UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Terceira lista de Exercícios - Análise Funcional, período 2009.2.
Professor: João Marcos do Ó

Exercício 1. Apresente um exemplo de uma seqüência (u_n) de elementos de ℓ^1 que converge em ℓ^2 mas não converge em ℓ^1. E quanto ao contrário, o que você pode dizer? Generalize este resultado para espaços ℓ^p e ℓ^q com $p \neq q$.

Exercício 2. (Projeções e soma direta). Começamos relembrando algumas propriedades algébricas básicas sobre projeções. Se M e N são dois subespaços vetoriais do espaço X tal que todo $x \in X$ pode ser escrito de forma única como $x = y + z$ com $y \in M$ e $z \in N$, então dizemos que X é a soma direta de M e N, denotamos $X = M \oplus N$ e dizemos que N é um espaço complementar de M em X. Prove que são equivalentes:

(a) X é soma direta de M e N;

(b) $X = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$;

(c) A aplicação adicão $S : M \times N \to X$; $S(x, y) = x + y$ é um isomorfismo linear.

Note que M tem muitos subespaços complementares. Por exemplo, se $X = \mathbb{R}^3$ e M é um plano passando pela origem, então qualquer reta passando pela origem que não pertence ao plano M é um subespaço complementar de M. Prove que qualquer subespaço complementar tem a mesma dimensão e esta dimensão é chamada a codimensão de M em X. Se $X = M \oplus N$, então definimos a projeção $P : X \to X$ por $P(x) = y$ seguindo a notação acima, onde $x = y + z$ com $y \in M$ e $z \in N$, este operador é chamado a projeção de M sobre X. Prove que P é linear, $P \circ P = P^2 = P$ (operador idempotente) e $Im(P) = P(X) = M$ e $Ker(P) = N(P) = N$. Reciprocamente, prove que se $P : X \to X$ é um operador idempotente e $M = Im(P)$ and $N = ker(P)$ então X pode ser escrito como soma direta de M e N e P é a projeção de X sobre M.

Consideremos em $M \times N$ a norma usual $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Dizemos que X é a soma direta topológica de M e N se X é a soma direta M e N e além disso a aplicação soma S é um isomorfismo topológico, isto é, S é isomorfismo linear contínuo com inversa contínua, neste caso N é chamado complementar topológico de M.

(d) Prove que se X é a soma direta topológica de M e N então M e N são subespaços fechados de X.

(e) Prove que se se X é a soma direta de M e N, e M e N são subespaços fechados de X, então X é soma direta topológica de M e N.

Seja M um subespaço de $(X, \|\cdot\|)$. Prove que são equivalenttes as seguintes sentenças:

(f) M admite um complementar topológico;

(g) Existe um operador linear idempotente $P : X \to X$ com $P(X) = M$;

(h) Existe um subespaço fechado N de X, tal que X é a soma direta de M e N.

(i) A aplicação quociente é um isomorfismo topológico de M sobre X/N.

Exercício 3. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

1. Prove que $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ é contínua usando ε and δ.
2. Prove também que se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em H, então $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Exercício 4. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Prove a identidade do paralelogramo e a identidade de polarização:

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} \dfrac{i^k}{4}\|x + i^k y\|^2$.

Exercício 5. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Vetores x e y em H são ditos ortogonais ou perpendiculares (notação: $x \perp y$) se $\langle x, y\rangle = 0$. Um conjunto de vetores $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é dito ortogonal se todos os elementos deste conjunto são não nulos e são ortonais dois a dois. Prove que todo conjunto ortogonal é linearmente independente.

Exercício 6. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert. Dizemos que $S = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ é um conjunto ortonormal completo ou maximal (também chamada base de Hilbert) de H se S é ortonormal em H, isto é,

$$\langle e_\lambda, e_\mu\rangle = \delta_{\lambda\,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \mu \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

e se $S \subset R$ e R é um conjunto ortonormal então $S = R$. Use o Lema de Zorn para provar que $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ possui um conjunto ortonormal completo. Prove que se $S_1 \subset H$ é um conjunto ortonormal então existe um conjunto ortonormal completo $S \subset H$ com $S_1 \subset S$, ou seja, todo conjunto ortonormal pode ser completado para se ter um conjunto ortonormal completo.

Exercício 7. Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Prove o Teorema de Pitágoras: se $e_l, \ldots, e_n$ são multuamente orgonais, então

$$\|e_1 + \ldots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \ldots + \|e_n\|^2.$$

Exercício 8. Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Seja $\{h_n\}$ uma seqüência em H tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|$ é convergente. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ é convergente em H.

Exercício 9. Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Se $A \subset H$ prove que

$$A^{\perp} := \{h \in H : \langle h; a \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad a \in A\}$$

é um subespaço de H e além disso $A^{\perp}$ é fechado em H.

Exercício 10. Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Se $f \in H'$, mostre que existe uma única extensão para H com a mesma norma de f.

Exercício 11. Um espaço normado é dito uniformente convexo se $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x, y \in E, \ \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x - y\| > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Mostre que todo espaço de Hilbert é uniformente convexo. Dê exêmplo de um espaço normado que não seja uniformente convexo.

Exercício 12. Mostre que l^p é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$.

Exercício 13. (Hellinger-Toeplitz) Seja $T : H \to H$ um operador linear satisfazendo:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \ \forall \, x, y \in H.$$

Então $T \in L(H)$, isto é, T é limitado.

Exercício 14. Seja $(x_n)_{n=1}^{N}$ um conjunto ortonormal em um espaço com produto interno X. Mostre que

$$\|x - \Sigma_{n=1}^{N} c_n x_n\|$$

é minimizada quando $c_n = \langle x, x_n \rangle$.

Exercício 15. Seja $H = l^2$ e $f : H \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_n)) = x_N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Determine $u \in l^2$ tal que $f(v) = \langle u, v \rangle$, $\forall v \in H$.

Exercício 16. Dado $M \subset H$ subespaço fechado de um espaço de Hilbert H, mostre que existe uma única aplicação: $P : H \to M$ satisfazendo as condições:

(a) $P^2 = P$;

(b) $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$, $\forall x, y \in H$;

(c) $Im(P) = M$.

Exercício 17. Seja H um espaço de Hilbert e S um conjunto ortonormal. Mostre que S é completo (maximal) se, e somente se, o espaço gerado por S é denso em H.

Exercício 18. Seja H um espaço de Hilbert, mostre usando o Lema de Zorn que H tem uma base hilbertiana, isto é, um sistema ortonormal completo. Mostre que se $dim H = \infty$, então uma base de hilbertiana nunca é de Hamel. (sugestão: tome $e = \Sigma \frac{e_n}{n}$ e mostre que e não pode ser representado como uma combinação finita de elementos de h.)

Exercício 19. Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno separável. Prove que todo conjunto ortonormal em E é no máximo enumerável.