

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Um Convite à Topologia Diferencial

Rayssa Helena Aires de Lima Caju

JOÃO PESSOA – PB
MARÇO DE 2013

Rayssa Helena Aires de Lima Caju

Um Convite à Topologia Diferencial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática
da Universidade Federal da Paraíba como requisito para
obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB
Março de 2013

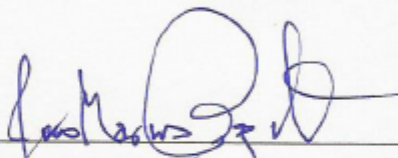
Um Convite à Topologia Diferencial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

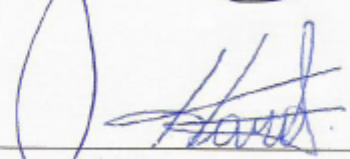
Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Aprovado em: 12 / 04 / 2013

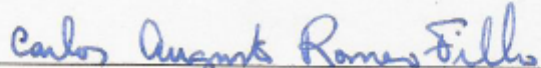
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB



Prof. Dr. Napoleão Caro Tuesta – UFPB



Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho – UFPB

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

C139u Cajú, Rayssa Helena .

Um convite à Topologia Diferencial/Rayssa Helena Cajú. – João Pessoa, 2013.

96p. : il. –

Monografia (Bacharelado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba.

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó.

1. Topologia. 2. Topologia Diferencial. I. Título.

BS/CCEN

CDU 515.1(043.2)

Agradecimentos

Aos que colaboraram de forma direta ou indireta com este trabalho, gostaria de agradecer:

A Deus.

A toda a minha família, em especial a minha avó, pelo apoio, carinho, compreensão e grande ajuda nas horas de dificuldade.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó pelos desafios propostos, e pela ajuda fundamental para a conclusão deste trabalho.

A Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa, pessoa a qual todas as palavras de agradecimento não seriam suficientes para expressar toda ajuda, apoio e confiança.

Ao Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta e ao Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho por terem aceitado participar da banca.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPB, em especial aos professores Alexandre, Eduardo, Everaldo, Jacqueline e Sales.

Aos meus amigos de graduação, Ageu, Leon e Victor, pela amizade e companheirismo.

Ao pessoal do milênio, em especial a Ellen, Eudes Lima, Eudes Mendes, Esteban e Ricardo Pinheiro.

Finalmente, agradeço ao professor Arilson Pires por ter me apresentado ao desafiante universo da matemática.

A minha avó.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	xi
1 Espaços Euclidianos	2
1.1 Diferenciabilidade	2
1.1.1 Teorema da Aplicação Inversa	4
1.1.2 Forma Local das Imersões	5
1.1.3 Forma Local das Submersões	6
1.1.4 Teorema da Função Implícita	8
2 Variedades e Aplicações Suaves	9
2.1 Introdução	9
2.2 Variedades Suaves	9
2.3 Espaço Tangente e a Diferencial de uma Aplicação	14
2.4 Valores Regulares	19
3 Variedades com Fronteira	22
4 Variedades Orientáveis	27
4.1 Orientação de Espaços Vetoriais	27
4.2 Orientação de Variedades Suaves	29
4.3 Vizinhanças Tubulares	34
4.3.1 A vizinhança tubular de uma variedade compacta	35
5 Alguns Resultados Importantes	38
5.1 O Teorema Fundamental da Álgebra	38
5.2 O Teorema de Brown-Sard	39
5.3 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	46

6	O grau módulo 2 de uma aplicação	50
6.1	Homotopias e Isotopias	50
6.2	Grau Módulo 2	53
7	O Grau de Brouwer	58
7.1	Introdução	58
7.2	O Grau de Brouwer	59
8	Característica de Euler-Poincaré	63
8.1	Introdução	63
8.2	Poliedros	63
8.3	Teorema de Euler-Poincaré	65
9	Teorema de Poincaré-Hopf	67
9.1	Introdução	67
9.2	Campos de Vetores	67
9.3	Teorema de Poincaré-Hopf	71
A	Construção de Aplicações C^∞	78
B	Classificação de Variedades de dimensão 1	80
	Referências Bibliográficas	85

Resumo

As variedades diferenciáveis consistem em uma gama de objetos, cuja utilidade não é restrita apenas a matemática em geral, sendo amplamente utilizadas em problemas da física, biologia e até mesmo da economia podendo, por exemplo, ser utilizadas como espaços modelo de diversos problemas. Tendo em vista sua imensa utilização, torna-se necessário o estudo de suas características locais e globais de forma aprofundada. A topologia diferencial tem como finalidade responder as questões de natureza global, isto é, que envolvem toda a variedade, tal como a busca de invariantes topológicos com propriedades especiais, por exemplo. Nosso objetivo neste texto é introduzir os conceitos fundamentais desta teoria de forma detalhada.

Palavras-Chave: Variedades Suaves, Grau, Índice

Abstract

Differentiable manifolds consisting of a range of objects, whose utility is not restricted to mathematics in general, being widely used in problems in physics, biology and even the economy and may, for example, be used as model spaces several problems. Given its immense use, it is necessary to study their local and global characteristics in depth. The differential topology is intended to answer questions global in nature, i.e., involving the whole range as the search topological invariant with special properties, for example. Our goal in this paper is to introduce the fundamental concepts of this theory.

Keywords: Smooth Manifolds, Degree, Index

Introdução

O conceito de variedade surgiu gradativamente da geometria e também da teoria de funções por volta do século XIX. O matemático Riemann construiu as hoje chamadas superfícies de Riemann que podem ser entendidas como um dos primeiros exemplos de variedades abstratas. Em seguida, o matemático francês Henri Poincaré iniciou uma análise topológica de tais objetos, em uma série de artigos memoráveis por sua força e originalidade.

Embora o matemático Herman Weyl tenha introduzido em 1912 um conceito formal de variedade diferenciável, a teoria apenas foi firmemente estabelecida após os trabalhos de Whitney em 1936, tendo então um rápido desenvolvimento.

As variedades suaves podem ser encontrados em diversos campos da ciência em geral. Na álgebra podem ser estudados os grupos de Lie, na relatividade pode ser visto como espaço-tempo, em mecânica como espaços de fase e superfícies de energia.

O estudo das propriedades locais e globais de uma variedade é de interesse para diversas áreas. A topologia diferencial consiste no estudo das propriedades globais destes objetos, isto é, questões envolvendo toda a variedade. Um de nossos principais interesses durante o texto será encontrar invariantes topológicos para tais objetos.

Organizamos o desenvolvimento da monografia da seguinte forma: No capítulo 1 faremos uma pequena revisão dos resultados mais importantes de diferenciabilidade em espaços euclidianos, buscando fazer com que o leitor necessite do mínimo de pré-requisitos para uma leitura do texto. No capítulo 2, introduziremos a definição do nosso principal objeto de estudo, as variedades suaves, trabalhando apenas no caso em que estão contidas em algum espaço euclidiano.

Visando ampliar a classe de objetos estudados, definiremos variedades com fronteira no capítulo 3. No capítulo 4, trataremos de orientação em uma variedade. Tendo estudado todos estes conceitos, demonstraremos no capítulo 5 alguns teoremas importantes, tais como o teorema fundamental da álgebra, o teorema de Sard e o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Uma pergunta interessante é saber quando um determinado objeto pode ser “deformado” em outro, isto é, quando determinados objetos são homotópicos. Nos capítulos 6 e 7, construiremos, respectivamente, o grau e o grau modulo 2 de uma aplicação, e provaremos que tais valores dependem apenas da classe de homotopia da aplicação. Por conseguinte, tais valores poderão ser utilizados como ferramentas para determinar quando duas determinadas funções não são

homotópicas, por exemplo.

Construiremos a característica de Euler-Poincaré de uma determinada variedade, tal como construímos no caso de superfícies, no capítulo 8, com o objetivo de demonstrar um dos mais célebres resultados da topologia diferencial, o teorema de Poincaré-Hopf, o qual apresentaremos no capítulo 9, em conjunto com o estudo de campos de vetores.

Capítulo 1

Espaços Euclidianos

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos resultados que julgamos importantes de análise em espaços euclidianos fornecendo, sempre que possível, a demonstração de tais fatos. Tal teoria, em conjunto com alguns resultados elementares de álgebra linear e topologia, nos fornecerá aparato sólido para que realizemos um estudo aprofundado da teoria de variedades diferenciáveis. Junto com estes resultados, faremos alguns exemplos que facilitarão a compreensão da teoria mais geral.

1.1 Diferenciabilidade

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. De maneira informal uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $x \in U$, quando na vizinhança deste ponto a aplicação for aproximada por uma transformação linear. De forma precisa, deve existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(x+h) = f(x) + Th + r(h), \text{ onde } \lim_{\|h \rightarrow 0\|} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \quad (1.1)$$

com $h \in \mathbb{R}^m$ tomado de modo que $x+h \in U$. Tal aproximação T é chamada derivada de f no ponto x e será denotada por $f'(x)$ ou df_x . Da equação (1.1), a derivada de f em x pode ser expressada como o limite

$$df_x \cdot h = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\|h\|}.$$

Em particular, tomando os vetores da base canônica de \mathbb{R}^m , o limite

$$df_x \cdot e_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

é conhecido como derivada parcial com respeito a j -ésima coordenada, a qual denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Sendo a aplicação $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, sua representação com respeito

a base canônica, chamada de matriz jacobiana, será dada por

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

De modo global, dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, diremos que a aplicação f é diferenciável quando for diferenciável em todo ponto $x \in U$. Definimos assim a aplicação derivada

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto df_x \end{aligned}$$

Diremos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , se a aplicação Df for contínua. De forma recursiva, uma aplicação f é de classe C^k , se

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto df_x \end{aligned}$$

for de classe C^{k-1} . Se tal aplicação for de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$, diremos f será de classe C^∞ .

Observe que na construção acima, definimos o conceito de aplicação diferenciável apenas no caso em que seu domínio é um subconjunto aberto de um espaço euclidiano, uma vez que estamos trabalhando com o conceito de limite. De forma mais geral, consideremos $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^l$ subconjuntos arbitrários do espaço euclidiano.

Definição 1.1. *Diremos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é suave, se para cada $x \in X$, existir um conjunto aberto U contendo x e uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ que coincide com f em $U \cap X$.*

Proposição 1.1. *(Regra da Cadeia) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos abertos, e consideremos $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$, uma aplicação diferenciável em $x \in U$, e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então a aplicação $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável em x , e a sua derivada no ponto é dada por*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

Demonstração. Sendo f e g diferenciáveis em x e y , respectivamente, podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) + df_x \cdot h + \rho(h)\|h\|, \text{ onde } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \rho(h) = 0 \quad (1.2)$$

e

$$g(y + k) = g(y) + dg_y \cdot k + \sigma(k)\|k\|, \text{ onde } \lim_{\|k\| \rightarrow 0} \sigma(k) = 0 \quad (1.3)$$

Por (1.2) e (1.3), teremos

$$(g \circ f)(x + h) = g(f(x) + df_x \cdot h + \rho(h)\|h\|)$$

tomando assim $k = df_x \cdot h + \rho(h)\|h\|$, como $f(x) = y$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + h) &= g(y + k) \\ &= g(y) + dg_y \cdot df_x \cdot h + dg_y \rho(h)\|h\| + \sigma(k)\|k\| \\ &= (g \circ f)(x) + [dg_y \circ df_x] \cdot h + \tau(h) \cdot \|h\| \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde $\tau(h) = dg_y \cdot \rho(h) + \sigma(k) \cdot \left| df_x \cdot \frac{h}{\|h\|} + \rho(h) \right|$. Sendo $k = df_x \cdot h + \rho(h)\|h\|$, ao fazermos $h \rightarrow 0$ implicará que $k \rightarrow 0$ e consequentemente, sendo $df_x \cdot \frac{h}{\|h\|}$ limitada podemos concluir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0,$$

demonstrando assim o resultado. □

1.1.1 Teorema da Aplicação Inversa

Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos do espaço euclidiano. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, se é uma bijeção diferenciável, cuja inversa também é diferenciável. Se as aplicações f e f^{-1} são de classe C^k , diremos que f é um difeomorfismo de classe C^k . Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local se para cada $x \in U$ existe uma vizinhança U_x tal que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_{f(x)}$ for um difeomorfismo sobre uma vizinhança $V_{f(x)}$ de $f(x)$. Quando cada restrição for de classe C^k , diremos que f é um difeomorfismo local de classe C^k .

Observe que uma condição necessária para que uma aplicação $f : U \rightarrow V$ seja um difeomorfismo, com $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, é que a sua derivada seja um isomorfismo. Como efeito, aplicando a regra da cadeia para as expressões

$$f \circ f^{-1} = Id \text{ e } f^{-1} \circ f = Id$$

obteremos que df_x é isomorfismo, cuja inversa é $df_{f(x)}^{-1}$.

Tal condição, no entanto, não é suficiente para que a aplicação seja um difeomorfismo. No entanto, uma recíproca parcial deste resultado é dada pelo célebre teorema da aplicação inversa, o qual apenas enunciaremos a seguir. Para detalhes da demonstração, ver [10].

Teorema 1.1. (*Aplicação Inversa*) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , tal que em $x_0 \in U$, $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo Então $f|_V : V \rightarrow W$, com V vizinhança de x_0 e W*

vizinhança de $f(x_0)$, é um difeomorfismo de classe C^k .

Observe assim que a informação que obtivermos sobre a derivada da função no ponto p , implicará em informação análoga sobre a função na vizinhança do ponto. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1. *Seja*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

aplicação que para cada x fixado associa uma circunferência de raio e^x . Observe que $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, portanto f não é injetora. Note porém que a aplicação f é sobrejetora. Calculando o determinante da matriz jacobiana teremos ,

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} \Rightarrow \det Jf(x, y) = e^{2x} > 0$$

Logo, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é inversível, e portanto, pelo teorema da aplicação inversa, f é um difeomorfismo local, que não é global pois f não é injetora.

Como consequência do teorema da aplicação inversa, seguem alguns resultados clássicos e muito úteis na teoria, os quais estudaremos nas próximas sessões.

1.1.2 Forma Local das Imersões

Definição 1.2. (*Imersão*) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ subconjunto aberto, uma aplicação diferenciável. Diremos que f é uma imersão, se para cada $x \in U$, a derivada de f em x , $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma transformação linear injetora. Deste modo, segue imediatamente que $m \leq n$.*

Consideremos a seguir os seguintes exemplos,

Exemplo 1.2. (*Inclusão*) *Seja $n \leq m$. Seja*

$$i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

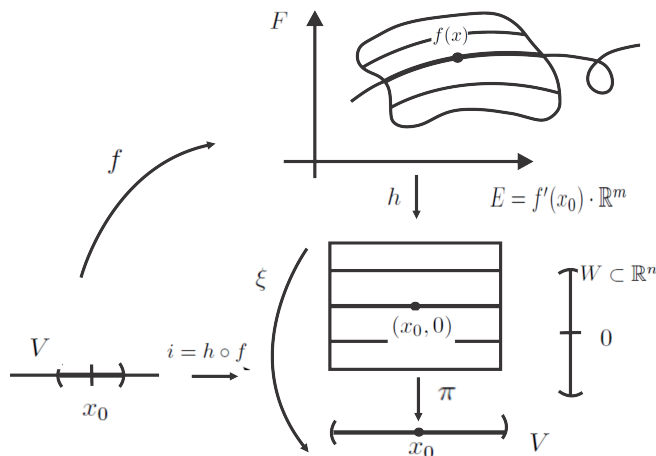
$$x \longmapsto (x, 0)$$

onde $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Observe que i é imersão, pois i é linear e assim para todo $p \in \mathbb{R}^n$, a derivada da aplicação é a própria transformação, que é injetora.

O resultado que demonstraremos a seguir, mostrará que uma imersão, localmente, possui uma forma muito simples. Demonstraremos que toda imersão, a menos de mudança de variáveis, localmente é como a inclusão. Ou seja, a aplicação inclusão é a “única” imersão.

Teorema 1.2. (*Forma Local das Imersões*) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão em $x_0 \in U$. Então, existem abertos V, W e Z com $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ e $f(x_0) \in Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e um difeomorfismo $h : Z \rightarrow V \times W$ tal que*

$$h \circ f(x) = (x, 0)$$



Demonstração. Considere

$$E = f'(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$$

e tomemos F de modo que $E \oplus F = \mathbb{R}^{m+n}$. Definindo a aplicação auxiliar

$$\begin{aligned} \Phi : U \times F &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\longmapsto f(x) + y \end{aligned}$$

então $\Phi(x_0, 0) = f(x_0)$ e a diferencial da aplicação, dada por

$$\Phi'(x_0, 0)(u, v) = f'(x_0) \cdot u + v$$

é um isomorfismo. Conseqüentemente, aplicando o teorema da aplicação inversa, existem abertos $x_0 \in V \subset U$, $0 \in W \subset F$ e $f(x_0) \in Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de modo que $\Phi|_{V \times W} : V \times W \rightarrow Z$, seja um difeomorfismo. Para finalizar a demonstração, basta tomarmos $h = \Phi|_{V \times W}^{-1}$. \square

1.1.3 Forma Local das Submersões

Definição 1.3. (*Submersão*) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ subconjunto aberto, uma aplicação diferenciável. Diremos que f é uma submersão, se para cada $x \in U$, a derivada de f em x , $df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma transformação linear sobrejetora. Deste modo, segue imediatamente que $m \geq n$.*

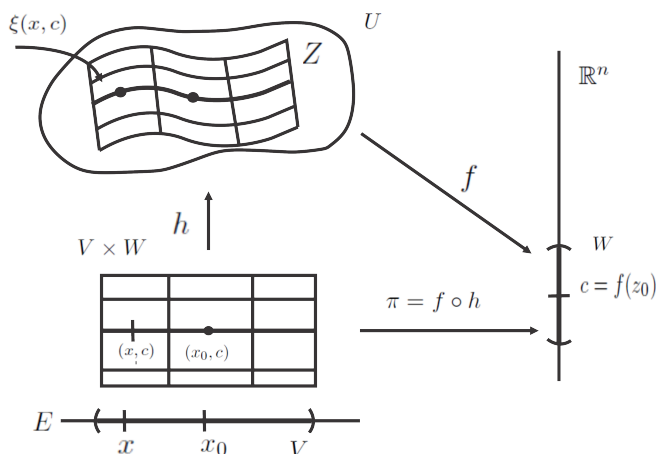
Exemplo 1.3. (*Projeção*)

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

A aplicação projeção é linear e sobrejetora portanto é uma submersão. Na verdade, provaremos que a aplicação projeção, a menos de mudança de variáveis, é a “única” submersão.

Teorema 1.3. (*Forma Local das Submersões*) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão em $z_0 \in \mathbb{R}^n$. Considere uma decomposição de $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$, com $z_0 = (x_0, y_0)$ de modo que $Df(z_0)|_F : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Então existem abertos V, W e Z , com $x_0 \in V \subset F$, $z_0 \in Z \subset U$, $f(z_0) \in W \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $h : V \times W \rightarrow Z$, com

$$f \circ h(x, w) = w$$



Demonstração. Definamos a aplicação auxiliar

$$\begin{aligned} \Phi : \quad U &\longrightarrow E \times \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (x, f(x, y)) \end{aligned}$$

e note que a diferencial, dada por

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ \Phi'(z_0)|_E & \Phi'(z_0)|_F \end{pmatrix}$$

tem determinante não nulo. Aplicando o Teorema da aplicação inversa, podemos concluir que Φ é um difeomorfismo de uma vizinhança de z_0 sobre uma vizinhança de $(x_0, f(z_0))$. De forma explícita, existem abertos V, W e Z , com $x_0 \in V \subset E$, $f(z_0) \in W \subset \mathbb{R}^n$ e $z_0 \in Z = \Phi^{-1}(V \times W)$.

