porretta, L. Véron, *Symmetry of large solutions of nonlinear elliptic equations in a ball*, J. Funct. Anal. **236** (2006), no. 2, 581–591.

[49] Y. Li, *Extremal functions for the Moser-Trudinger inequalities on compact Riemannian manifolds*, Sci. China Ser. A **48** (2005), 618–648.

[50] Y. Li, *Remarks on the extremal functions for the Moser-Trudinger inequality*, Acta Math. Sin. **22** (2006), 545–550.

[51] K. C. Lin, *Extremal functions for Moser's inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2663–2671.

[52] P. L. Lions, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1* Rev. Mat. Iberoamericana (1985) 145–201.

[53] G. Lu and Y. Yang, *Sharp constant and extremal function for the improved Moser-Trudinger inequality involving L^p norm in two dimension*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **25** (2009), 963–979.

[54] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092.

[55] M. J. Mughal, Q. A. Naqvi, M. Zubair, *Electromagnetic Fields and Waves in Fractional Dimensional Space* Springer, New York, (2012).

[56] S. L. Pokhozhaev, *Eigenfunctions for the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$*, Soviet. Math. Dokl. **6** (1965), 1408–1411.

[57] S. I. Pohozaev, *The Sobolev embedding in the case $pl = n$*, Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964–1965. Mathematics Section, Moscov. Energet. Inst. (1965), 158–170.

[58] H. L. Royden, *Real analysis* Prentice Hall; 4th edition, New York, (2010).

[59] F. H. Stillinger, *Axiomatic basis for spaces with noninteger dimension*, J. Mathematical Phys. **18** (1977), no. 6, 1224–1234.

[60] M. Struwe, *Positive solutions of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domains* J. Eur. Math. Soc. **2** (2000), 329–388.

[61] M. Struwe, *Critical points of embeddings of $H_0^{1,n}$ into Orlicz spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), 425–464.

[62] M. Tang, *Uniqueness of positive radial solutions for $n-$Laplacian Dirichlet problems* Proc. Roy. Soc. Edinburgh **130A**, (2000) 1405-1416.

[63] G. J. Tian, X. -J. Wang, *Moser-Trudinger type inequalities for the Hessian equation*, J. Funct. Anal. 259 (2010), 1974–2002.

[64] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **51** (1984), 126–150.

[65] N. Trudinger, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

[66] N. S. Trudinger, X. -J. Wang, *Hessian measures I*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **10** (1997), 225–239.

[67] Y. Yang, *A sharp form of Moser-Trudinger inequality in high dimension*, J. Func. Anal., **239** (2006), 100–126.

[68] V. I. Yudovich, *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR **138** (1961), 804–808, [English translation in Soviet Math. Doklady **2** (1961), 746–749].

[69] X. -J. Wang, *The $k-$Hessian Equation*, Lecture Notes in Math., vol. 1977, Springer, Berlin-Heidelberg, 2009.