Tomemos a aplicação

$$h = \Phi^{-1} : V \times W \rightarrow Z$$

e observe que

$$h(x, w) = \Phi^{-1}(x, w) = (x, h_2(x, w))$$

consequentemente

$$(x, w) = (\Phi \circ h)(x, w) = \Phi(x, h_2(x, w)) = (x, f(x, h_2(x, w)))$$

demonstrando assim o resultado. □

1.1.4 Teorema da Função Implícita

Teorema 1.4. (*Função Implícita*) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) com $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto. Seja $(a, b) \in U$ com $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c = f(a, b)$. Suponhamos que $f'(a, b) |_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Então existe $\xi : V \rightarrow W$ de classe C^k , onde $a \in V$ e $b \in W$ são abertos de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n respectivamente, com

$$f(x, \xi(x)) = c, \forall x \in V.$$

Mais ainda, se $x \in V$ e $w \in W$ são tais que $f(x, w) = c$, então $w = \xi(x)$. Isto é,

$$f^{-1}(c) \cap (V \times W) = \text{Graf}(\xi).$$

Além disso vale,

$$\xi'(x) = (-f'(x, \xi(x)) |_{\mathbb{R}^n})^{-1} \circ f'(x, \xi(x)) |_{\mathbb{R}^m}.$$

Demonstração. Seguindo a mesma notação e utilizando a forma local das submersões, garantimos a existência de um difeomorfismo

$$h : V \times W' \rightarrow Z$$

onde $(a, b) \in Z$, $a \in V$ e $c \in W'$, de modo que

$$h(x, w) = (x, h_2(x, w)) \text{ e } f(h(x, w)) = w$$

tomando $w = c$, teremos

$$f(x, h_2(x, c)) = c$$

sendo assim, basta tomar $\xi(x) = h_2(x, c)$ o resultado segue. □

Capítulo 2

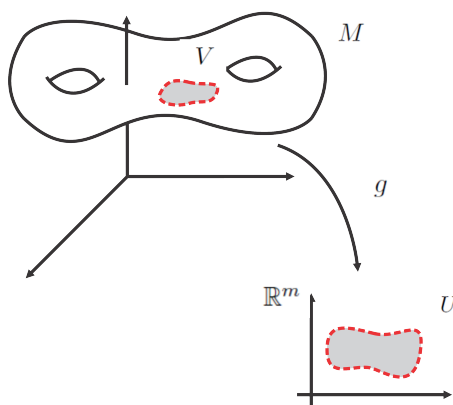
Variedades e Aplicações Suaves

2.1 Introdução

Muitas informações e propriedades acerca de alguns espaços geométricos podem ser obtidas com a ajuda de ferramentas do cálculo diferencial, desenvolvido inicialmente apenas em espaços euclidianos. Com o intuito de generalizar tais ferramentas para espaços mais gerais, trabalharemos a seguir com espaços que “localmente” são como espaços euclidianos, os quais recebem o nome de variedades. Nos deteremos apenas ao caso em que tais objetos geométricos estão inseridos em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Vale ressaltar porém que tal teoria pode ser desenvolvida de forma abstrata, ou seja, sem a necessidade de um espaço ambiente. Neste capítulo formalizaremos tais ideias e daremos alguns exemplos de tais objetos.

2.2 Variedades Suaves

Definição 2.1. Diremos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$, é uma variedade suave de dimensão m , se para cada $x \in M$, existir uma vizinhança V aberta de M contendo x , difeomorfa a um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Os difeomorfismos $g : V \rightarrow U$ serão chamados sistemas de coordenadas locais, e suas inversas $g^{-1} : U \rightarrow V$, serão chamados de parametrizações.



Veamos a seguir alguns exemplos:

Exemplo 2.1. (*O Espaço Euclidiano \mathbb{R}^n*)

Considerando a aplicação identidade $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, teremos que cada ponto possuirá uma vizinhança aberta, o próprio espaço euclidiano, que é difeomorfa ao \mathbb{R}^n , por meio da aplicação identidade. Portanto o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma variedade suave de dimensão n . Analogamente, concluímos que todo subconjunto aberto do espaço euclidiano é uma variedade suave de dimensão n .

Exemplo 2.2. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, considere os semiespaços determinados pelo hiperplano $x_i = 0$

$$H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i > 0\} \quad e \quad H_i^- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i < 0\}$$

e os conjuntos obtidos pela interseção destes hiperplanos com a esfera unitária

$$U_i^+ = H_i^+ \cap S^n \quad e \quad U_i^- = H_i^- \cap S^n$$

e consequentemente serão abertos de S^n dotada com a topologia relativa. Note ainda que,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$$

isto é, estes $2(n+1)$ abertos são suficientes para cobrir toda esfera. Deste modo, é suficiente mostrarmos que cada um destes abertos é difeomorfo a um aberto do \mathbb{R}^n . Considere então as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm &\longrightarrow B^n(0, 1) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

na qual o i -ésimo termo é omitido, para cada $i = 0, \dots, n$ fixado.

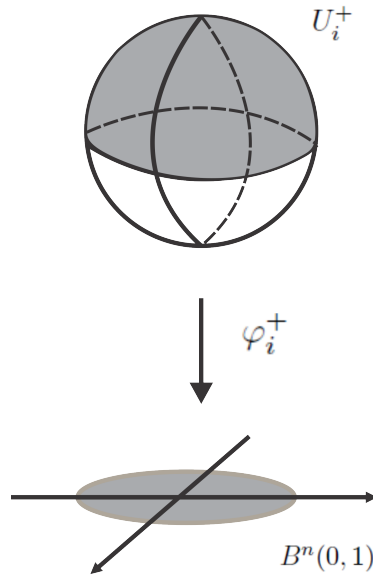
Provemos apenas que a aplicação $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow B^n(0, 1)$ é bijetiva. De forma análoga é possível mostrar a bijetividade da aplicação φ_i^- . Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi_i^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi_i^+(y_1, \dots, y_{n+1}) &\Leftrightarrow \\ (x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \dots, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}) \end{aligned}$$

como $x, y \in S^n$ e $x_i, y_i > 0$ segue que

$$x_i = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + x_{n+1}^2)} = \sqrt{1 - (y_1^2 + y_{i-1}^2 + y_{i+1}^2 + y_{n+1}^2)} = y_i$$

mostrando assim a injetividade da aplicação. Seja $y \in B^n(0, 1)$ um ponto arbitrário da bola aberta, e tomemos $x = (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n) \in S^n$. Observe que, $x_i = \sqrt{1 - |y|^2} > 0$ e,



consequentemente, $x \in U_i^{+1}$. Logo,

$$\varphi_i^+(y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n) = y$$

provando assim que a aplicação é sobrejetora e portanto, uma bijeção.

Pela construção acima concluímos que

$$\psi_i^\pm = (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - |y|^2}, y_i, \dots, y_n)$$

Note que φ_i^\pm e ψ_i^\pm são aplicações contínuas e suaves. Provamos assim que a esfera é uma variedade suave de dimensão n .

De outro modo, consideremos os pontos da esfera unitária $N = (0, \dots, 0, 1), S = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e identifiquemos o $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como o conjunto dos vetores tais que $x_{n+1} = 0$. Construiremos a seguir um difeomorfismo π_N entre $S^n \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}^n .

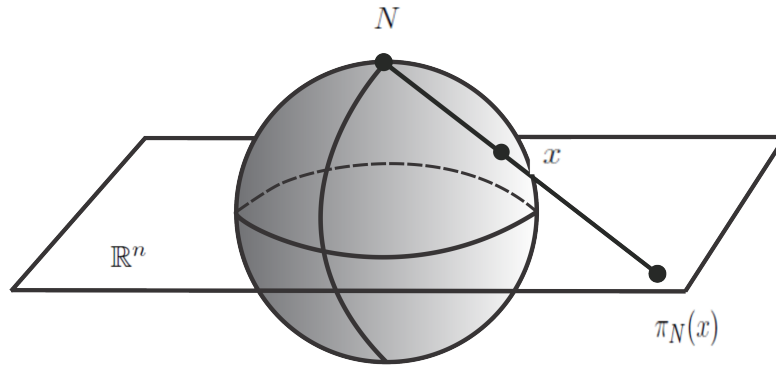
Geometricamente, para cada $x \in S^n \setminus \{N\}$, $\pi_N(x)$ será o ponto em que a semireta \overrightarrow{Nx} encontra o hiperplano $x_{n+1} = 0$, graficamente

Explicitamente, seja $N + t(x - N)$ a semireta determinada pelos pontos $x \in S^n \setminus \{N\}$ e N . Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ de modo que

$$1 + t(x_{n+1} - 1) = 0,$$

ou seja,

$$t = \frac{1}{1 - x_{n+1}}$$



logo a aplicação é dada algebricamente por

$$\begin{aligned} \pi_N : S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Realizemos agora o processo inverso, isto é, dado $y \in \mathbb{R}^n$ queremos encontrar o ponto no qual a reta \overrightarrow{Ny} intercepta a esfera, isto é, queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|N + t(y - N)\| = 1,$$

manipulando esta equação algebricamente, teremos

$$\begin{aligned} \|(ty_1, \dots, ty_n, 1 - t)\| = 1 &\Rightarrow \\ t &= \frac{2}{1 + \|y\|^2} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{N\} \\ y &\longmapsto \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Analogamente construímos $\pi_S : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\pi_S(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

com inversa,

$$\pi_S^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{\|y\|^2 + 1} \right).$$

Observe que $S^n \setminus N \cup S^n \setminus S = S^n$, e deste modo teremos que cada ponto possui uma vizinhança aberta difeomorfa ao \mathbb{R}^n e, conseqüentemente, concluímos que a esfera euclidiana é uma variedade suave de dimensão n .

Exemplo 2.3. (*Subvariedades Abertas*)

Se $U \subset M$ é um subconjunto aberto de uma variedade suave M de dimensão n , então U é uma variedade suave. Para mostrar isso, é suficiente considerar a restrição dos sistemas de coordenadas locais, ao subconjunto aberto U .

Uma excelente maneira de conseguir novos exemplos de variedades é através do produto cartesiano.

Exemplo 2.4. (*Variedade Produto*)

Consideremos $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^l$ variedades suaves de dimensão m e n , respectivamente. Provaremos a seguir que $M \times N$ é uma variedade suave de dimensão $m + n$.

De fato, observe que $M \times N \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{k+l}$. Seja $(x, y) \in M \times N$. Dotando o produto cartesiano das variedades com a topologia produto, dados dois abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, $U \times V$ é um subconjunto aberto de $M \times N$. Sendo M uma variedade suave, se $x \in M$ então existe um difeomorfismo $g : U \rightarrow U_1$, com U vizinhança aberta do ponto x e $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ aberto.

Analogamente, como $y \in N$, existe uma aplicação $h : V \rightarrow V_1$ que é um difeomorfismo, onde V é uma vizinhança de y e V_1 é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} f : U \times V &\longrightarrow U_1 \times V_1 \\ (x, y) &\longmapsto (g(x), h(y)) \end{aligned}$$

Por construção a aplicação f é um difeomorfismo, ficando demonstrado assim que $M \times N$ é uma variedade suave de dimensão $m + n$.

Veremos a seguir um exemplo de um subconjunto de um espaço euclidiano que não é uma variedade suave.

Exemplo 2.5. Considere $M = \{x \cdot y = 0 : x, y \in \mathbb{R}\}$, mostraremos a seguir que M não é localmente euclidiano. Geometricamente, M é o conjunto formado pelos eixos x e y do \mathbb{R}^2 .

Suponhamos que M seja uma variedade suave com dimensão $n = 1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a origem possui uma vizinhança homeomorfa a reta, isto é, existe um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde $(0, 0) \in U$.

Conseqüentemente, como a restrição de um homeomorfismo a um subconjunto aberto também é um homeomorfismo, $\varphi : U \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\varphi(0, 0)\}$ é um homeomorfismo, o que é uma contradição já que $U \setminus \{(0, 0)\}$ é formado por quatro componentes conexas e $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(0, 0)\}$ por apenas duas.

Suponhamos então que M seja uma variedade suave com dimensão $n \geq 2$. Analogamente ao caso anterior, podemos supor sem perda de generalidade que existe $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $(0, 0) \in U$. Deste modo a restrição $\varphi : U \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0, 0)\}$ é um homeomorfismo, o que é uma contradição já que para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(0, 0)\}$ é conexo e $U \setminus \{(0, 0)\}$ possui quatro componentes conexas.

Um outro conceito que utilizaremos no decorrer do trabalho será a definição de subvariedades.

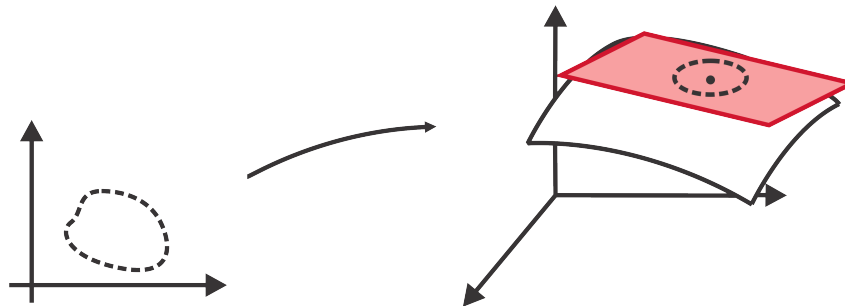
Definição 2.2. (*Subvariedade*) Sejam M, N variedades suaves contidas em \mathbb{R}^n tais que $N \subset M$, então N é uma subvariedade de M . Em particular, M é uma subvariedade de \mathbb{R}^n .

2.3 Espaço Tangente e a Diferencial de uma Aplicação

Em espaços euclidianos, ao considerarmos uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que tal aplicação é diferenciável quando na vizinhança de cada ponto $x \in U$ puder ser aproximada por uma aplicação linear $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Neste caso, obtemos a partir das características das aplicações lineares, mais facilmente verificadas, informações acerca da aplicação inicial.

Nosso objetivo agora é construir uma teoria semelhante para variedades suaves gerais, isto é, dada uma aplicação $f : M \rightarrow N$ definida entre variedades suaves, para cada ponto $x \in M$, desejamos construir uma aplicação linear de forma a obter, analogamente ao espaço euclidiano, informações acerca da aplicação f .

Sabemos que uma aplicação linear qualquer é definida entre espaços vetoriais. Deste modo, dado um ponto $p \in M$ é necessária a construção de um “modelo linear”. Tal modelo pode ser pensado, por exemplo, como um hiperplano que melhor aproxima a variedade na vizinhança do ponto. Definiremos abaixo tal modelo, o qual chamaremos de espaço tangente.



Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade de dimensão n , e fixemos $p \in M$. Considere

$$g : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$$

uma parametrização de uma vizinhança $g(U)$ de $p \in M$, com $g(u) = p$. Pensando na aplicação g , como uma aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, e sendo U um subconjunto aberto, a diferencial $dg_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ está definida.

Definiremos como sendo o espaço tangente no ponto $p \in M$, e denotaremos por T_pM , como

$$T_pM = dg_u(\mathbb{R}^m)$$

ou seja, a imagem de uma aplicação linear que é, claramente, um espaço vetorial.

Para que o espaço tangente esteja bem definido, no entanto, devemos provar que a definição não depende da escolha da parametrização, isto é, ao considerarmos uma outra parametrização $h : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$, de uma vizinhança $h(V)$ de p com $h(v) = p$ devemos mostrar que

$$dh_v(\mathbb{R}^m) = dg_u(\mathbb{R}^m)$$

Por simplicidade de notação considere $W = g(U) \cap h(V)$. Podemos considerar então o difeomorfismo

$$h^{-1} \circ g : g^{-1}(W) \rightarrow h^{-1}(W)$$

definido de uma vizinhança aberta de u sobre uma vizinhança de v .

Observe assim que o diagrama comutativo, pela regra da cadeia,

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ g \nearrow & & \searrow h \\ U_1 & \xrightarrow{h^{-1} \circ g} & V_1 \end{array}$$

dá origem ao seguinte diagrama comutativo de aplicações lineares

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ dg_u \nearrow & & \searrow dh_v \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\cong]{d(h^{-1} \circ g)_u} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde sabemos que $dg_u = d(h^{-1} \circ g)_u \circ dh_v$, e desta forma, sendo $d(h^{-1} \circ g)_u$ um isomorfismo, segue que

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = dh_v(\mathbb{R}^m)$$

ficando assim demonstrado que a definição não depende da escolha da parametrização.

Proposição 2.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade suave e $p \in M$. Então o espaço tangente à variedade no ponto p tem a mesma dimensão da variedade.*

Demonstração. Considerando $g : U \rightarrow g(U)$ uma parametrização de uma vizinhança de p com $g(u) = p$. Podemos considerar

$$g^{-1} : g(U) \rightarrow U$$

a aplicação suave, e portanto, por definição existirá um subconjunto W aberto contendo x e uma aplicação suave

$$F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que coincide com g^{-1} em $W \cap g(U)$. Considerando assim $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, teremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ g \nearrow & & \searrow F \\ U_0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

e conseqüentemente teremos,

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ dg_u \nearrow & & \searrow dF_p \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

O diagrama implica que a aplicação dg_u tem posto m , e o resultado segue. □

Uma vez tendo definido um modelo linear, definiremos a seguir a diferencial de uma aplicação.

Consideremos $M \subset \mathbb{R}^k$ e $N \subset \mathbb{R}^l$ variedades suaves e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave com $f(p) = q$. Definiremos agora a diferencial de uma aplicação em p , a qual denotaremos por $df_p : T_pM \rightarrow T_qN$.

Como f é uma aplicação suave, existe uma vizinhança W de p e uma aplicação suave $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$ que coincide com f em $W \cap M$.

Definiremos então,

$$df_p(v) := dF_p(v), \text{ para todo } v \in T_pM.$$

Para mostrar que a diferencial está bem definida devemos demonstrar que $dF_p(v) \in T_qN$, se $v \in T_pM$ e ainda que a definição não depende da escolha da função F . Consideremos assim duas parametrizações

$$g : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k \text{ e } h : V \rightarrow N \subset \mathbb{R}^l$$

de uma vizinhança $g(U)$ de p e de uma vizinhança $h(V)$ de q . Reduzindo U suficientemente podemos assumir que $g(U) \subset W$ e que $f : g(U) \rightarrow h(V)$. Podemos então considerar a aplicação de transição

$$h^{-1} \circ f \circ g : U \rightarrow V$$

E portanto, obteremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^l \\ g \uparrow & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$

Diferenciando nós obteremos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dF_x} & \mathbb{R}^l \\ dg_u \uparrow & & \uparrow dh_v \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(h^{-1} \circ f \circ g)_u} & V \end{array}$$

onde $u = g^{-1}(p)$ e $v = h^{-1}(q)$.

Da comutatividade do diagrama teremos

$$dF_p \circ dg_u = d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ dh_v \Rightarrow$$

$$dF_p \circ dg_u(\mathbb{R}^m) = d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ dh_v(\mathbb{R}^m) \quad (2.1)$$

De 5.3, segue que $dF_p(T_pM) \subset T_qN = dh_v(\mathbb{R}^n)$. Pelo diagrama a diferencial não depende da escolha de F, uma vez que

$$df_p = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$$

Ficando assim demonstrado que a diferencial está bem definida. Vejamos a seguir algumas generalizações imediatas de alguns teoremas de espaços euclidianos, para aplicações definidas entre variedades.

Teorema 2.1. (Regra da Cadeia) *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações suaves com $f(p) = q$, então*

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$$

Demonstração. Sendo $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações suaves, existem aplicações $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ tais que $f(x) = F(x)$, para todo $x \in U \cap M$ e $g(y) = G(y)$, para todo $y \in V \cap N$. Pela definição de diferencial e utilizando a regra da cadeia para aplicações definidas entre espaços euclidianos, teremos

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$$

□

Observação 2.1. *Denotando por Id a aplicação identidade de M teremos que $dId_x : T_xM \rightarrow T_xM$ é a aplicação identidade de T_xM . De fato, aplicando a regra da cadeia,*

$$\begin{aligned} dId_x &= d(Id \circ Id)_x = dId_x \circ dId_x \Rightarrow \\ dId_x &= Id_{T_xM} \end{aligned}$$

Observação 2.2. *Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo então $df_x : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$ é isomorfismo. Em particular segue que M e N tem mesma dimensão. Com efeito,*

$$f \circ f^{-1} = Id_N \Rightarrow d(f \circ f^{-1})_{f(x)} = df_x \circ df_{f(x)}^{-1} = Id_{T_{f(x)}N}$$

e

$$f^{-1} \circ f = Id_M \Rightarrow d(f^{-1} \circ f)_x = df_{f(x)}^{-1} \circ df_x = Id_{T_xM}$$

Provando assim que df_x é um isomorfismo e em particular, $df_{f(x)}^{-1} = [df_x]^{-1}$.

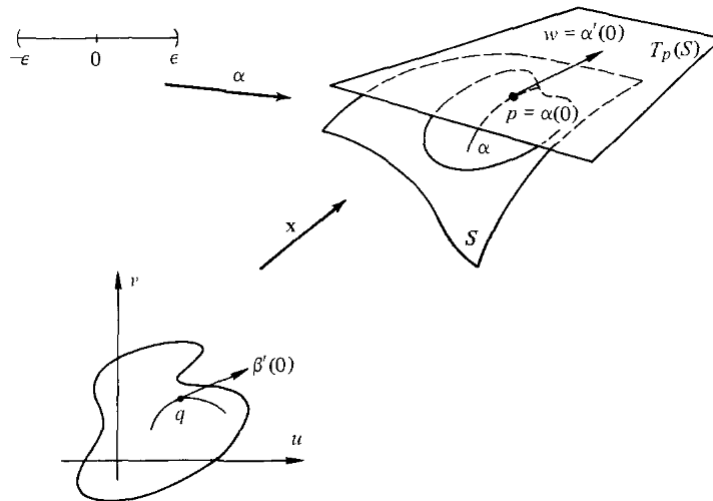
Observe que, pela definição de diferencial da aplicação, os teoremas clássicos que enunciamos no capítulo anterior, tais como o teorema da aplicação inversa, formas locais, teorema do posto e o teorema da função implícita são facilmente generalizados para aplicações definidas em variedades que satisfazem suas respectivas hipóteses, nos dotando assim de um grande aparato de ferramentas para demonstrar muitos resultados importantes em nossa teoria.

A forma pela qual definimos o espaço tangente a variedade em um ponto de uma aplicação não é única. Apresentaremos, de forma rápida um modo bastante utilizado equivalente ao anterior.

Considere o conjunto das curvas diferenciáveis em uma variedade suave $M \subset \mathbb{R}^k$, passando por um ponto $p \in M$. Definiremos

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^k : \exists \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ tal que } \lambda(0) = p \text{ e } \lambda'(0) = v\} \tag{2.2}$$

Provaremos a seguir, a equivalência entre as definições dos espaços tangentes, nos dando liberdade



de ao longo do texto utilizar a forma mais conveniente para determinada situação.

Proposição 2.2. *Seja $g : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ uma parametrização da variedade M , e considere $q = g^{-1}(p) \in U$. O subespaço vetorial, de mesma dimensão da variedade,*

$$dg_q(\mathbb{R}^m)$$

coincide com o espaço tangente à variedade M em p , dado por (2.2).

Demonstração. Seja w um vetor tangente em p , ou seja $w = \lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável com $\lambda(0) = p$, e considere a curva diferenciável $\beta = g^{-1} \circ \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, teremos então que $dg_q(\beta'(0)) = w$, e conseqüentemente $w \in dg_q(\mathbb{R}^m)$. Reciprocamente, seja $w = dg_q(v)$, onde $v \in \mathbb{R}^m$. Deste modo, v é o vetor tangente dado pela curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, dada por

$$\gamma(t) = tv + q, \text{ onde } t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

conseqüentemente, $w = \lambda'(0)$, onde $\alpha = g \circ \gamma$, provando assim o resultado. \square

2.4 Valores Regulares

Considere $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades, onde M tem dimensão m e N dimensão n .

Definição 2.3. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave, definimos o posto de f , o qual denotaremos por, $\text{posto}_x f$, a dimensão da imagem da diferencial df_x .

Consideremos C o conjunto de todos os pontos $x \in M$ tais que $\text{posto}_x f < n$, ou seja, os pontos tais que a aplicação df_x não é sobrejetora. O conjunto C será chamado de conjunto dos *pontos críticos* de f , e sua imagem $f(C)$ será o conjunto dos *valores críticos* da aplicação.

Diremos que um ponto $x \in M$ é um *ponto regular* de f , se $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ for sobrejetiva. Se $y \in N$ for tal que todo $x \in f^{-1}(y)$, for ponto regular de f , diremos que y é um *valor regular* da aplicação.

Se M e N tem mesma dimensão, afirmar que a aplicação df_x não é sobrejetiva é equivalente a mostrar que a aplicação não é um isomorfismo. Deste modo, se df_x é um isomorfismo, então, por definição, x é um ponto regular.

Aplicando o teorema da função inversa a aplicação f restrita a uma vizinhança aberta de x , sobre uma vizinhança aberta de $f(x)$ será um difeomorfismo.

Afirmção 2.1. Se M é compacta e $y \in N$ é um valor regular, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Com efeito, observe que $f^{-1}(y)$ é um subconjunto fechado da variedade compacta M , e conseqüentemente, $f^{-1}(y)$ é compacto. Suponhamos que exista $x \in f^{-1}(y)$, ponto de acumulação. Deste modo, para toda vizinhança V de x deverá existir $z \in f^{-1}(y)$ com $z \neq x$, onde $z \in V$. Conseqüentemente, a aplicação f restrita a qualquer vizinhança não poderá ser um difeomorfismo uma vez que $f(x) = f(z) = y$, o que implica que a aplicação f não é injetora. O que é uma contradição pois o teorema da função inversa garante a existência de uma vizinhança V de x , na qual $f|_V$ é um difeomorfismo. Provando assim que $f^{-1}(y)$ é conjunto discreto e compacto e, portanto, finito.

Para uma aplicação $f : M \rightarrow N$, com M variedade compacta e $y \in N$ valor regular, a cardinalidade da imagem inversa $\#f^{-1}(y)$ é finita.

Proposição 2.3. *Seja $f : M \rightarrow N$, com M variedade compacta e $y \in N$ valor regular, então a aplicação que associa a cada valor regular $y \in N$ a cardinalidade $\#f^{-1}(y)$ da imagem inversa, é localmente constante.*

Demonstração. Com efeito seja $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, então para cada x_i existe uma vizinhança U_i de x_i de modo que

$$f|_{U_i} : U_i \rightarrow f(U_i) = V_i$$

Tome

$$V = V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f(M \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)).$$

Para tal vizinhança teremos que $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$, para todo $y' \in V$. □

Proposição 2.4. *Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave entre variedades de dimensão $m \geq n$, e se $y \in N$ é um valor regular, então o conjunto $f^{-1}(y) \subset M$ é uma variedade suave de dimensão $m - n$.*

Demonstração. Seja $x \in f^{-1}(y)$. Desde que y é um valor regular, a aplicação $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é sobrejetiva. Sendo assim, do teorema do núcleo e imagem nos diz que

$$\dim T_y N + \dim \text{Nuc} df_x = \dim T_x M$$

mostrando assim que $\dim \text{Nuc} df_x = m - n$.

Sendo $M \subset \mathbb{R}^k$, escolha uma aplicação $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ que é um isomorfismo do subespaço $\text{Nuc} df_x = N' \subset T_x M \subset \mathbb{R}^k$. (Definindo o isomorfismo natural entre N' e \mathbb{R}^{m-n} , completa a base de N' para \mathbb{R}^k e atribui os seus valores a zero) Definamos assim a aplicação,

$$\begin{aligned} F : M &\rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n} \\ x &\mapsto F(x) = (f(x), L(x)) \end{aligned}$$

Cuja diferencial é dada por $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$. Nota então que dF_x é sobrejetiva e ainda, pelo teorema do núcleo e da imagem

$$\begin{aligned} \dim \text{Nuc} dF_x + \dim \text{Im} dF_x &= \dim T_x M \Rightarrow \\ \dim \text{Nuc} dF_x + n + (m - n) &= m \Rightarrow \\ \dim \text{Nuc} dF_x &= 0 \end{aligned}$$

e portanto dF_x é um isomorfismo. Assim, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $F|_U : U \rightarrow F(U) = V$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V de $(y, L(x))$. Portanto, o conjunto $f^{-1}(y)$ corresponde através de F , ao hiperplano $y \times \mathbb{R}^{m-n}$. De fato, a aplicação F mapeia difeomorficamente o subconjunto $f^{-1}(y) \cap U$ sobre $(y \times \mathbb{R}^{m-n}) \cap V$, provando assim que $f^{-1}(y)$ é uma variedade de dimensão $m - n$. □

Se uma variedade M' de dimensão n , esta contida em uma variedade M de dimensão m , podemos notar que o espaço tangente $T_x M'$ será um subespaço de $T_x M$. O complemento ortogonal de $T_x M'$ será um subespaço de dimensão $m - n$, chamado espaço dos vetores normais a M' em M no ponto x . Em particular, $M' = f^{-1}(y)$ para um valor regular y da aplicação $f : M \rightarrow N$.

Proposição 2.5. *O núcleo da transformação linear $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$ é igual ao espaço tangente $T_x M'$ da subvariedade M' . Então df_x mapeia o complemento ortogonal de $T_x M'$ isomorficamente sobre o $T_y N$.*

Demonstração. Considere o diagrama

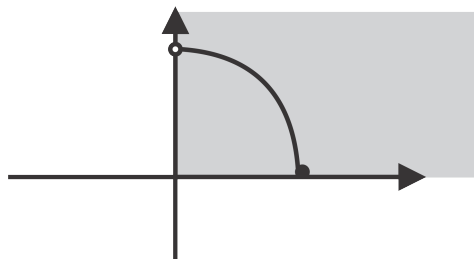
$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

Pelo diagrama acima, podemos ver que df_x mapeia $T_x M'$ em zero. Analisando então as dimensões, df_x mapeia o espaço de vetores normais de M' isomorficamente sobre $T_y N$. \square

Capítulo 3

Variedades com Fronteira

Consideremos a seguinte situação abaixo. Seja $X = \{(x, y) \in S^1 : x > 0 \text{ e } y \geq 0\}$, mostrado na figura abaixo:



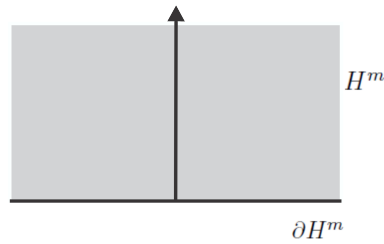
Podemos caracterizar o conjunto X como uma variedade suave? Se tal fato fosse verdadeiro, existiria uma vizinhança do ponto $(1, 0)$ difeomorfa a um aberto da reta. Sem perda de generalidade, podemos supor que tal aberto seja um intervalo (a, b) . Deste modo, ao restringirmos o difeomorfismo a $X \setminus \{(1, 0)\}$ tal conjunto, que é um conexo, será difeomorfo a um conjunto com duas componentes conexas, o que é um absurdo, uma vez que difeomorfismos preservam a quantidade de componentes conexas. Deste modo tal conjunto não se enquadra na definição de variedade suave por possuir uma “fronteira”. Com o objetivo aplicar as técnicas do cálculo a subconjuntos ainda mais gerais, aumentaremos a classe dos objetos tratados definindo o conceito de variedade com fronteira.

Consideremos o subconjunto fechado

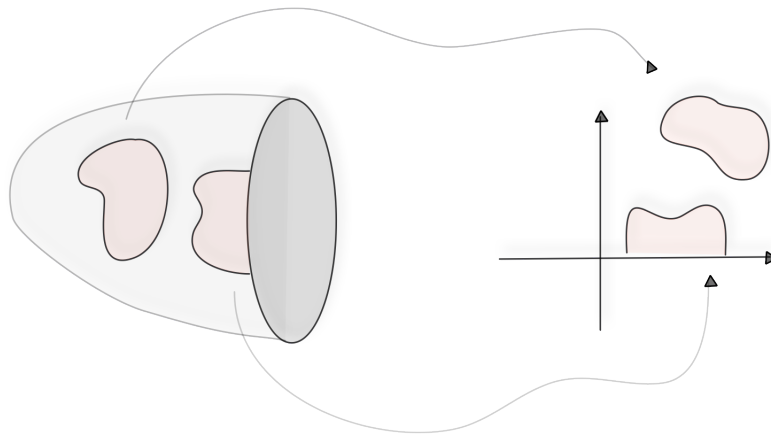
$$H^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$$

com fronteira ∂H^m identificada com o hiperplano $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 3.1. Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^k$ é chamado variedade suave de dimensão m com fronteira ou com bordo se, para cada $x \in X$ existir uma vizinhança $U \cap X$ difeomorfa a um subconjunto aberto de H^m . Analogamente, tais difeomorfismos serão chamados de parametrizações locais. A



fronteira de X , denotada por ∂X , é o conjunto de todos os pontos de X que correspondem a ∂H^m através das parametrizações locais. Se complemento será denotado por $\text{Int}(X) = X - \partial X$.



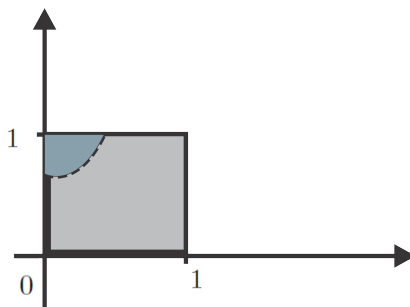
com bordo.PNG

Vale observar que o interior e fronteira para a variedade definidos acima não coincide, em geral, com a fronteira e o interior topológico do conjunto. Tais definições coincidem apenas quando a variedade possui a mesma dimensão do espaço que a contém. Porém ao considerarmos a situação em que a dimensão da variedade é estritamente menor que a dimensão do espaço em que ela está contida, tais conceitos não coincidirão. Além disso, observe que na definição acima, nada nos garante que se x é um ponto de fronteira com respeito a uma parametrização então x será um ponto de fronteira com respeito a todas as parametrizações. A prova deste fato será dada no decorrer da demonstração da seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Se X é uma variedade com fronteira de dimensão m , então ∂X é uma variedade de dimensão $m - 1$.*

Demonstração. Seja $x \in \partial X$, então existe uma parametrização $\phi : U \rightarrow V$, onde U é um subconjunto aberto de H^k e V é um subconjunto aberto de X . Provaremos que $\phi(\partial U) = \partial V$, pois então a restrição da aplicação Φ difeomorfismo ao subconjunto $\partial U = U \cap \partial H^k$, aberto em \mathbb{R}^{k-1} , será um difeomorfismo de ∂U em $\partial V = \partial X \cap V$. Teremos que $\phi|_{\partial U}$ é uma parametrização local de um aberto de \mathbb{R}^{k-1} em uma vizinhança $V \cap \partial X$ de $x \in \partial X$. Por definição $\phi(\partial U) \subset \partial V$, restando apenas demonstrar que $\partial V \subset \phi(\partial U)$. Ou seja, se ψ é uma parametrização local qualquer de um subconjunto aberto W de H^k em V , devemos mostrar que $\phi(\partial U) \supset \psi(\partial W)$, ou, equivalentemente, $\partial U \supset \phi^{-1} \circ \psi : W \rightarrow U$. Seja $g = \Phi^{-1} \circ \psi : W \rightarrow Y$, e supohamos que algum $w \in \partial W$ é levado em

um ponto interior $u = g(w)$ de U . Como Φ e ψ são difeomorfismos, g deve ser um difeomorfismo de W sobre um subconjunto aberto $g(W)$ de U . Como é usual, a regra da cadeia implica que a diferencial da inversa de g , $(dg^{-1})_u$ é uma bijeção. Mas, desde que $u \in \text{Int}(U)$, $g(W)$ contém uma vizinhança de u que é aberta em \mathbb{R}^k . Aplicando o teorema da função inversa a aplicação g^{-1} contém uma vizinhança de w que é aberta em \mathbb{R}^k , o que é uma contradição uma vez que $w \in \partial W$. \square



Analogamente ao caso de variedades sem fronteira, poderíamos nos perguntar se o produto cartesiano de duas variedades com fronteira, ainda seria uma variedade com fronteira. Tomando por exemplo $[0, 1] \times [0, 1]$, o ponto $(0, 0)$ não admite uma vizinhança difeomorfa a um aberto de H^k , conseqüentemente, tal fato não é válido em geral. Porém, podemos provar que ao tomarmos o produto cartesiano de uma variedade com fronteira e outra sem fronteira, tal fato é verdadeiro, como veremos na proposição a seguir.

Proposição 3.2. *O produto de uma variedade sem fronteira X com uma variedade Y com fronteira, é uma outra variedade com fronteira. Mais ainda,*

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

e

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

Demonstração. Seja $(x, y) \in X \times Y$, como $x \in X$ e a variedade X é sem fronteira, existe uma parametrização local $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset X$ onde $U \subset \mathbb{R}^k$ aberto, onde $\phi(U)$ é vizinhança de x . Analogamente, como $y \in Y$, existe uma parametrização local $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset Y$, com $V \subset H^l$ aberto, tal que $\psi(V)$ é uma vizinhança de Y . Deste modo basta tomar a parametrização local $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \phi(U) \times \psi(V)$ onde $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times H^l \subset H^{k+l}$, e assim o resultado segue. \square

Proposição 3.3. *O interior de X definido como, $\text{int}X = X \setminus \partial X$ é uma variedade sem fronteira de dimensão m .*

Demonstração. Com efeito, se $x \in \text{int}X$ então existe uma vizinhança U de x tal que $U \subset \text{int}X$. Sem perda de generalidade, suponhamos que U é o domínio de algum sistema de coordenadas

$f : U \rightarrow V \cap \partial H^m$. Deste modo, como $x \in \text{int}X$ teremos que todo ponto $y \in U$ corresponde a um ponto $f(y) \in \text{int}H^m \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Donde segue que $\text{int}X$ é uma variedade de dimensão m . \square

Observação 3.1. *Se $X \subset \mathbb{R}^k$ é uma variedade com fronteira, então o espaço tangente é definido de forma análoga ao caso de variedades suaves sem fronteira.*

Veremos a seguir um método simples para gerar exemplos de variedades com fronteira. Seja M uma variedade sem fronteira, e considere $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação que possui 0 como valor regular.

Lema 3.1. *O conjunto dos $x \in M$ com $g(x) \geq 0$ é uma variedade suave X , cuja fronteira ∂X é igual a $g^{-1}(0)$.*

Demonstração. Sendo a aplicação g suave, o conjunto dos $x \in M$ tais que $g(x) > 0$, é aberto em M , e conseqüentemente é uma subvariedade aberta de M com dimensão igual a dimensão de M . Suponhamos assim que $g(x) = 0$. Sendo g regular em 0, pela forma local das submersões g restrita a uma pequena vizinhança de x é uma projeção. Mas, se a aplicação g fosse a projeção o resultado seria imediato. \square

Exemplo 3.1. *Considere a aplicação*

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto 1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$$

Pelo lema anterior, o conjunto dos pontos em \mathbb{R}^{n+1} tais que $g(x) \geq 0$, formam uma variedade com bordo. Isto é, o disco D^{n+1} é uma variedade com fronteira de dimensão $n+1$, com fronteira igual a S^n .

Seja agora $f : X \rightarrow N$ uma aplicação suave, de uma variedade X de dimensão m com fronteira sobre uma variedade suave N de dimensão n .

Proposição 3.4. *Se $y \in N$ é um valor regular para f e para $f|_{\partial X}$, então $f^{-1}(y)$ é uma variedade com fronteira, com dimensão $m-n$. Mais ainda,*

$$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial X$$

Demonstração. Desde que a propriedade a ser demonstrada é local, é suficiente considerar o caso particular em que a aplicação $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida de H^m sobre \mathbb{R}^n , com valor regular $y \in \mathbb{R}^n$. Se \bar{x} é um ponto interior então o resultado segue como na proposição 2.4. Suponhamos que \bar{x} é um ponto de fronteira. Como a aplicação f é suave, sabemos que existe uma aplicação suave $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, tal que $g \equiv f$ em $U \cap H^m$. Sendo \bar{x} um

ponto regular de g , a aplicação $dg_{\bar{x}}$ será sobrejetora, e pela forma local das submersões, a menos de mudança de variáveis, tal aplicação será uma projeção em uma vizinhança de \bar{x} , que não possui pontos críticos. E portanto, reduzindo U , se necessário, podemos assumir que g não tem pontos críticos, e conseqüentemente y será um valor regular para g . Logo, pela proposição 2.4, $g^{-1}(y)$ é uma variedade suave de dimensão $m - n$.

Seja $\pi : g^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção ortogonal,

$$\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m$$

Observe ainda que 0 é valor regular de π . Pela proposição (2.5), o espaço tangente de $g^{-1}(y)$ em um ponto $x \in \pi^{-1}(0)$ é igual ao núcleo da aplicação

$$dg_x = df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese, como $f|_{\partial H^m}$ é regular em x , teremos que o núcleo não pode estar completamente contido em $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$. Deste modo o conjunto $g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$ que consiste de todos os $x \in g^{-1}(y)$ com $\pi(x) \geq 0$, é uma variedade suave com fronteira igual a $\pi^{-1}(0)$. Ficando demonstrado o resultado. \square

Capítulo 4

Variedades Orientáveis

4.1 Orientação de Espaços Vetoriais

Antes de introduzirmos o conceito de orientação de maneira formal, vejamos como tal processo é feito quando consideramos espaços elementares. Ao tomarmos o espaço vetorial como a reta \mathbb{R} , uma orientação para este espaço nada mais é que a escolha de uma dessas direções, a esquerda ou a direita.



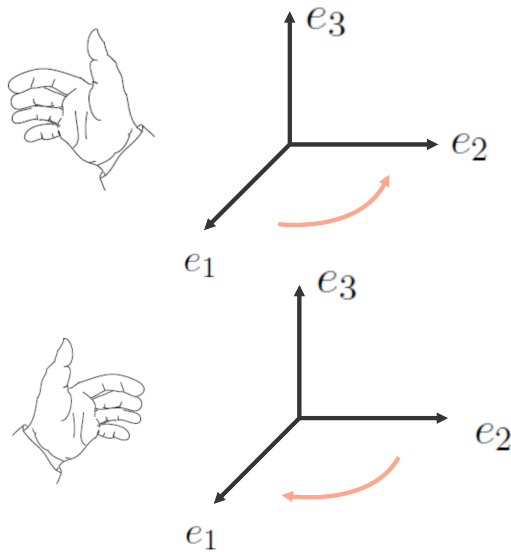
Para o caso do espaço \mathbb{R}^2 , podemos escolher o sentido horário ou o sentido anti-horário, ilustrados abaixo



Para o \mathbb{R}^3 a orientação será dada pela regra da mão direita ou a regra da mão esquerda, exibida na próxima figura

Podemos nos perguntar porém, como induziríamos por exemplo uma orientação em \mathbb{R}^4 , já que não é possível enxergá-lo geometricamente. Observe que nos casos acima, todas as orientações são determinadas pela escolha de uma base ordenada do espaço. Para o caso real as orientações são dadas por e_1 ou $-e_1$, para o \mathbb{R}^2 o sentido anti-horário é determinado pela base $\{e_1, e_2\}$ e o sentido horário determinado por $\{e_2, e_1\}$.

Analisando de forma mais aprofundada o caso real, observe que qualquer múltiplo positivo de e_1 , determina a mesma orientação de e_1 , assim como qualquer múltiplo negativo de e_1 determina a orientação contrária. Analogamente para o caso de $-e_1$. Sendo assim dois vetores v e w determinaram a mesma orientação, se $v = \lambda w$, onde $\lambda > 0$.



Tendo visto os casos acima, generalizaremos a seguir as ideias introduzidas. A orientação para um espaço vetorial de dimensão finita será dada por uma escolha de uma base ordenada do espaço. Mas, pelo que vemos acima, duas bases distintas podem determinar a mesma orientação no espaço vetorial, e portanto é necessário que trabalhem com classes de equivalência de bases.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e consideremos $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ uma base do espaço. Se $\beta' = \{v'_1, \dots, v'_k\}$ uma outra base ordenada. Deste modo, sabemos que existe um único isomorfismo linear, de modo que

$$\beta' = A\beta$$

onde $A\beta$ denota a base $\{Av_1, \dots, Av_k\}$. Diremos que β e β' determinam a mesma orientação, se o determinante do isomorfismo linear A é estritamente positivo. Se β e β' determinam a mesma orientação, diremos que β está relacionada com β' e denotaremos tal relação por $\beta \sim \beta'$.

Afirmção 4.1. *A relação definida acima é de equivalência.*

Demonstração. Com efeito,

- (i) Se $\beta' = \beta$, então o isomorfismo A é a aplicação identidade, donde segue que $\det A = 1 > 0$, e portanto $\beta \sim \beta$.
- (ii) Suponhamos $\beta \sim \beta'$, então existe um único isomorfismo A com determinante maior que zero, tal que $\beta' = A\beta$, e conseqüentemente $A^{-1}\beta' = \beta$, com $\det A^{-1} = 1/\det A > 0$.
- (iii) Suponhamos que $\beta \sim \beta'$ e $\beta' \sim \beta''$, então existem únicos isomorfismos A e B ambos com determinante estritamente maior que zero, tal que $\beta'' = B\beta'$ e $\beta' = A\beta$. Portanto, $\beta'' = BA\beta$, e pela regra do determinante do produto, $\det(BA) = (\det B)(\det A)$, e logo o resultado segue.

□

Através da relação acima obtemos duas classes de equivalência. Uma orientação para o espaço vetorial V é uma decisão arbitrária por uma destas classes de equivalência, fixando o sinal positivo para uma destas classes de equivalência e o sinal negativo para a outra, diremos a base é positivamente orientada ou negativamente orientada, respectivamente. Por convenção, no caso do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , a classe de equivalência da base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ tem sinal positivo, representando assim a orientação positiva do espaço. Observe que nas construções acima, a ordenação da base é de absoluta importância.

Ao trabalharmos com espaços de dimensão 0, uma orientação será apenas uma escolha do sinal $+1$ ou -1 .

Definição 4.1. *Suponhamos $A : V \rightarrow W$ um isomorfismo entre espaços vetoriais. Sendo A um isomorfismo, se β e β' tem a mesma orientação em V então $A\beta$ e $A\beta'$ tem a mesma orientação em W . Fixando uma orientação para V e W , diremos que o isomorfismo A preserva orientação, se $A\beta$ tem o mesmo sinal em W que β em V . Caso contrário, diremos que A reverte orientação.*

Em outras palavras, A preserva orientação se carregar uma base positiva de V em uma base positiva de W .

4.2 Orientação de Variedades Suaves

Nosso objetivo é estender as noções desenvolvidas na sessão anterior para variedades suaves em geral. Uma orientação para uma variedade X , com ou sem fronteira, é uma escolha suave de orientação para os seus espaços tangentes, realizada da seguinte maneira: Para todo $x \in X$ deverá existir uma parametrização $h : U \rightarrow X$, tal que o isomorfismo

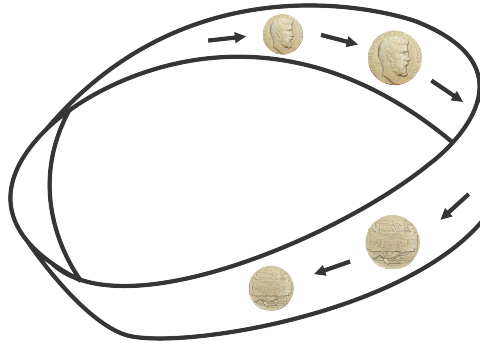
$$dh_u : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{h(u)}X$$

preserva orientação para todo $u \in U$.

Observação 4.1. *Quando a diferencial de um difeomorfismo f preserva orientação para todo ponto de seu domínio diremos que o difeomorfismo f preserva orientação.*

Sendo assim, para todo ponto p encontraremos uma vizinhança na qual todos os espaços tangentes estão munidos com a orientação positiva do \mathbb{R}^n , impossibilitando assim que pontos suficientemente próximos tenham orientações contrárias.

Uma vez definido o conceito de orientação, uma pergunta natural é se toda variedade possui uma orientação. O exemplo clássico que mostra que nem toda variedade admite uma orientação é dado pela Faixa de Moebius. Não provaremos formalmente que tal variedade não é dotada de orientação, veremos apenas de maneira intuitiva.



Imaginando uma moeda inserida na faixa de Moebius, como vemos na figura abaixo, ao darmos a volta na faixa em torno de uma pequena linha, chegaremos com a moeda orientada do lado oposto, e portanto a orientação não pode ser suave.

Analogamente ao caso de espaços vetoriais, no caso de variedades de dimensão 0, uma orientação será apenas associar a cada ponto o valor $+1$ ou -1 .

Diremos que uma variedade X é orientável se possuir uma orientação. E portanto, a variedade X admite pelo menos duas orientações. Se uma destas orientações foi especificada, ao trocarmos a orientação de cada espaço tangente obtemos a orientação oposta. Veremos a seguir, que quando a variedade X for conexa, ela admitirá exatamente duas orientações.

Proposição 4.1. *Uma variedade X orientável e conexa admite exatamente duas orientações.*

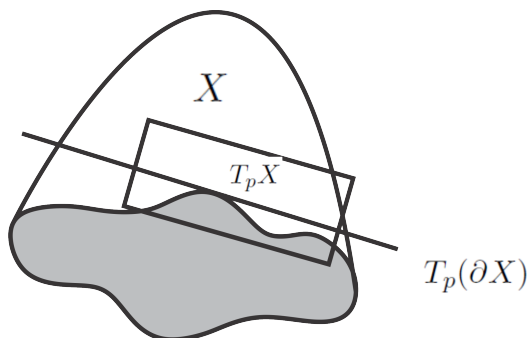
Demonstração. Consideremos duas orientações distintas da variedade, e seja $x \in X$. Deste modo, para o espaço tangente ao ponto x , estas orientações devem coincidir ou ser opostas. Mostraremos que, se tais orientações coincidirem em x , então elas coincidirão em todo ponto e, analogamente, se forem opostas, serão opostas em todo ponto. Mostrando assim que dadas duas orientações na variedade, ou elas coincidem, ou elas são opostas. Para isto, provaremos que o conjunto dos pontos em que a orientação coincide tal como o conjunto dos pontos em que a orientação é oposta são abertos e, pela conexidade da variedade, o resultado segue. Sejam $h : U \rightarrow X$ e $h' : U' \rightarrow X$ parametrizações ao redor de $x \in X$ tal que dh_u preserva a primeira orientação e dh'_u preserva a segunda orientação para todo $u \in U$ e $u' \in U'$. Podemos assumir, sem perda de generalidade que $h(0) = h'(0) = x$ e $h(U) = h'(U')$. Deste modo, se as duas orientações escolhidas tiverem o mesmo sinal, então $d(h^{-1} \circ h')_0$ tem determinante positivo em $u' = 0$, logo sendo o determinante uma aplicação contínua, existe uma vizinhança tal que $d(h^{-1} \circ h')_v$ tem determinante positivo para todo ponto v nessa vizinhança, e assim para todo ponto desta vizinhança os espaços tangentes deverão possuir a mesma orientação. De forma análoga, demonstramos o caso em que as orientações são opostas, mostrando assim que tais conjuntos são abertos, como queríamos demonstrar. \square

Como consequência direta do resultado acima temos o seguinte

Corolário 4.1. *Se a variedade X for formada por n componentes conexas, então teremos 2^n orientações possíveis.*

Finalmente uma variedade orientável é por definição um par, formado por uma variedade X juntamente com uma escolha de orientação suave. Se a variedade for conexa, uma vez fixada uma orientação denotaremos a variedade dotada com a orientação oposta por $-X$.

No caso em que a variedade X possui fronteira, a orientação de X induz uma orientação natural na fronteira da variedade. Analisemos cuidadosamente este caso.



Para um ponto de fronteira $p \in X$, sabemos que o espaço $T_p(\partial X)$ tem codimensão 1 em $T_p X$. Deste modo, existem dois vetores unitários no espaço tangente que são perpendiculares a $T_p(\partial X)$. Um destes vetores chamaremos de vetor interior e outro chamaremos de vetor exterior. Descrevamos formalmente tais vetores. Seja $h : U \rightarrow X$ uma parametrização local de p , onde $U \subset H^k$ é um subconjunto aberto em H^k com $h(0) = p$. Então $(dh_0)^{-1} : T_p X \rightarrow \mathbb{R}^k$ carrega o vetor unitário interior em H^k e o vetor unitário exterior em $-H^k$. É fácil ver que tal escolha, independe da escolha da parametrização.

Induziremos a seguir uma orientação na fronteira da variedade. Denotemos o vetor normal unitário exterior por n_x . Para induzir a orientação de cada espaço tangente a fronteira, utilizaremos a orientação já fixada do espaço tangente a variedade.

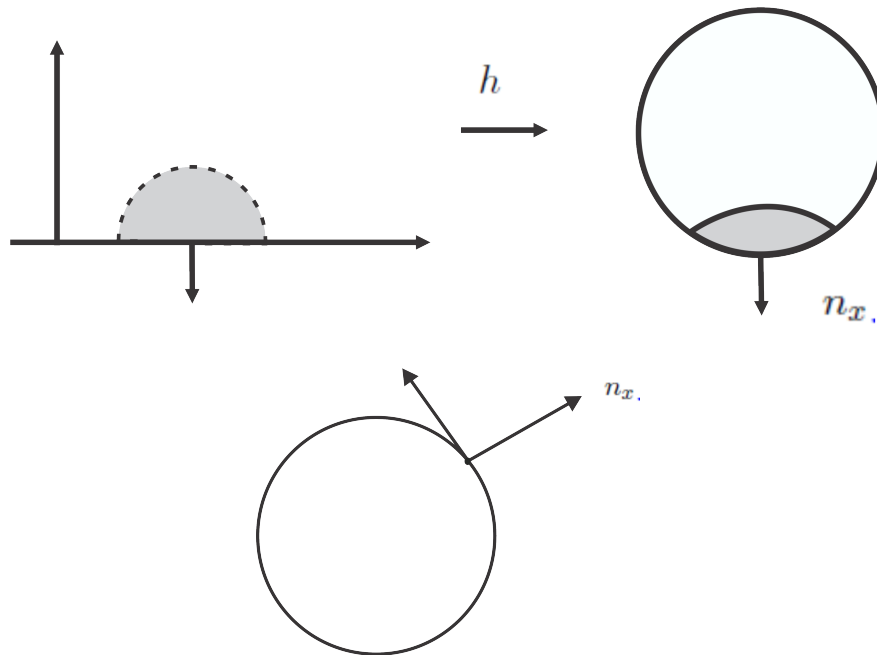
Diremos que uma base ordenada $\{v_1, \dots, v_k\}$ de $T_p(\partial X)$ é positiva ou negativa, se ao completarmos a base com o vetor exterior de forma a obtermos a base $\{n_x, v_1, \dots, v_k\}$, tal base for positiva ou negativa no espaço tangente ao ponto, respectivamente. Vejamos com um exemplo, que a construção formal acima coincide com a nossa intuição.

Consideremos o disco $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$, em \mathbb{R}^2 cuja fronteira é igual a esfera unitária S^1 . Vale observar, que neste caso particular, o espaço tangente em cada ponto coincide com o próprio \mathbb{R}^2 .

Nosso objetivo é observar que a orientação canônica do \mathbb{R}^2 dada pela base $\{e_1, e_2\}$ é induzida de maneira natural na esfera, que por convenção é o sentido anti-horário.

Observe que para a esfera unitária, em cada espaço tangente, temos duas direções a qual denotaremos por v_1 e v_1' , onde v_1 representa o sentido anti-horário e v_1' representa o sentido horário, como podemos ver na figura abaixo.

Deste modo, tomando o vetor que aponta para fora no ponto, e completando a base, observe que a base $\{n_x, v_1\}$ pertence a classe de equivalência da base $\{e_1, e_2\}$ isto é, determina a mesma



orientação. E portanto pela definição, a base v_1 , que determina o sentido anti-horário, possui o mesmo sinal de $\{e_1, e_2\}$ determinando assim a orientação positiva da esfera. Em resumo, fixada a orientação natural do espaço \mathbb{R}^2 , vimos que a orientação induzida na esfera é a orientação “natural”.

Exemplo 4.1. (*Variedade Produto*) No caso de uma variedade produto $X \times Y$ onde uma destas variedades não possui fronteira, supondo X e Y são orientáveis, então é possível construir uma orientação para a variedade produto. No exemplo, vimos que uma parametrização local para a variedade pode ser tomada da forma $h = g \times f$ onde g é uma parametrização de uma vizinhança de x e f uma parametrização de uma vizinhança de y . Consequentemente,

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x X \times T_y Y$$

Tomando $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_l\}$ bases de $T_x X$ e $T_y Y$ respectivamente, e denotando por $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ a base ordenada $\{(v_1, 0), \dots, (v_k, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_l)\}$. O sinal da base $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ será o produto do sinal da base α pelo sinal da base β

$$\text{sign}(\alpha \times 0, 0 \times \beta) = \text{sign}(\alpha)\text{sign}(\beta)$$

isto é, se α e β são ambas positivamente ou negativamente orientadas, $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ é positivamente orientada. Caso contrário $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ é orientada negativamente. Restando-nos assim mostrar que tal orientação não depende da escolha das bases.

Exemplo 4.2. Seja X uma variedade suave e considere o espaço de homotopia $I \times X$, onde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Deste modo, para cada $t \in I$, o espaço $X_t = \{t\} \times X$ é difeomorfo a variedade X ,

deste modo, orientemos X_t de modo que o difeomorfismo $x \rightarrow (t, x)$ preserve orientação. Sabemos que a fronteira $\partial(I \times X) = X_1 \cup X_0$. Vejamos qual a orientação natural induzida na fronteira. Para X_1 , o vetor unitário exterior $n_{(1,x)} = (1, 0) \in T_1(I) \times T_x(X)$. Sabemos que toda base do espaço $T(1, x)(X_1)$ é da forma $0 \times \beta$, onde β é uma base ordenada para $T_x X$. Deste modo, pela definição de orientação induzida na fronteira da variedade

$$\text{sign}(0 \times \beta) = \text{sign}(n_{(1,x)}, 0 \times \beta)$$

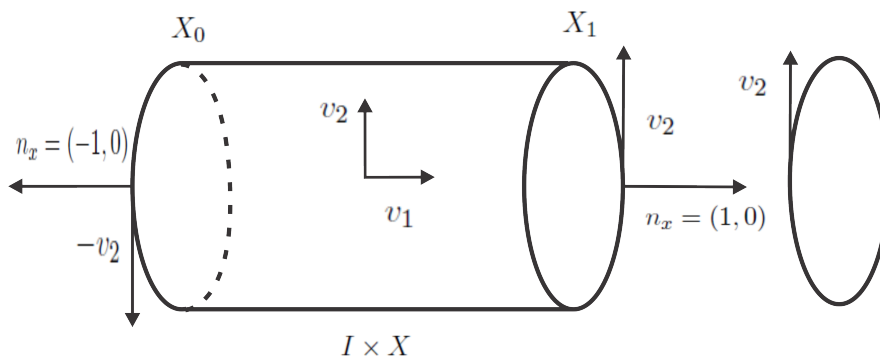
onde por definição de orientação produto

$$\text{sign}(1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{sign}(1)\text{sign}(\beta) = \text{sign}(\beta)$$

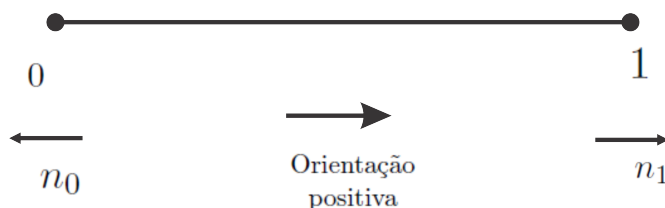
e conseqüentemente, a orientação de X_1 é em certo sentido igual a orientação de X . No entanto, para X_0 , o vetor unitário normal exterior é dado por $n_{(0,x)} = (-1, 0)$. Deste modo, o sinal da base de $0 \times \beta$ para $T_{(0,x)}(X_0)$ na orientação fronteira em X_0 é igual a

$$\text{sign}(-1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{sign}(-1)\text{sign}(\beta) = -\text{sign}(\beta).$$

Donde segue que a orientação da fronteira da variedade $\partial(I \times X) = X_1 \cup (-X_0)$.



Se a dimensão de X for 1, então a fronteira de X tem dimensão 0. Deste modo, a orientação do espaço vetorial de dimensão 0, $T_x(\partial X)$ coincide com o sinal da base $\{n_x\}$ de $T_x X$. Consideremos o caso em particular do intervalo compacto, $X = [0, 1]$ com a orientação induzida por \mathbb{R} . Em $x = 1$, o vetor normal unitário exterior $1 \in \mathbb{R} = T_1 X$, que é positivamente orientado, e em $x = 0$ o vetor normal unitário exterior é dado por $-1 \in \mathbb{R} = T_0 X$. Portanto, a orientação do espaço $T_1(\partial X)$ é $+1$ e a orientação do espaço $T_0(\partial X)$ é -1 .



Agora, consideremos X uma variedade compacta orientada de dimensão 1 com fronteira. Pelo apêndice, os pontos de fronteira, estão ligados por uma “cópia” do intervalo, e portanto a soma do sinal das orientações dos pontos de fronteira de uma variedade compacta de dimensão 1 é zero.

4.3 Vizinhanças Tubulares

Definição 4.2. (Campo de Vetores de Normais) Um campo de vetores normais à variedade $M \subset \mathbb{R}^k$, é uma aplicação suave que associa a cada $x \in M$ um vetor $v(x) \in T_x M^\perp$.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação real definida de um subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Sagemos que o gradiente da aplicação é dado por

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

Proposição 4.2. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave, definida em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e seja $c \in \mathbb{R}$, se $M \subset f^{-1}(c)$ for uma variedade suave, então $\nabla f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores normais suave em M .

Demonstração. Para cada $p \in M$ e cada vetor tangente $v \in T_p M$, seja $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ um caminho suave com $\lambda(0) = p$ e $\lambda'(0) = v$. Então $f(\lambda(t)) = c$, para todo t , e conseqüentemente, $(f \circ \lambda)'(0) = 0$. Logo

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0) = 0,$$

donde segue que o gradiente é ortogonal a M , mostrando assim o resultado. \square

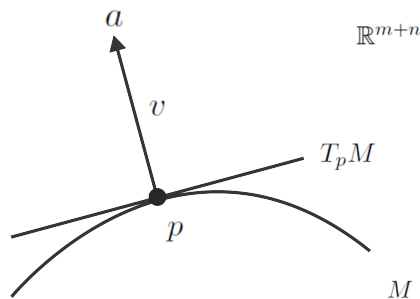
Observação 4.2. Se em um aberto de uma variedade são definidos s campos de vetores v_1, \dots, v_s , linearmente independentes em cada ponto, os vetores podem ser supostos ortonormais, isto é, vetores unitários, dois a dois ortogonais, via o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Corolário 4.2. Seja $M = f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Então $\nabla f^1, \dots, \nabla f^n : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ são campos de vetores de vetores normais suaves em M , os quais constituem uma base de $T_p M^\perp$, em cada ponto $p \in M$.

Demonstração. Com efeito, se $c = (c^1, \dots, c^n)$, então $M \subset (f^i)^{-1}(c^i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, e conseqüentemente, utilizando a proposição anterior, ∇f^i é um campo de vetores normais a variedade. Além disto, uma vez que c é um valor regular para M , em cada ponto da imagem inversa de c , a diferencial $f'(p) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva. Conseqüentemente, as n linhas, que são os vetores gradiente ∇f^i , da matriz de $f'(p)$ são linearmente independentes, ficando assim demonstrado o resultado. \square

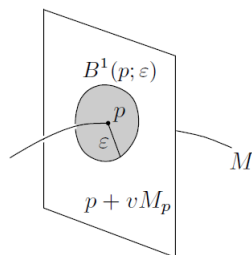
4.3.1 A vizinhança tubular de uma variedade compacta

Seja $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma variedade suave de dimensão m . Diremos que o segmento $[p, a] = \{p + t(a - p) : 0 \leq t \leq 1\}$ é normal a M no ponto p se $p \in M$ e $v = a - p \in T_p M^\perp$. A bola

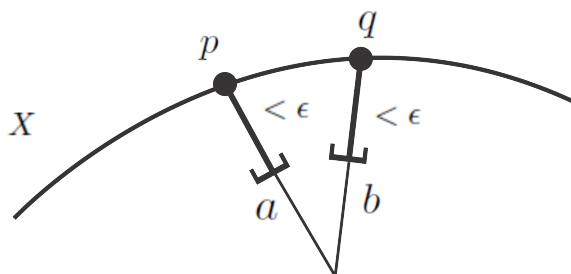


normal de dimensão n , denotada por $B^\perp(p, \epsilon)$ é a reunião dos segmentos normais a M no ponto p , de comprimento estritamente menor que ϵ . Consequentemente,

$$B^\perp(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} : |x - p| < \epsilon \text{ com } \langle x - p, v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in T_p M\}$$



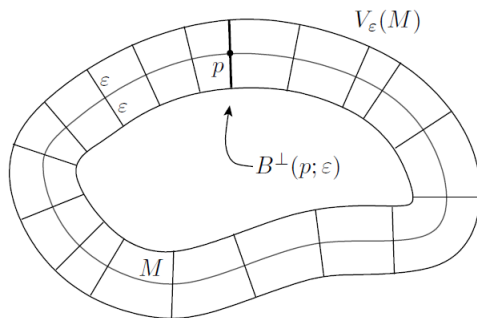
Diremos que o número real $\epsilon > 0$ é um raio normal admissível para um subconjunto X da variedade M quando, ao tomarmos dois segmentos normais $[p, a]$ e $[q, b]$ a M , com comprimento estritamente menor que ϵ , com $p \neq q$, tenhamos $[p, a] \cap [q, b] = \emptyset$. Isto é, $B^\perp(p, \epsilon) \cap B^\perp(q, \epsilon) = \emptyset$, para todo $p \neq q$ em X e um raio normal ϵ admissível para X .



Provaremos a seguir o teorema que demonstra que prova a existência de uma vizinhança tubular quando a variedade suave é compacta.

Teorema 4.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ uma variedade suave compacta de dimensão m . Então*

1. Existe $\epsilon > 0$ raio normal admissível para M .
2. A união $V_\epsilon(M) = \bigcup_{p \in M} B^\perp(p, \epsilon)$ dos segmentos normais a M com comprimento estritamente menor que ϵ , chamado vizinhança tubular de M de raio ϵ , é um aberto de \mathbb{R}^{m+n} .
3. A aplicação $\pi : V_\epsilon(M) \rightarrow M$, que associa a cada ponto de $V_\epsilon(M)$ o pé do único segmento normal que o contém é suave.



Demonstração. Provemos que tal resultado é válido localmente, isto é, que todo ponto $p_0 \in M$ pertence a um aberto $U \subset M$ para o qual possamos construir um raio normal admissível $\epsilon_U > 0$.

Com efeito, sabemos que é possível tomar uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ e n campos de vetores normais unitários suaves $v_1, \dots, v_n : V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ mutuamente ortogonais em cada ponto.

Considere a aplicação suave

$$\begin{aligned} \Phi : \quad V_0 \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, \alpha^1, \dots, \alpha^n) &\longmapsto \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(\varphi(x)). \end{aligned}$$

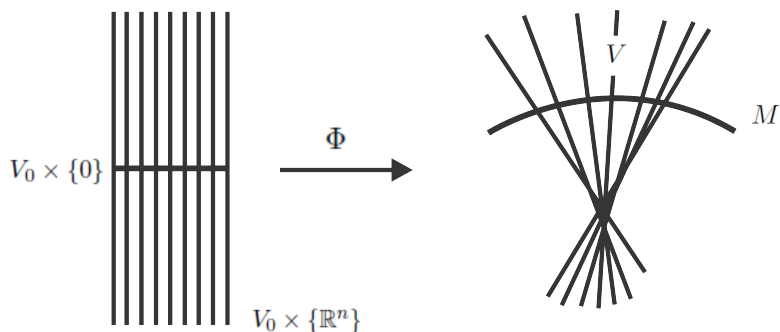
Geometricamente, a aplicação Φ é a extensão de φ , que aplica de forma isométrica e linear, a variedade linear $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ sobre a variedade linear $\varphi(x) + T_p M^\perp$, para cada $x \in V_0$.

Observe que para cada $x \in V_0$, a matriz jacobiana Φ no ponto $(x, 0)$ tem por colunas os vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x), 1 \leq i \leq m \quad e \quad v_j(\varphi(x)), m+1 \leq j \leq m+n$$

onde os m primeiros vetores formam uma base para $T_{\varphi(x)}M$ enquanto que os n últimos formam uma base para $T_{\varphi(x)}M^\perp$, e portanto $\Phi'(x, 0) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é um isomorfismo linear.

Aplicando o teorema da aplicação inversa e denotando por $\varphi(x_0) = p_0$, existe uma vizinhança aberta do ponto $(x_0, 0)$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, do tipo $U_0 \times B^n(\epsilon)$, tal que $x_0 \in U_0 \subset V_0 \subset \mathbb{R}^m$, e denotando $U = \varphi(U_0)$, a aplicação Φ aplica $U_0 \times B^n(\epsilon)$ na união $V_\epsilon(U)$ de todos os segmentos normais de origem em U e comprimento estritamente menor que ϵ . Note que, se $p \neq q$ são pontos de U , então $B^\perp(p, \epsilon) \cap B^\perp(q, \epsilon) = \emptyset$, pois dados dois segmentos normais de comprimentos estritamente menores que ϵ , com origem em pontos distintos $\varphi(x), \varphi'(x) \in U$, são imagens de segmentos da



forma $x \times I$ e $x' \times I'$ com $x \neq x'$, I e I' contidos em raios da bola de raio ϵ . E portanto os segmentos dados $\Phi(x \times I)$ e $\Phi(x' \times I')$ são disjuntos. O diagrama comutativo

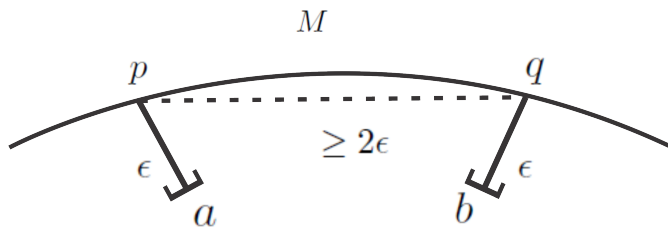
$$\begin{array}{ccc}
 V_\epsilon(U) & \xrightarrow{\pi} & U \\
 \Phi \uparrow & & \uparrow \varphi \\
 U_0 \times B^n(\epsilon) & \xrightarrow{\pi_1} & U_0
 \end{array}$$

nos mostra que $V_\epsilon(U)$ é aberto em \mathbb{R}^{m+n} , mais ainda que a aplicação $\pi : V_\epsilon(U) \rightarrow U$ é suave.

Uma vez demonstrada a proposição de maneira local, provemos que a proposição é válida de maneira global. Tomemos uma cobertura da variedade M com vizinhanças construídas de maneira que possuam um raio normal admissível. Sendo a variedade M compacta, é possível extrair uma subcobertura finita U_1, \dots, U_r de vizinhanças as quais admitem os raios normais $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$, respectivamente, e tomemos $\epsilon > 0$ inferior a todos os ϵ_i s e de modo que 2ϵ é o número de lebesgue da cobertura.

Afirmção: ϵ é um raio normal admissível para M .

Com efeito, dados dois segmentos normais $[p, a]$ e $[q, b]$ de comprimento estritamente menor que ϵ , ou p e q pertencem ao mesmo aberto ou $|p - q| \geq 2\epsilon$. No primeiro caso, os segmentos são disjuntos uma vez que $\epsilon < \epsilon_i$. No segundo caso, os segmentos terão que necessariamente ser disjuntos, pois um triângulo não pode ter dois raios estritamente menores que ϵ e um terceiro lado com comprimento maior ou igual a 2ϵ .



Uma vez que as demais propriedades tem caráter local, podemos concluir que

$$V_\epsilon(M) = \bigcup V_\epsilon(U)$$

é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{m+n} e $\pi : V_\epsilon(M) \rightarrow M$ é uma aplicação suave. □

Capítulo 5

Alguns Resultados Importantes

Destacaremos neste capítulo alguns teoremas clássicos que podem ser demonstrados com o auxílio das técnicas estudadas no capítulo anterior.

5.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 5.1. (*Fundamental da Álgebra*) Se $P(z)$ é um polinômio com variável complexa, então $P(z)$ deve possuir uma raiz.

Demonstração. Para a demonstração desse resultado passaremos do plano dos números complexos para uma variedade compacta. Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e considere a projeção estereográfica

$$\pi_N : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$

do polo norte. Neste caso identificaremos o conjunto dos números complexos com o plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. O polinômio $P : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ corresponde a uma aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_N(x), & \text{se } x \neq (0, 0, 1) \\ (0, 0, 1), & \text{se } x = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Verifiquemos que a aplicação f é suave. Observe que para isto, é suficiente mostrar que a aplicação f é suave em uma vizinhança do ponto $(0, 0, 1)$. Consideremos então π_S como sendo a projeção estereográfica do polo sul $(0, 0, -1)$ e considere

$$Q(z) = \pi_S \circ f \circ \pi_S^{-1}(z)$$

Como o polinômio $P(z)$ é não constante, podemos supor $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ com $a_0 \neq 0$. Podemos verificar ainda que,

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

E portanto,

$$\begin{aligned}
 Q(z) &= \pi_S \circ \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_N \circ \pi_S^{-1}(z) \\
 &= \pi_S \circ \pi_N^{-1} \circ P\left(\frac{1}{z}\right) \\
 &= \pi_S \circ \pi_N^{-1}\left(a_0 \frac{1}{z^n} + \dots + a_n\right) \\
 &= \frac{z^n}{\overline{a_0} + \dots + \overline{a_n} z^n}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

que é suave em uma vizinhança do ponto 0, donde segue que

$$f = \pi_S^{-1} \circ Q \circ \pi_S$$

é suave em uma vizinhança de $(0, 0, 1)$.

Note ainda que f tem um número finito de pontos críticos, uma vez que $P'(z) = \sum_{j=1}^n a_{n-j} j z^{j-1}$ deste modo deverá ter apenas $n - 1$ raízes e conseqüentemente, sendo $f = \pi_S^{-1} \circ P \circ \pi_N$ um difeomorfismo, f tem apenas um número finito de pontos críticos. Deste modo, o conjunto dos valores regulares coincide com a esfera S^2 com exceção de uma quantidade finita de pontos, isto é, em um conjunto conexo. Conseqüentemente, a aplicação que associa a cada ponto y a cardinalidade da imagem inversa sendo localmente constante e definida em um conjunto conexo, é constante. Sendo assim, como $\#f^{-1}(y) \neq 0$ para algum y , segue que $\#f^{-1}(y) \neq 0$, para todo y . Portanto, para todo $y \in S^2$ existe um $x \in S^2$ tal que $f(x) = y$. Logo f é sobrejetora, o que implica que P é sobrejetora e conseqüentemente, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$. \square

5.2 O Teorema de Brown-Sard

De modo geral, é esperado que o conjunto dos valores regulares de uma aplicação suave seja finito. Provaremos a seguir, que este conjunto não é finito, mas conforme esperado, tal conjunto é tão pequeno quanto, isto é, tem medida nula. Para demonstrarmos este resultado, precisaremos de alguns fatos preliminares de teoria da medida.

Se $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ pontos do \mathbb{R}^n tais que $a_i < b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, definiremos o sólido retangular $S(a, b)$ como o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$, tais que $a_i < x_i < b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. O produto

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

é o volume de S , o qual denotaremos por $vol(S)$.

Definição 5.1. *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, se para todo $\epsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável de sólidos S_1, S_2, \dots tais que $\sum vol(S_i) < \epsilon$.*

Lema 5.1. *Seja S um sólido retangular e $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma cobertura enumerável de \overline{S} . Então $\sum \text{vol}(S_j) \geq \sum \text{vol}(S)$.*

Demonstração. Considere $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$, e seja $S = S(a, b)$. O número de inteiros z_t em cada intervalo (a_t, b_t) é estritamente menor que $b_t - a_t + 1$ e maior que $b_t - a_t - 1$. Suponhamos que o comprimento $b_i - a_i$ de cada lado de S é maior que 1. Então o número de pontos de \mathbb{Z}^n é menor que

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i + 1)$$

e maior que

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 1)$$

Se S_1, S_2, \dots uma cobertura de \overline{S} , então, por compacidade, podemos supor que S_1, \dots, S_N é uma cobertura para \overline{S} . Deste modo, o número de pontos de \mathbb{Z}^n em S é menor ou igual ao número de pontos de \mathbb{Z}^n em S_1, \dots, S_N . Denotando por $S_j = S(a^j, b^j)$, teremos

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (b_i^j - a_i^j + 1) \quad (5.2)$$

Para cada λ positivo, defina $\lambda S(a, b) = S(\lambda a, \lambda b)$. Desde que $\overline{\lambda S}$ é coberto por $\lambda S_1, \dots, \lambda S_N$, por (5.2), teremos

$$\prod_{i=1}^n (\lambda b_i - \lambda a_i - 1) \leq \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (\lambda b_i^j - \lambda a_i^j + 1) \quad (5.3)$$

e portanto, não importa qual o comprimento de S , se λ é suficientemente grande, então λS tem todos os lados maiores que 1. Dividindo assim a equação (5.3) por λ^n , e fazendo $n \rightarrow \infty$, o resultado segue. □

Para demonstrar o teorema de Sard, precisaremos de uma versão do teorema de Fubinni que provaremos a seguir. Escrevendo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, denotemos por $V_c = \{c\} \times \mathbb{R}^l$. Diremos que um subconjunto de V_c tem medida nula quando, ao identificarmos tal o espaço V_c com \mathbb{R}^l o conjunto tiver medida nula em \mathbb{R}^l .

Lema 5.2. *Seja A um subconjunto compacto do \mathbb{R}^n . Suponhamos que $A \cap V_c$ está contido em um subconjunto aberto U de V_c . Então, para qualquer intervalo I , adequadamente pequeno, sobre c em \mathbb{R} , $A \cap V_I$ está contido em $I \times U$.*

Demonstração. Caso contrário, deve existir uma sequência de pontos (x_j, c_j) em A tais que $c_j \rightarrow c$ e $x_j \notin U$. Substituindo esta sequência por uma convergente para 1, para obter a contradição. □

Teorema 5.2. (Fubini) *Seja A um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n tal que $A \cap V_c$ tem medida nula em V_c , para cada $c \in \mathbb{R}^k$. Então A tem medida nula em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que A é um subconjunto compacto, uma vez que podemos escrevê-lo como uma união enumerável de subconjuntos compactos. Utilizando argumentos de indução, é suficiente demonstrar o teorema no caso $k = 1$ e $l = n - 1$. Podemos escolher um intervalo $I = [a, b]$ tal que $A \subset V_I$. Para cada $c \in I$, escolha uma cobertura de $A \cap V_c$ por sólidos $n - 1$ dimensionais $S_1(c), \dots, S_{N_c}(c)$ que tem um volume total menor que ϵ . Pelo lema anterior, escolha um intervalo $J(c) \in \mathbb{R}$ tal que os sólidos retangulares $J(c) \times S_i(c)$ cobrem $A \cap V_J$. Como a coleção de intervalos $J(c)$ cobre o intervalo compacto $[a, b]$, podemos tomar uma coleção finita de intervalos J'_j com comprimento total menor que $2(b - a)$. Cada J'_j está contido em algum intervalo $J(c_j)$, deste modo os sólidos $J'_j \times S_i(c_j)$ cobrem A , mais ainda, tem volume total menor que $2\epsilon(b - a)$, demonstrando assim o resultado. \square

Teorema 5.3. (Sard) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e seja C o conjunto dos pontos críticos de f . Então o conjunto dos valores críticos $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ tem medida nula.*

Demonstração. A prova será feita através de indução sobre n . Observe primeiramente que a demonstração faz sentido apenas para $n \geq 0$ e $p \geq 1$. Como o conjunto \mathbb{R}^0 consiste de apenas um ponto, ao tomarmos uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^p$, teremos que a imagem da aplicação $f(U) = \{y\}$ possui apenas um ponto, e como $f(C) \subset f(U)$, segue imediatamente que $f(C)$ tem medida nula.

Seja $C_1 \subset C$ o conjunto de todos os pontos críticos $x \in U$ tais que as primeiras derivadas parciais da aplicação f são nulas. De forma mais geral, considere C_i o conjunto de todos os pontos $x \in U$ tais que todas as derivadas parciais com ordem menor ou igual a i são nulas no ponto x .

Deste modo, pela definição dos conjuntos segue que

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$$

Dividiremos então a demonstração em três passos:

Passo 1: A imagem $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula.

Passo 2: A imagem $f(C_i \setminus C_{i+1})$ tem medida nula, $\forall i \geq 1$.

Passo 3: Para k suficientemente grande, a imagem $f(C_k)$ tem medida nula.

Uma vez demonstrado esses passos, observe que como

$$\begin{aligned} C &= (C \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup (C_{k+1} \setminus C_k) \cup C_k \Rightarrow \\ f(C) &\subset f(C \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup f(C_{k+1} \setminus C_k) \cup f(C_k) \end{aligned}$$

mostrando assim que $f(C)$ tem medida nula. Provemos a seguir cada um destes passos.

Demonstração do Passo 1: No caso em que $p = 1$, observe que C será o conjunto no qual

$$0 = \text{posto}_x f < 1 \Rightarrow df_x \equiv 0.$$

ou seja, $C = C_1$, e portanto $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula.

Suponhamos assim que $p \geq 2$. Para cada $\bar{x} \in C \setminus C_1$ encontraremos uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(V \cap C)$ tenha medida nula. Desde que é possível cobrir o conjunto $f(C \setminus C_1)$ com uma quantidade enumerável de vizinhanças demonstraremos que $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula.

Observe que como $\bar{x} \notin C_1$, teremos que alguma das suas derivadas parciais será não nula. Sem perda de generalidade suponhamos que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})$ seja não nula.

Deste modo, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

onde teremos,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto, $\det dh_{\bar{x}} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{x}) \neq 0$. Como $dh_{\bar{x}}$ é um isomorfismo, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que

$$h|_V : V \rightarrow h(V) = V'$$

é um difeomorfismo. Deste modo definindo a aplicação $g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ e denotando por C' o conjunto dos seus pontos críticos, teremos que C' será o conjunto de todos os pontos $x \in V'$ tais que $\text{postod}g_x < p$. Mas, como $dg_x = df_{h^{-1}(x)} \circ dh_x^{-1}$, e a aplicação h restrita a V é um difeomorfismo, segue que $\text{postod}g_x = \text{postod}f_{h^{-1}(x)}$. Logo $x \in C'$ se, e somente se, $h^{-1}(x) \in C \cap V$ se, e somente se, $x \in h(V \cap C)$, e portanto $C' = h(V \cap C)$.

Conseqüentemente, o conjunto dos valores críticos de g , $g(C') = f(V \cap C)$. Denotando por π_1 a projeção sobre a primeira coordenada, observe que

$$\pi_1 \circ f = f_1 = \pi_1 \circ h$$

e restringindo h ao subconjunto V teremos,

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ g(x) &= \pi_1(x) \Rightarrow \\ g_1(x) &= x_1 \end{aligned}$$

E portanto, fixado t , teremos que $g(t, x_2, \dots, x_n) \in t \times \mathbb{R}^{p-1}$, mostrando assim que a aplicação g leva hiperplanos em hiperplanos. Consideremos a seguir,

$$g^t : (t \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow t \times \mathbb{R}^{p-1}$$

a restrição da aplicação g ao hiperplano $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Observe que,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

e portanto,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{bmatrix} + 1$$

Deste modo, x é um ponto crítico de g se, e somente se, x é ponto crítico de g^t , onde $x = (t, x_2, \dots, x_n)$. Pela hipótese de indução, como o domínio da aplicação g^t é um subconjunto do \mathbb{R}^{n-1} e a aplicação g é suave então o conjunto dos seus pontos críticos tem medida nula em $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Logo, o conjunto dos valores críticos da aplicação g , que coincide com o conjunto dos valores críticos de cada aplicação g^t intersecta cada hiperplano $t \times \mathbb{R}^{p-1}$ em um conjunto de medida nula. Deste modo, por (5.2), concluímos que $g(C') = f(V \cap C)$ tem medida nula, ficando assim demonstrado o primeiro passo.

Demonstração do Passo 2: Observe que para cada $\bar{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$, deve existir alguma derivada parcial de ordem $k+1$ que é não nula, isto é

$$\frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(\bar{x}) \neq 0$$

consequentemente a aplicação,

$$w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$$

se anula em \bar{x} , mas

$$\frac{\partial w}{\partial x_{s_1}}(\bar{x}) = \frac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(\bar{x}) \neq 0.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $s_1 = 1$. Considerando a aplicação $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

teremos que

$$dh_{\bar{x}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

portanto,

$$dh_{\bar{x}} = \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \neq 0$$

e pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança aberta V de \bar{x} tal que $h|_V: V \rightarrow V'$ é um difeomorfismo.

Se $(x_1, \dots, x_n) \in C_k \cap V$, então

$$h(x_1, \dots, x_n) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

e como $x \in C_k$, teremos $w(x) = \frac{\partial^k f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(x) = 0$. Mostrando assim que é possível restringir a aplicação h para o conjunto $V \cap C_k$ sobre $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Utilizando argumento análogo ao da demonstração do passo 1 e considerando a aplicação $g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^p$, podemos considerar sua restrição,

$$\bar{g}: (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^p$$

e portanto, teremos que um ponto x é ponto crítico de \bar{g} se, e somente se, $h^{-1}(x)$ é um ponto crítico da aplicação f . Mas $h^{-1}: (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow C_k \cap V$, então se $h^{-1}(x) \in C^k \cap V$, e conseqüentemente $df_{h^{-1}(x)} \equiv 0$, para todo $x \in (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$. Logo o conjunto dos valores críticos de g será

$$g((0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V') = f \circ h^{-1}((0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V') = f(C^k \cap V) \quad (5.4)$$

Utilizando indução sobre k , sabemos que para $k = 1$, $f(C \cap V)$ tem medida nula. Suponhamos que $f(C_k \cap V)$ tem medida nula, então como

$$\begin{aligned} C_{k+1} \subset C_k &\Rightarrow \\ C_{k+1} \cap V \subset C_k \cap V &\Rightarrow \\ f(C_{k+1} \cap V) \subset f(C_k \cap V) & \end{aligned}$$

provando assim que o conjunto dos valores críticos de \bar{g} tem medida nula.

Analogamente ao passo 1, cada ponto \bar{x} de $C_k \setminus C_{k+1}$ possui uma vizinhança, $f(C_k \cap V)$, que tem medida nula. Como podemos cobrir $C_k \setminus C_{k+1}$ com uma quantidade enumerável destas vizinhanças, a demonstração do passo 2 segue. Provemos a seguir o último passo.

Demonstração do Passo 3: Sendo U um subconjunto aberto, considere $I^n \subset U$, um cubo com

lado δ . Para k suficientemente grande, mais especificamente, tomando $k > \frac{n}{p} - 1$, provaremos que $f(C_k \cap I^n)$ tem medida nula. Como C_k pode ser coberto por uma quantidade enumerável de cubos, teremos que

$$C_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \Rightarrow f(C_k) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C_k \cap I^n)$$

e portanto ficará demonstrado que $f(C_k)$ tem medida nula.

Pela Fórmula de Taylor, sabemos que

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(h) + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{s_1}} + R(x, h) \quad (5.5)$$

e como $x \in C^k$, podemos escrever

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h) \quad (5.6)$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x, h)\|}{\|h\|^{k+1}} = 0.$$

Sendo I^n compacto teremos,

$$\|R(x, h)\| \leq c\|h\|^{k+1}$$

onde c é uma constante que depende apenas da aplicação f , do cubo I^n . Subdividindo cada cubo I^n em r^n cubos com lado $\frac{\delta}{r}$, tomando I_1 um cubo desta subdivisão contendo o ponto $x \in C_k$, então qualquer ponto pode ser tomado da forma $x+h$, onde $\|h\| \leq \sqrt{n}\frac{\delta}{r}$, pois a maior distância a ser acrescentada dentro de um cubo é o valor de sua diagonal. Então como todo ponto de I_1 é da forma $x+h$, por (5.6)

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\| &\leq \|R(x, h)\| \\ &\leq c\|h\|^{k+1} \\ &\leq c \left(\sqrt{n}\frac{\delta}{r} \right)^{k+1} \\ &= c \frac{\sqrt{n}\delta^{k+1}}{r^{k+1}} \leq \frac{a}{r^{k+1}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $a = 2c(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$ é uma constante. E portanto, a imagem $f(I_1)$ mora no cubo de raio a/r^{k+1} e centro $f(x)$. Deste modo, cada $I^n = \bigcup_{i=1}^{r^n} I_j$, e logo

$$f(C_k \cap I^n) \subset \bigcup_{i=1}^{r^n} f(I_j)$$

Observe finalmente que cada um destes cubos ao chegar na imagem passará a ter apenas, p lados e portanto

$$\text{Vol}f(I_j) \leq r^n \left(\frac{a}{r^{k+1}}\right)^p$$

Como estamos tomando $k + 1 > n/p$, fazendo r suficientemente grande, é possível obtermos $\text{Vol}f(I_j)$ tão pequeno quanto desejarmos, e conseqüentemente $f(I_j)$ tem medida nula, mostrando assim que $f(C_k \cap I^n)$ tem medida nula, ficando assim demonstrado o teorema de Sard. \square

Teorema 5.4. *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Se $A \subset U$ tem medida nula, então $f(A)$ tem medida nula.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que \bar{A} é compacto, uma vez que é possível escrever A como uma união enumerável de subconjuntos abertos cujo fecho é compacto. Seja W uma vizinhança aberta de A tal que \bar{W} é compacto e está contido em U . Desde que \bar{W} é compacto, existe uma constante M tal que

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

para todo $x, y \in \bar{W}$. Segue que existe uma outra constante M' , tal que se S é um cubo contido em W , então $f(S)$ está contido em um cubo S' de volume menor que $M'\text{vol}(S)$. Mostrando que o conjunto A pode ser coberto por uma seqüência de cubos S_1, S_2, \dots contidos em W , cuja $\sum \text{vol}(S_i) < \epsilon$. Então obtemos uma cobertura S'_1, S'_2, \dots de $f(A)$ por cubos cuja soma $\sum \text{vol}(S'_i) < \epsilon M'$. Como ϵ foi tomado de maneira arbitrária, segue que $f(A)$ tem medida nula. \square

Diremos que um subconjunto A de uma variedade X de dimensão k , tem medida nula se, para toda parametrização local $f : U \rightarrow X$, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ tem medida nula em $U \subset \mathbb{R}^k$. Do teorema anterior, é suficiente verificar que para todo ponto, existem uma parametrização local $f : U \rightarrow X$ para a qual $f^{-1}(A)$ tem medida nula.

Segue assim, como corolário imediato um resultado devido a Brown.

Corolário 5.1. *(Brown-Sard) O conjunto dos valores regulares de uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ definida entre as variedades M e N é denso em N .*

Demonstração. Pelo segundo axioma da enumerabilidade, é possível encontrar uma coleção enumerável de conjuntos abertos (U_i, V_i) tal que U_i é um subconjunto aberto em X e V_i é aberto em Y , tais que $\{U_i\}_i$ forma uma cobertura de X , onde $f(U_i) \subset V_i$, e cada U_i e V_i é difeomorfo a subconjuntos abertos do espaço euclidiano. Usando o teorema de Sard, o resultado segue. \square

5.3 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

O teorema do ponto fixo de Brouwer foi proposto em 1910 pelo matemático holandês Luitzen E. Jan Brouwer. Topologicamente, o resultado de Brouwer pode ser entendido da seguinte forma:

coloque uma folha de papel amassada aleatoriamente acima de outra folha do mesmo padrão; o teorema de Brouwer estabelece que deve existir pelo menos um ponto na folha amassada que está diretamente acima do ponto correspondente da folha que está abaixo. Nosso objetivo é apresentar uma prova para o teorema do ponto fixo de Brouwer, enunciado a seguir

Denotemos por $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Teorema 5.5. (*Ponto Fixo de Brouwer*) *Toda aplicação contínua $G : D^n \rightarrow D^n$ tem um ponto fixo.*

Para demonstrarmos este resultado precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 5.3. *Seja X uma variedade compacta com fronteira. Não existe uma aplicação suave $f : X \rightarrow \partial X$ tal que $f|_{\partial X}$ seja a aplicação identidade.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que tal aplicação exista, e consideremos $y \in \partial X$ valor regular da aplicação f . Sendo $f|_{\partial X} = Id_{\partial X}$, como todo $y \in \partial X$ é um valor regular para a identidade, pelo lema 3.4, $f^{-1}(y)$ é uma variedade compacta de dimensão 1 com fronteira dada pela equação

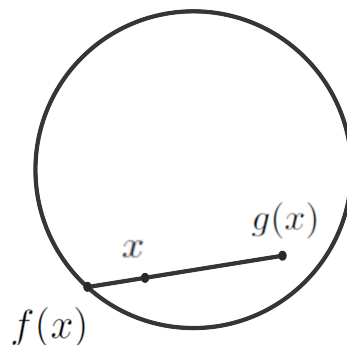
$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial X = f^{-1}|_{\partial X}(y) = \{y\} \tag{5.8}$$

Utilizando o resultado que demonstraremos no apêndice, como $f^{-1}(y)$ é uma variedade compacta de dimensão 1, sabemos que $f^{-1}(y)$ possui um número par de pontos de fronteira, o que contradiz (5.8). □

Em particular, podemos concluir que a aplicação identidade $Id : S^n \rightarrow S^n$, não pode ser estendida pela aplicação suave $f : D^{n+1} \rightarrow S^n$. E conseqüentemente o disco não pode ser “contraído” suavemente em uma esfera. No próximo capítulo, veremos tal construção de forma mais detalhada.

Lema 5.4. *Toda aplicação suave $g : D^n \rightarrow D^n$ admite um ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que para todo $x \in D^n$ tenhamos $g(x) \neq x$.



Sendo $g(x) \neq x$, a reta $x + t(x - g(x))$ passando pelos pontos x e $g(x)$, interceptará a esfera unitária em dois pontos distintos, dados explicitamente por

$$\begin{aligned} \|x + t(x - g(x))\| = 1 &\Leftrightarrow \\ \|x\|^2 + 2t\langle x, x - g(x) \rangle + t^2\|x - g(x)\|^2 = 1 \end{aligned}$$

cujas raízes são,

$$\frac{-\langle x, x - g(x) \rangle \pm \sqrt{\langle x, x - g(x) \rangle^2 - (\|x\|^2 - 1)\|x - g(x)\|^2}}{\|x - g(x)\|^2} \quad (5.9)$$

Deste modo, definindo assim a aplicação $f : D^{n+1} \rightarrow S^n$, que associa a cada x a raiz mais próxima do ponto x , explicitamente $f(x)$ é dada por

$$f(x) = x + \frac{-\langle x, x - g(x) \rangle + \sqrt{\langle x, x - g(x) \rangle^2 - (\|x\|^2 - 1)\|x - g(x)\|^2}}{\|x - g(x)\|^2}(x - g(x)) \quad (5.10)$$

Observe que como teremos duas raízes distintas, o discriminante

$$\Delta = 4(\langle x, x - g(x) \rangle^2 - \|x\|^2 - 1)\|x - g(x)\|^2 > 0$$

Donde segue que a aplicação f é suave. Observe ainda que $f(x) = x$, se $x \in S^n$ e, portanto, $f|_{S^n} = Id_{S^n}$, o que contradiz o lema 3.4. \square

Possuimos agora ferramentas suficientes para realizar a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, na qual recorreremos ao Teorema da Aproximação de Weirtrass.

Teorema 5.6. (*Ponto Fixo de Brouwer*) *Toda aplicação contínua $G : D^n \rightarrow D^n$ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Do teorema da aproximação de Weistrass, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|P_1(x) - G(x)\| < \epsilon$$

para todo $x \in D^n$. Para evitar que $P_1(x)$ não pertença a bola unitária para algum $x \in D^n$, defina

$$P(x) = \frac{P_1(x)}{1 + \epsilon}$$

De 5.3 e usando a desigualdade triangular, teremos

$$\begin{aligned} \|P_1(x)\| - \|G(x)\| &< \|P_1(x) - G(x)\| < \epsilon \Rightarrow \\ \|P_1(x)\| &\leq 1 + \epsilon, \forall x \in D^n \Rightarrow \|P(x)\| \leq 1, \forall x \in D^n. \end{aligned}$$

E ainda $\|P(x) - G(x)\| < 2\epsilon$. Suponhamos que $G(x) \neq x$, para todo $x \in D^n$. Então a aplicação

$$x \mapsto \|G(x) - x\|$$

é contínua, e estando definida em um compacto, atinge um valor mínimo $\mu > 0$.

Escolhendo um polinômio P de forma que $\|P(x) - G(x)\| < \mu$, teremos $P(y) \neq y$, para todo $y \in D^n$, pois caso contrário teríamos

$$\mu \leq \|G(y) - y\| < \mu$$

o que é um absurdo. Mas isso contradiz é uma contradição ao lema 3.4, que afirma que toda aplicação suave definida em D^n possui um ponto fixo. \square

Capítulo 6

O grau módulo 2 de uma aplicação

6.1 Homotopias e Isotopias

Seja $X \subset \mathbb{R}^k$ e consideremos o produto cartesiano $X \times [0, 1]$. Diremos que duas aplicações

$$f, g : X \rightarrow Y$$

são suavemente homotópicas, o qual denotaremos por $f \sim g$, se existe uma aplicação suave

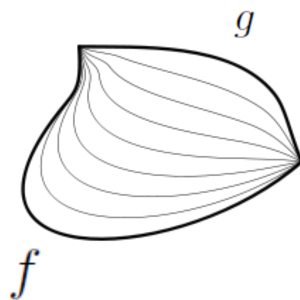
$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x), \forall x \in X$. Tal aplicação F é chamada de homotopia suave entre f e g .

Para obtermos uma interpretação intuitiva do que significa duas aplicações serem homotópicas, observe que dada uma homotopia F , fixada a variável t , obteremos uma aplicação suave,

$$F_t(x) = F(x, t)$$

Deste modo, a família a 1-parâmetro $t \rightarrow F(x, t)$, tem início na aplicação f e termina na aplicação g . Consequentemente, uma homotopia pode ser pensada como um processo de deformação suave da aplicação f na aplicação g .



Vejam os a seguir um exemplo simples,

Exemplo 6.1. Consideremos a aplicação $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x + 1$, respectivamente. Podemos definir a aplicação $F(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$ a qual é claramente, uma homotopia entre as aplicações f e g .

Provemos que a relação

$$f \sim g \text{ é válida se, e somente se, } f \text{ é suavemente homotópica a } g$$

é de equivalência. Demonstraremos apenas as propriedades simétrica e transitiva. A reflexividade é imediata.

Com efeito, se $f \sim g$ então existe uma homotopia suave $F(x, t)$ com $F(x, 0) = f(x)$, e $F(x, 1) = g(x)$. Definindo a aplicação $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, observamos que $G(x, 0) = g(x)$, $G(x, 1) = f(x)$ e como F é suave, G é uma homotopia suave entre g e f e, portanto, $g \sim f$, donde segue a simetria.

Consideremos uma aplicação suave $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0, & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \varphi(t) = 1, & \text{para } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e suponhamos que $f \sim g$ e $g \sim h$. Considere F uma homotopia suave entre f e g . Então $\tilde{F}(x, t) = F(x, \varphi(t))$, define uma homotopia suave, onde

$$\begin{cases} \tilde{F}(x, t) = f(x), & \text{para todo } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \tilde{F}(x, t) = g(x), & \text{para todo } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, considerando G uma homotopia suave entre g e h , podemos definir uma nova homotopia $\tilde{G}(x, t) = G(x, \varphi(t))$, satisfazendo

$$\begin{cases} \tilde{G}(x, t) = g(x), & \text{para todo } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \tilde{G}(x, t) = h(x), & \text{para todo } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Deste modo a aplicação

$$H(x, t) = \begin{cases} \tilde{F}(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{G}(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

define uma homotopia suave entre f e h , donde segue portanto a propriedade transitiva.

Definição 6.1. Diremos que duas aplicações f e g são suavemente isotópicas se existir uma homotopia suave $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de f em g tal que para cada $t \in [0, 1]$ fixado, a aplicação

$$x \mapsto F(x, t)$$

é um difeomorfismo.

Analogamente ao caso anterior, a relação “ f é suavemente isotópica a g ”, a qual denotaremos por, $f \cong g$, é de equivalência.

Proposição 6.1. *Consideremos $f, f' : X \rightarrow Y$ aplicações suaves. Se f é suavemente homotópica a f' , e g é suavemente homotópica a g' , então $g \circ f$ é suavemente homotópica a $g' \circ f'$. Resultado análogo é válido no caso em que as aplicações são suavemente isotópicas.*

Demonstração. Consideremos $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ e $G : Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ homotopias suaves entre as aplicações f e f' , g e g' respectivamente. E defina $H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$ como,

$$H(x, t) = G(F(x, t), t)$$

Observe então que $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = (g \circ f)(x)$, e $H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = (g' \circ f')(x)$. Sendo a aplicação H suave, teremos que $g \circ f$ é suavemente homotópica a $g' \circ f'$.

No caso em que as aplicações são suavemente isotópicas, é suficiente mostrar que para cada t fixado, a aplicação $H(x, t) = H_t(x)$ é um difeomorfismo. Mas observe que, fixado $t \in [0, 1]$

$$H_t(x) = G(F(x, t), t) = G_t(F(x, t)) = G_t(F_t(x)) = G_t \circ F_t(x)$$

e sendo as aplicações G_t e F_t difeomorfismos, o resultado segue. □

Proposição 6.2. *Sejam $f, g : X \rightarrow S^n$ aplicações suaves, tal que $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$. Então as aplicações f e g são suavemente homotópicas.*

Demonstração. Observemos primeiramente que a combinação convexa $tf(x) + (1 - t)g(x) \neq 0$, para todo $x \in X$. De fato, observe que se $t = 0$, $tf(x) + (1 - t)g(x) = g(x) \neq 0$, pois $g(x) \in S^n$. Analogamente, se $t = 1$, $tf(x) + (1 - t)g(x) = f(x) \neq 0$, pois $f(x) \in S^n$. Consideremos $t \in (0, 1)$, e suponhamos que existe um $x_0 \in X$ tal que $tf(x_0) + (1 - t)g(x_0) = 0$. Então

$$\begin{aligned} tf(x_0) + (1 - t)g(x_0) = 0 &\Rightarrow \\ (1 - t)g(x_0) = -tf(x_0) &\Rightarrow \\ \|(1 - t)g(x_0)\| = \|-tf(x_0)\| &\Rightarrow \\ (1 - t) = t, \text{ pois } \|f(x_0)\| = \|g(x_0)\| = 1 &\Rightarrow \\ t = 1/2. & \end{aligned}$$

Deste modo, substituindo teremos $\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}g(x_0) = 0$, e portanto $f(x_0) = -g(x_0)$, o que contradiz a nossa hipótese. Sendo assim, podemos definir a homotopia suave $H : X \times [0, 1] \rightarrow S^n$, dada por

$$H(x, t) = \frac{tf(x) + (1 - t)g(x)}{\|tf(x) + (1 - t)g(x)\|}$$

ficando assim demonstrada a proposição. □

6.2 Grau Módulo 2

Antes de demonstrarmos o nosso resultado principal, são necessários alguns lemas.

Lema 6.1. (*Homotopia*) *Sejam $f, g : M \rightarrow N$, aplicações suavemente homotópicas entre variedades de mesma dimensão, onde M é uma variedade compacta sem fronteira. Se $y \in N$ é valor regular de f e g então*

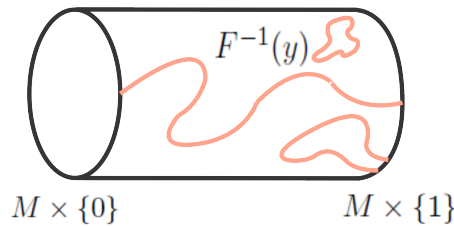
$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}.$$

Demonstração. Consideremos $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ uma homotopia suave entre f e g . Dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1 : y é um valor regular de F

Como M é compacta, pela proposição 3.4, $F^{-1}(y)$ é uma variedade compacta de dimensão 1, cujo bordo é

$$\partial F^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial M = F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}(y) \times \{0\} \cup g^{-1}(y) \times \{1\}.$$



Deste modo, o número total de pontos de fronteira é igual a

$$\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) \tag{6.1}$$

e portanto, pelo resultado que demonstraremos no apêndice, como $F^{-1}(y)$ é uma variedade compacta de dimensão 1, $\partial F^{-1}(y)$ tem um número par de pontos, e logo

$$\#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y) = 2n, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}$$

donde segue que,

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) \pmod{2}.$$

Caso 2: y não é valor regular de F

Como as aplicações que associam a cada valor regular a cardinalidade da imagem inversa são localmente constantes, podemos considerar vizinhanças $V_1 \subset N$ e $V_2 \subset N$, tais que

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$$

para todo $y' \in V_1$ e,

$$\#g^{-1}(y) = \#g^{-1}(y'')$$

para todo $y'' \in V_2$.

Pelo teorema de Sard, podemos tomar $z \in V_1 \cap V_2 \subset N$ um valor regular de F , e por conseguinte, utilizando o caso anterior concluímos que,

$$\#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) \pmod{2}.$$

mas como $z \in V_1 \cap V_2$, teremos que

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(z) \equiv \#g^{-1}(z) = \#g^{-1}(y)$$

e o resultado segue. □

Para a demonstração do próximo lema, utilizaremos o seguinte resultado de equações diferenciais ordinárias

Teorema 6.1. *O fluxo $\Phi : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma aplicação de classe C^1 que satisfaz a equação*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = f(\Phi(t, x)) \tag{6.2}$$

e, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, o fluxo $\Phi_t : E \rightarrow E$ é um difeomorfismo de classe C^1 de E sobre E . Além disso, vale a propriedade de grupo

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s \tag{6.3}$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$.

Tal resultado pode ser encontrado em [4], página 158.

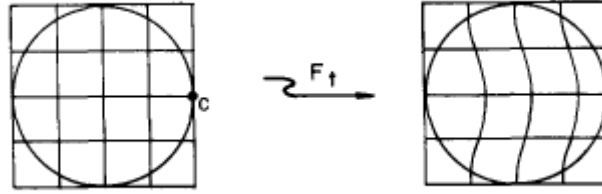
Lema 6.2. *(Homogeneidade) Sejam y e z pontos interiores de uma variedade conexa N . Então existe um difeomorfismo $h : N \rightarrow N$, com $h(y) = z$, que é suavemente isotópico a identidade, dois pontos que possuem tal propriedade serão chamados de isotópicos.*

Demonstração. Construiremos primeiramente uma isotopia suave do \mathbb{R}^n nele próprio, tal que

- i. os pontos no complementar da bola unitária ficam fixos
- ii. Deslizaremos a origem até um determinado ponto fixado da bola unitária aberta.

Consideremos uma aplicação suave $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \varphi(x) &> 0, \text{ se } \|x\| < 1 \\ \varphi(x) &\leq 0, \text{ se } \|x\| \geq 1. \end{aligned}$$



Dado $c \in S^{n-1}$ um vetor unitário fixo, consideremos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x)c \quad (6.4)$$

ou analogamente,

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi(x_1, \dots, x_n)c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.5)$$

Sendo φ uma aplicação suave, pelo teorema (6.1), para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução de (6.4) com condição inicial,

$$x(0) = \bar{x}$$

definida para todo $t \in \mathbb{R}$ a qual denotaremos por $x(t) = F_t(\bar{x})$. O teorema (6.1) nos garante também que

- $F_t(\bar{x})$ é definida para todo t , e depende diferenciavelmente de t e \bar{x} ;
- $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$, ou seja, $F_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$;
- $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

Mais ainda, para cada t fixado a aplicação F_t é um difeomorfismo. Fixando um t de forma arbitrária e definindo a aplicação $G(x, s) = F_{st}(x)$, teremos

$$G(x, 0) = Id_{\mathbb{R}^n} \quad \text{e} \quad G(x, 1) = F_t(x)$$

o que mostra que cada difeomorfismo F_t é suavemente isotópico a identidade, e ainda, sendo o campo nulo no complementar da bola, o difeomorfismo F_t fixa os pontos pertencentes ao complementar da bola. Pela definição da aplicação φ , escolhendo cada ponto t e c adequadamente, o difeomorfismo F_t desloca a origem a qualquer ponto desejado da bola aberta unitária.

Consideremos agora $y \in N$.

Afirmção 6.1. *Existe uma vizinhança V de y na qual para todo $y' \in V$ é possível construir um difeomorfismo suavemente isotópico a identidade, de modo que $g(y) = y'$.*

Como $y \in N$ existe uma vizinhança U de y difeomorfa ao \mathbb{R}^n , isto é, existe

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $h(y) = 0$. Consideremos a restrição $h|_V$ com $V = h^{-1}(B(0,1))$. Observe que se $w \in V$, então $h(w) \in B(0,1)$, e conseqüentemente existe um difeomorfismo F_t que carrega a origem em tal ponto, isto é, $F_t(0) = h(w)$.

Conseqüentemente como $h(y) = 0$, teremos

$$\begin{aligned} F_t(h(y)) &= h(w) \Rightarrow \\ (h^{-1} \circ F_t \circ h)(y) &= w \end{aligned}$$

e sendo $F_t \cong id$, $h \cong h$ e $h^{-1} \cong h^{-1}$, pela proposição 6.1, segue que

$$h^{-1} \circ F_t \circ h \cong h^{-1} \circ h = Id$$

e portanto, a aplicação $g = h^{-1} \circ F_t \circ h : V \rightarrow V$ é suavemente isotópica a identidade, e assim encontramos uma vizinhança V de y tal que para todo $w \in V$, existe um difeomorfismo g suavemente isotópico a identidade de modo que $g(y) = w$, ficando demonstrada a afirmação.

Diremos que dois pontos $y, w \in N$ estão relacionados se existe um g difeomorfismo, definido em um subconjunto da variedade N , suavemente isotópico a identidade de modo que $g(y) = w$. Onde é fácil verificar que tal relação é de equivalência.

Pela afirmação 6.1, segue que cada classe de equivalência é um subconjunto aberto. Como as classes de equivalência formam uma partição do conjunto em abertos disjuntos e N é conexo, pode existir apenas uma classe de equivalência, ficando demonstrado o resultado. □

Os resultados acima tornam possível a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 6.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave, com M variedade compacta sem fronteira e N conexa. Se y e z são valores regulares de f então*

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}$$

A classe de resíduo é denominada grau módulo 2 da aplicação, denotada por $deg_2(f)$, e depende apenas da classe de homotopia de f .

Demonstração. Dados y e z valores regulares de f , pelo lema 6.2, existe um difeomorfismo $h : N \rightarrow N$ suavemente isotópico a identidade, tal que $h(y) = z$. Como h é um difeomorfismo, z é valor regular de $h \circ f$ e conseqüentemente, como pela proposição 5.4, $h \circ f$ é isotópica a $Id \circ f$, do lema de homotopia concluímos que

$$\#(h \circ f)^{-1}(z) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2} \tag{6.6}$$

porém,

$$(h \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ h^{-1})(z) = f^{-1}(y) \tag{6.7}$$

substituindo (6.7) em (6.6), teremos

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}$$

Ficando provado assim, a primeira parte da demonstração. Consideremos agora f e g aplicações suavemente homotópicas. Do teorema de Sard podemos tomar $y \in N$ valor regular de f e g . Sendo assim, pelo lema de Homotopia teremos que

$$\deg_2 f = \#f^{-1}(y) \equiv \#g^{-1}(y) = \deg_2 g$$

provando assim que o grau é invariante por homotopias. □

Vejam os a seguir algumas aplicações:

Exemplo 6.2. *Uma aplicação $c : M \rightarrow M$ constante tem grau módulo 2 par. Para isto, basta observar que para todo valor regular y , $\#f^{-1}(y) = 0$.*

Exemplo 6.3. *A aplicação identidade tem grau módulo 2 ímpar, pois para todo valor regular y , $\#f^{-1}(y) = 1$. Deste modo, a aplicação identidade não é homotópica a uma função constante, pois pelo teorema anterior, o grau é invariante por homotopia.*

Observe pelos exemplos acima que o grau módulo 2 de uma aplicação serve como uma ferramenta para analisar se duas aplicações não são suavemente homotópicas. No caso em que duas aplicações possuem o mesmo grau porém, não é possível concluir se as aplicações são homotópicas. Vejamos uma outra forma de provar que não existe “retração suave” da bola unitária na esfera unitária.

Exemplo 6.4. *Não existe aplicação $f : D^{n+1} \rightarrow S^n$, que deixa a esfera pontualmente fixa, isto é $f|_{S^n} = Id_{S^n}$.*

Caso tal aplicação f existisse poderíamos considerar a homotopia

$$\begin{aligned} F : S^n \times [0, 1] &\rightarrow S^n \\ F(x, t) &= f(tx) \end{aligned}$$

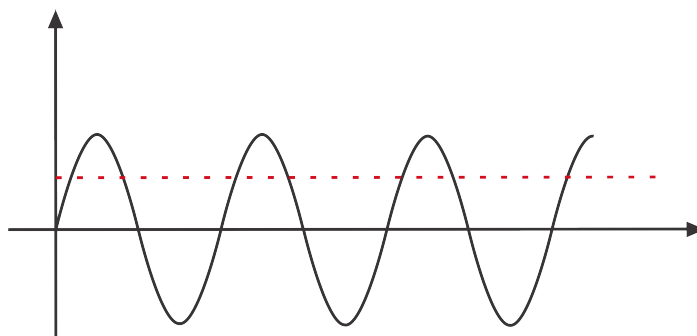
entre as aplicações $F(x, 0) = f(0) = \text{constante}$ e $F(x, 1) = f(x) = x = Id(x)$, pois $x \in S^n$. O que é um absurdo pelos exemplos anteriores.

Capítulo 7

O Grau de Brouwer

7.1 Introdução

Consideremos aplicação suave $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dada por $f(x) = \sin x$, cujo gráfico está exibido na figura abaixo



Tomando $c = \frac{1}{2}$ valor regular para a aplicação, na imagem inversa do ponto c teremos exatamente 7 valores. Nos pontos em que a aplicação for crescente, a derivada da aplicação será estritamente maior que 0, e diremos que o sinal da derivada é 1, nos pontos em que a derivada função for decrescente, teremos que a derivada é negativa e portanto, o sinal será -1. Observe assim, que ao somarmos o sinal de todos os pontos teremos que

$$\sum_{i=1}^7 \text{sign}df_{a_i} = 1$$

e portanto, como este somatório é não nulo, deve existir assim, pelo menos um ponto na imagem inversa, de modo que $\text{sign}df_a$ seja 1 ou -1 . Consequentemente, quando este somatório é não nulo, deverá existir um ponto no nível c . No caso geral, tal somatório será chamado grau da aplicação. E ao garantirmos que o grau é não nulo, como vimos acima, garantimos que a imagem inversa do ponto é não vazia. Ou seja, o grau pode ser utilizado como uma ferramenta para encontrar raízes de uma determinada equação.

Além desta aplicação, veremos que esta ferramenta é de fundamental importância para verificarmos quando duas aplicações são ou não homotópicas.

7.2 O Grau de Brouwer

Consideremos M e N variedades orientáveis de mesma dimensão, sem fronteira e seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Se a variedade M é compacta e N for conexa, definiremos o grau da aplicação f como segue.

Seja $x \in M$ um ponto regular de f . Sendo df_x um isomorfismo linear entre espaços vetoriais orientados, definiremos como o sinal da aplicação df_x , o qual denotaremos por $signdf_x$, por 1 se df_x preserva orientação e -1 caso contrário.

Para um valor regular $y \in N$, definamos o grau da aplicação f para um valor regular $y \in N$ como sendo

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} signdf_x$$

Sendo M uma variedade compacta, provamos que ao tomarmos um valor regular $y \in N$, a imagem inversa do ponto y possui uma quantidade finita de pontos, mostrando que o grau de f em um valor regular está bem definido. Mais ainda como $\#f^{-1}(y)$ é localmente constante e as variedades M e N são orientáveis, a aplicação que associa a cada $y \in N$ valor regular o grau da aplicação em y é localmente constante.

Provaremos a seguir que tal definição não depende da escolha do valor regular y e, conseqüentemente, generalizaremos tal definição. Mais ainda, provaremos que quaisquer duas aplicação homotópicas possuem o mesmo grau. Para isto, necessitamos demonstrar alguns resultados preliminares.

Suponhamos, então, que M seja a fronteira de uma certa variedade compacta orientável X , onde M será dotada com a orientação induzida pela variedade X .

Lema 7.1. *Se uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ é estendida por uma aplicação suave $F : X \rightarrow N$, então $\deg(f; y) = 0$, para todo y valor regular de f .*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que y seja um valor regular para F e para $F|_M = f$. Deste modo, do lema 3.4, $F^{-1}(y)$ é uma variedade compacta de dimensão 1. Do apêndice segue que $F^{-1}(y)$ é uma união finita de arcos e círculos com pontos de fronteira em $\partial X = M$. Tomando $A_i \subset F^{-1}(y)$ um destes arcos, podemos denotar $\partial A_i = \{a_i\} \cup \{b_i\}$. E sendo assim

$$\deg(f; y) = \sum_i signdf_{a_i} + signdf_{b_i}$$

sendo suficiente demonstrar que

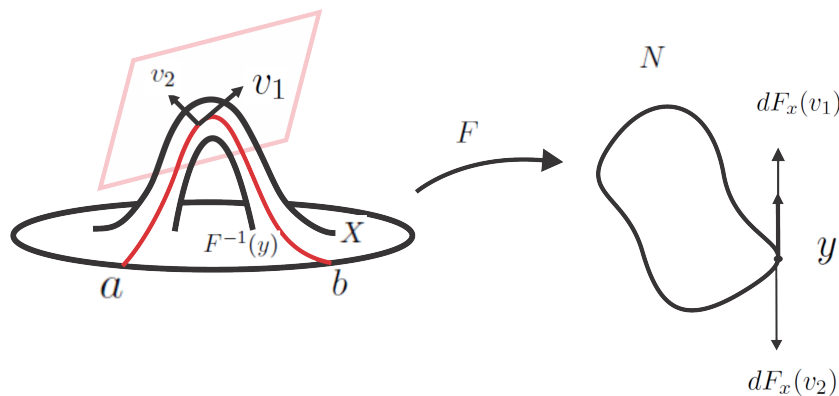
$$signdf_{a_i} + signdf_{b_i} = 0$$

para cada arco A_i .

Abrindo um pequeno parênteses em nossa discussão, vejamos como induzir uma orientação em cada um dos arcos da imagem inversa.

Como $T_x A$ é um subespaço de $T_x X$ com dimensão 1, poderíamos dizer que um determinado vetor v_1 determina a orientação positiva de $T_x A$ se, for possível completar uma base para o espaço $T_x X$, de modo que tal base seja positiva. Observe porém que se $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ é uma base positiva, então trocando o sinal dos dois primeiros vetores obteríamos a base $\{-v_1, -v_2, \dots, v_{n+1}\}$ positiva de $T_x X$. E assim, tanto v_1 como $-v_1$ poderiam determinariam uma orientação positiva para $T_x A$, nos mostrando assim que tal definição é inconclusiva.

Com o objetivo de orientar o espaço $T_x A$ de maneira suave, para cada $x \in A$, utilizaremos a aplicação F e a orientação da variedade N . Seja $x \in A$, e consideremos (v_1, \dots, v_{n+1}) uma base positivamente orientada do espaço tangente $T_x X$ com v_1 tangente a A . Então v_1 determina a orientação requerida de A , se e somente se, dF_x carrega (v_2, \dots, v_{n+1}) em uma base positivamente orientada de $T_y N$.



Sendo, por definição, a orientação construída de maneira suave, considere o seguinte campo de vetores suave, que associa

$$x \rightarrow v_1(x)$$

o vetor tangente com a dada orientação no ponto. Sendo tal arco difeomorfo ao intervalo $[0, 1]$ que por sua vez é conexo, tal difeomorfismo entre o intervalo e o arco deverá necessariamente preservar ou reverter orientação, portanto em cada ponto de fronteira da variedade, o arco deve estar com a mesma orientação do seu ponto correspondente, ou com a orientação contrária.

Pelo que vimos no exemplo 4.2, ao induzirmos a orientação no intervalo $[0, 1]$ um de seus pontos de fronteira é orientado positivamente, e portanto a orientação é determinada pelo vetor exterior, e o outro extremo deverá estar orientado negativamente, sendo então a orientação determinada pelo seu vetor interior. Consequentemente, no arco A , como o difeomorfismo preserva ou reverte orientação em todos os pontos,

$$\text{sign}df_a = -\text{sign}df_b$$

provando assim o resultado no caso em y também é valor regular para a extensão F .

De forma mais geral, suponhamos que y seja um valor regular para f , e não para F . Então, consideremos uma vizinhança U tal que a aplicação $\deg(f; y)$ seja localmente constante. Do teorema de Sard, escolhendo um valor regular y_0 em comum para f e F , do caso anterior segue que

$$\deg(f, y) = \deg(f; y_0) = 0$$

e o resultado segue. □

Lema 7.2. *Seja $h : N \rightarrow N$ uma aplicação suave definida em uma variedade N . Se h for suavemente isotópica a identidade então h preserva orientação.*

Consideremos $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ uma homotopia entre as aplicações suaves $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$.

Lema 7.3. *O grau das aplicações f e g , coincidem para qualquer valor regular em comum.*

Demonstração. Sabemos de 4.2 que a variedade $M \times [0, 1]$ pode ser orientada com a orientação produto, e deste modo sua fronteira consiste da união dos conjuntos $M \times \{0\}$, $M \times \{1\}$ dotados com a orientação oposta e correta, respectivamente. Então o grau de $F|_{\partial(M \times [0, 1])}$ no valor regular y , será igual a diferença

$$\deg(g; y) - \deg(f; y)$$

que, pelo lema anterior, deve ser igual a zero, como queríamos demonstrar. □

Teorema 7.1. *O inteiro $\deg(f; y)$ não depende da escolha do valor regular y .*

Demonstração. Do lema 6.2, sabemos que se y e z são valores regulares para a aplicação suave $f : M \rightarrow N$, existe um difeomorfismo suavemente isotópico a identidade, $h : N \rightarrow N$ onde $h(y) = z$. Como $h : N \rightarrow N$ é suavemente isotópica a identidade então, h preserva orientação e, conseqüentemente,

$$\deg(h \circ f; h(y)) = \sum_{x \in (h \circ f)^{-1}(h(y))} \text{sign}d(h \circ f)_x \tag{7.1}$$

Mas $(h \circ f)^{-1}(h(y)) = f^{-1}(h^{-1}(h(y))) = f^{-1}(y)$, portanto substituindo em 7.1, e aplicando a regra da cadeia

$$\deg(h \circ f; h(y)) = \sum_{x \in (h \circ f)^{-1}(h(y))} \text{sign}d(h \circ f)_x = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(dh_{f(x)} \circ df_x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}df_x = \deg(f; y) \tag{7.2}$$

pois $dh_{f(x)}$ preserva a orientação para todo $f(x)$. Mas, como f é homotópica a $h \circ f$, pelo lema 7.3,

$$\deg(f; z) = \deg(h \circ f; z) \tag{7.3}$$

E portanto, de (7.1) e (7.3), como $h(y) = z$

$$\deg(f; y) = \deg(h \circ f; z) = \deg(f; z)$$

o resultado segue. □

Tal inteiro é chamado de grau da aplicação f , o qual denotaremos por $\deg f$. Segue então do lema 7.3 que

Teorema 7.2. *Se as aplicações f e g são homotópicas, então $\deg f = \deg g$.*

Proposição 7.1. *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações suaves, definida entre variedades orientáveis, com M compacta, N compacta e conexa e P conexa. Então*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

Demonstração. Pelo teorema de Sard, considere $z \in P$ valor regular em comum para g e $g \circ f$, logo

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \text{sign}(g \circ f)_x \\ &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \text{sign}(dg_{f(x)} \circ df_x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(z))} \text{sign} dg_{f(x)} \cdot \text{sign} df_x \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(g^{-1}(z))} \text{sign} dg_{f(x)} \cdot \sum_{f(x) \in f^{-1}(g^{-1}(z))} \text{sign} df_x \\ &= \deg g \cdot \deg f \end{aligned} \tag{7.4}$$

□

Capítulo 8

Característica de Euler-Poincaré

8.1 Introdução

O matemático suíço Euler, foi o primeiro a chamar atenção para este número, definindo-o para poliedros. Euler acreditou ter provado que para todo poliedro, tal número era constante e igual a 2, provavelmente considerando apenas poliedros homeomorfos à esfera. Apenas após um longo período depois de sua descoberta foi compreendido o verdadeiro significado deste número. Após inúmeras de pistas falsas, coube finalmente ao matemático francês Poincaré desvendar este número que se revelou um traço de união entre ramos distintos da matemática.

8.2 Poliedros

Um simplexo s de dimensão n no espaço euclidiano \mathbb{R}^m é um conjunto das combinações convexas de $n+1$ vetores, a_0, \dots, a_n , onde $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ são vetores linearmente independentes, isto é

$$s := \left\{ x = \sum_{i=0}^n t_i a_i : t_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

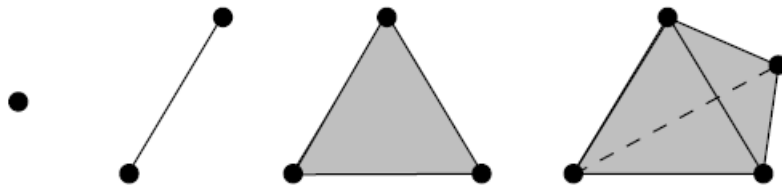
Tal conjunto será denotado por $s = [a_0, \dots, a_n]$.

Consequentemente, um simplexo de dimensão 0 será um ponto, um simplexo de dimensão 1 será um segmento de reta, um simplexo de dimensão 2 será um triângulo, e finalmente, um simplexo de dimensão 3 será um tetraedro.

Uma face de um simplexo $s = [a_0, \dots, a_n]$ é qualquer simplexo que $t = [a_{i_0}, \dots, a_{i_n}]$, que tenha por vértices alguns dos vértices de s .

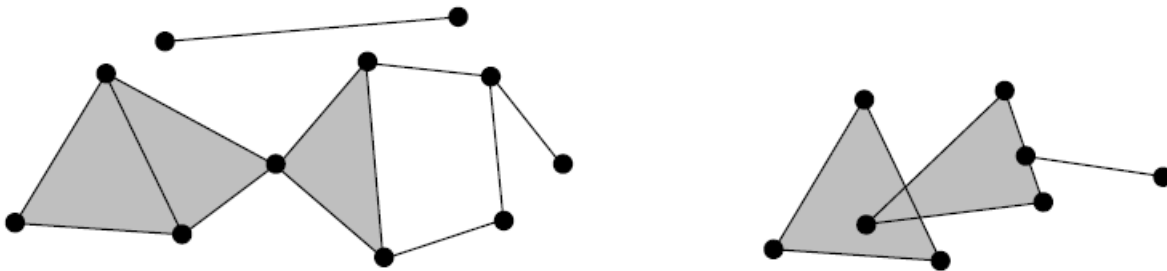
Definição 8.1. *Um poliedro P no espaço \mathbb{R}^m é uma coleção finita de simplexos em \mathbb{R}^m tais que :*

1. *Se s é um simplexo de P então toda face de s também o é;*



2. Se s, s' , são simplexes de P então a interseção $s' \cap s''$ é uma face comum a s' e s'' , ou é vazia.

Denotaremos por $|P|$ a união dos simplexes de P . Observe que $|P|$ é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^m . A dimensão de P será a dimensão do maior simplexo nele contido. Na próxima figura constam exemplos de uma união de simplexes que formam e não formam um poliedro, respectivamente.



Definição 8.2. (*Característica de Euler-Poincaré*) Seja α_i o número de simplexes de dimensão i em um poliedro de dimensão n P . O número,

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

é chamado *característica de Euler-Poincaré*.

Exemplo 8.1. Seja S um simplexo de dimensão n e considere P o conjunto das faces do simplexo. Teríamos assim

$$\alpha_i = \binom{n+1}{i+1}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n$$

e conseqüentemente, do desenvolvimento pelo binômio de Newton da expressão $(1 + (-1))^{n+1}$, concluímos que

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = 1.$$

Deste modo, se Q for formado apenas pelas faces de dimensão menor ou igual a n se um simplexo de dimensão $n + 1$, a característica de Euler será

$$\chi(P) = 1 + (-1)^n$$

No caso em que o simplexo tem dimensão 3, a característica de Euler coincidirá com

$$\chi(P) = V - A + F$$

onde V denota o número de vértices, A denota o número de arestas e F denota o número de faces, que são na verdade os simplexos de dimensão 0, 1 e 2, respectivamente, coincidindo assim com a definição usual, para o que entendíamos como poliedros, da característica de Euler-Poincaré.

8.3 Teorema de Euler-Poincaré

Um importante resultado relacionado a característica de Euler-Poincaré de um poliedro é que tal número equivale a soma alternada dos números de Betti. Com o objetivo de definir esses números, precisaremos introduzir algumas definições.

Para cada $i = 0, \dots, n$, uma cadeia de dimensão i no poliedro P é um conjunto $\sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$, cujos elementos são simplexos de dimensão i pertencentes ao poliedro. Denotaremos a cadeia vazia por 0.

Considere $C_i = C_i(P)$, o conjunto das cadeias de dimensão i do poliedro P . Induziremos a seguir uma estrutura de espaço vetorial sobre este conjunto da seguinte maneira: Dadas duas cadeias $c', c'' \in C_i$, definiremos a soma

$$c' + c'' = (c' \cup c'') \setminus (c' \cap c'')$$

Com esta operação o conjunto das cadeias de dimensão i formará um grupo abeliano, cujo elemento neutro é a cadeia vazia e cujo inverso de cada elemento é ele próprio. E conseqüentemente, C_i é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{Z}_2 . Observe ainda que os simplexos com dimensão i do poliedro formam uma base para o espaço C_i e portanto, a dimensão do espaço vetorial C_i sobre o corpo \mathbb{Z}_2 será α_i .

Fixado $i \in \{0, \dots, n\}$, definiremos o homomorfismo bordo como a transformação linear

$$\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$$

dada por, $\partial_i s =$ conjunto das faces de dimensão $i - 1$ de s , onde por conveniência denotamos $C_{-1} = 0$. Verifica-se que

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0 \tag{8.1}$$

uma vez que cada face com dimensão $i - 2$ do simplexo s está contida em exatamente duas faces de dimensão $i - 1$. Seja $\mathcal{Z}_i \subset C_i$ o núcleo de ∂_i e $\mathcal{B}_i \subset C_i$ a imagem de ∂_{i+1} , e denote por $z_i = \dim \mathcal{Z}_i$ e $b_i = \dim \mathcal{B}_i$. Pela equação (8.1), temos $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{Z}_i$, e usando o teorema do núcleo e da imagem $\alpha_i = z_i + b_{i-1}$.

O espaço vetorial quociente

$$\mathcal{H}_i(P) = \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{B}_i}$$

chama-se o i -ésimo grupo de homologia do poliedro com coeficientes em \mathbb{Z}_2 , e sua dimensão $\beta_i = z_i - b_i$ é chamada o i -ésimo número de Betti do poliedro P .

Deste modo, sendo $b_n = b_{-1} = 0$, teremos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i (z_i + b_{i-1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (z_i - b_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

mostrando assim que a soma alternada dos números de Betti, coincide com a característica de Euler do poliedro P , como queríamos provar. O interesse em relacionar a característica de Euler com os números de Betti, provém do fato de que se os poliedros P e Q são tais que $|P|$ e $|Q|$ são homeomorfos seus números de Betti são iguais, mostrando assim que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico. A prova da invariância dos números de Betti pode ser encontrada em [1].

Definição 8.3. *Uma triangulação de um espaço topológico X é um homeomorfismo $h : |P| \rightarrow X$, onde P é um poliedro. Neste caso, dizemos que o espaço topológico X é triangulável. Observe que podemos definir a característica de Euler deste espaço como a característica do poliedro P , uma vez que dadas duas triangulações $h : |P| \rightarrow X$ e $g : |Q| \rightarrow X$, a aplicação $g^{-1} \circ h : |P| \rightarrow |Q|$ será um homeomorfismo, e conseqüentemente a característica de Euler dos poliedros deve ser a mesma.*

Em 1940, um teorema devido a Whitehead, nos mostra que toda variedade compacta admite uma triangulação, fato fundamental para a demonstração do teorema de Poincaré-Hopf.

Capítulo 9

Teorema de Poincaré-Hopf

9.1 Introdução

A teoria que desenvolveremos neste capítulo tem como principal objetivo auxiliar na demonstração de um dos resultados mais importantes que apresentaremos. Uma vez que a característica de Euler-Poincaré em uma variedade fechada, é um conceito puramente topológico, o conceito de índice de um campo vetorial é algo puramente analítico. O teorema de Poincaré-Hopf afirma que a soma dos índices de um campo de vetores com singularidades isoladas é igual a característica de Euler-Poincaré da variedade, ou seja, tal resultado estabelece uma relação profunda entre dois ramos aparentemente não relacionados da matemática. Uma demonstração para o caso de dimensão 2 foi dada por Poincaré em 1885, e em 1926 foi dada pelo matemático Hopf, inspirado por resultados de Brouwer e Hadamard. Tal resultado é usualmente lembrado por suas aplicações famosas, as quais detalharemos no decorrer deste capítulo.

9.2 Campos de Vetores

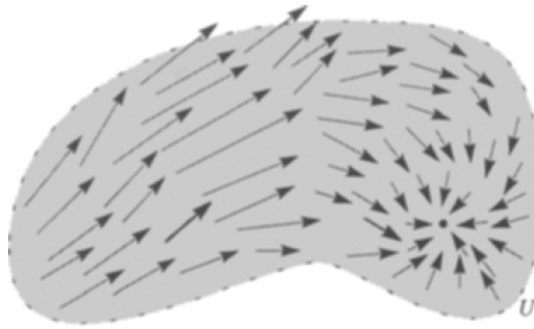
Definição 9.1. (*Campo de Vetores*) Um campo de vetores tangentes a variedade $M \subset \mathbb{R}^k$, é uma aplicação suave que associa a cada $x \in M$ um vetor $v(x) \in T_x M$.

Um ponto $z \in M$ é uma singularidade do campo se $v(z) = 0$.

Como uma aplicação do conceito de grau de uma aplicação suave entre variedades, estudaremos campos de vetores sobre variedades. Seja v um campo definido em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$

$$v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

onde $z \in U$ é uma singularidade isolada do campo. Tomando um disco D_ϵ ao redor de z , de modo



que z seja a única singularidade de v em D_ϵ , podemos definir a aplicação \bar{v} , dada por

$$\bar{v} = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

de uma esfera S_ϵ centrada em z , com raio ϵ , sobre a esfera unitária S^{m-1} . Observe que a aplicação \bar{v} , mede a variação da direção do campo ao redor daquela singularidade.

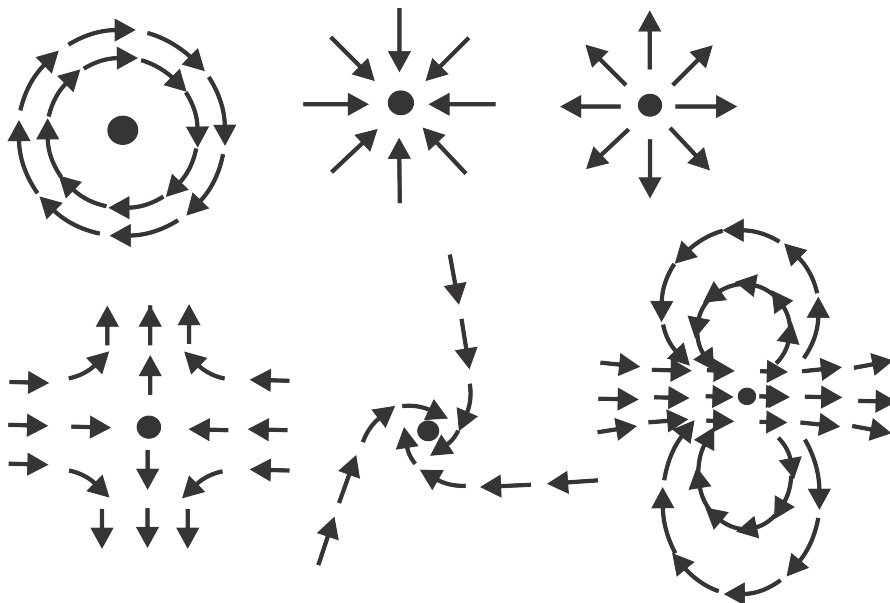
O grau da aplicação \bar{v} é chamado *índice* de v na singularidade z , e será denotado por $i(v, p)$. A definição de índice independe da escolha do raio, pois ao escolhermos um outro raio ϵ_1 , a aplicação \bar{v} se estende ao anel A delimitado pelas esferas, onde as esferas estão dotadas com orientações opostas. Pelo lema 7.1,

$$\deg v |_{\partial A} = 0$$

donde segue que

$$\deg v |_{S_{\epsilon_1}} = \deg v |_{S_\epsilon} .$$

mostrando que o conceito de índice está bem definido.



Com o objetivo de generalizar a definição de índice para campos de vetores definidos em variedades arbitrárias, provaremos que tal conceito é invariante por difeomorfismos, e para isto introduziremos a noção de campos correspondentes.

Definição 9.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades, e sejam v e v' campos de vetores tangentes associados a M e N , respectivamente. Diremos que os campos v e v' são correspondentes por f , se*

$$df_x(v(x)) = v'(f(x)), \forall x \in M.$$

Observe que se a aplicação f for um difeomorfismo, o campo v' é unicamente determinado e é dado pela expressão

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

Lema 9.1. *Seja f uma aplicação suave definida em uma vizinhança convexa da origem V sobre o \mathbb{R}^n , com $f(0) = 0$. Então*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

com g_i aplicação suave definida em V , com $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Demonstração. Podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt \right) x_i. \end{aligned} \tag{9.1}$$

e assim, é suficiente tomar $g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$. □

Lema 9.2. *Todo difeomorfismo f de \mathbb{R}^m que preserva orientação é suavemente isotópico à identidade.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $f(0) = 0$. Deste modo a diferencial da aplicação no ponto 0 será dada por

$$df_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t}$$

desta forma é natural definirmos a isotopia $F : \mathbb{R}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{f(tx)}{t}, & \text{para todo } 0 < t \leq 1; \\ df_0(x), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Para mostrar que a aplicação é suave fazendo $t \rightarrow 0$, pelo lema 9.1 a aplicação f pode ser escrita da forma

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_m g_m(x)$$

com g_1, \dots, g_m são aplicações suaves. Conseqüentemente, para todo t , a aplicação $F(x, t)$ é escrita na forma

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \dots + x_m g_m(tx)$$

mostrando assim que F é suave e portanto uma isotopia suave entre f e df_0 . Restando-nos assim provar que df_0 é suavemente isotópica a identidade. Como df_0 preserva orientação, a matriz A que representa tal isomorfismo estará na mesma componente conexa da matriz identidade I em $GL_n(\mathbb{R})$. Conseqüentemente é possível construir um caminho suave $h : [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ onde $h(0) = I$ e $h(1) = A$. Donde segue que a aplicação $G : \mathbb{R}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$G(x, t) = h(t)x$$

é uma isotopia suave entre df_0 e a aplicação identidade, ficando assim demonstrado o resultado. \square

De maneira análoga, mostramos que todo difeomorfismo que reverte orientação é suavemente isotópico a reflexão.

Lema 9.3. *Suponhamos que o campo de vetores v em U corresponde a*

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

definido em U' através do difeomorfismo $f : U \rightarrow U'$. Então o índice de v em uma singularidade isolada z é igual ao índice de v' em $f(z)$.

Seja w um campo de vetores definido sobre uma variedade suave $M \subset \mathbb{R}^k$, assumindo o resultado acima podemos generalizar o conceito de índice do campo em uma singularidade como segue: Sejam $z \in M$ uma singularidade do campo w e $g : U \rightarrow M$ uma parametrização de uma vizinhança de z . O índice de w em z é definido como o índice do campo correspondente $dg^{-1} \circ w \circ g$ em $g^{-1}(z)$, isto é

$$i(w, z) = i(dg^{-1} \circ w \circ g, g^{-1}(z))$$

que independe da escolha da parametrização g , pelo lema 9.3.

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $z = f(z) = 0$ e que U é um subconjunto convexo. Supondo que a aplicação f preserva orientação, ao trabalharmos agora em um subconjunto U do espaço \mathbb{R}^m , podemos construir uma família de mergulhos

$$f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

com $f_0 = \text{identidade}$, e $f_1 = f$, onde $f_t(0) = 0$ para todo t . Denotemos por v_t o campo de vetores $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$, em $f_t(U)$, correspondente a v sobre U . Deste modo, como cada aplicação f_t é um mergulho, todos estes campos de vetores serão não nulos, para alguma esfera centrada no ponto 0. E ainda, como f_t preserva orientação então o índice de v em 0 é igual ao índice de v' em 0, demonstrando assim o lema para o caso de aplicações que preservam orientação. Para o caso de difeomorfismos que revertem orientação, como todo difeomorfismo que reverte orientação é suavemente isotópico a reflexão, é suficiente considerarmos o caso em que tal difeomorfismo é a reflexão ρ . Então neste caso,

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$$

e, conseqüentemente, a aplicação associada $\bar{v}' = \frac{v'(x)}{\|v'(x)\|}$ definida em uma bola com raio ϵ , satisfaz

$$\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}$$

e portanto, como para a composição de duas aplicações f e g , vale

$$\deg(g \circ f) = \deg f \deg g$$

o grau da aplicação \bar{v}' é igual ao grau da aplicação \bar{v} , provando assim o resultado. \square

9.3 Teorema de Poincaré-Hopf

O objetivo central deste capítulo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 9.1. (*Poincaré-Hopf*) *Seja v um campo de vetores em M , onde M é uma variedade sem fronteira e compacta, com apenas singularidades isoladas. Então a soma dos índices de um campo de vetores é igual a característica de Euler da variedade.*

Isto é, a soma dos índices do campo de vetores é um invariante topológico. E portanto, todo campo de vetores definido em uma variedade, está sujeito as propriedades topológicas da variedade.

Consideremos primeiramente o caso particular em que $X \subset \mathbb{R}^m$ é uma variedade de dimensão m com fronteira.

Definição 9.3. (*Aplicação de Gauss*) *Definimos a aplicação de Gauss*

$$g : \partial X \rightarrow S^{m-1}$$

como a aplicação que associa a cada $x \in \partial X$ o vetor unitário exterior normal em x .

Lema 9.4. (*Hopf*) *Seja $v : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores suaves com uma quantidade finita de singularidades isoladas, e suponhamos que v aponta para fora ao longo da fronteira. Então a soma*

dos índices do campo nas singularidades, é igual ao grau da aplicação de Gauss de ∂X em S^{m-1} . Em particular, o soma dos índices não depende da escolha do campo.

Demonstração. Denotemos por z_1, \dots, z_n as singularidades do campo de vetores v . Como as singularidades do campo são isoladas, removendo para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ uma bola de centrada em z_i com raio ϵ , obteremos uma nova variedade com fronteira, a qual denotaremos por Y , onde a fronteira de cada esfera será orientada com a orientação oposta a orientação fronteira da variedade X . Como o campo restrito a esta nova variedade não possui singularidades, podemos definir a aplicação $\bar{v} : Y \rightarrow S^{m-1}$ dada por

$$\bar{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

Deste modo, o grau da aplicação $\bar{v} |_{\partial Y}$ será dado por

$$\deg(\bar{v} |_{\partial Y}) = \deg(\bar{v} |_{\partial X}) - \sum_{i=1}^n \deg(\bar{v} |_{S(z_i, \epsilon)}) \quad (9.2)$$

pois a orientação na fronteira das bolas é contrária. Mas, sendo a aplicação $\bar{v} |_{\partial Y}$ uma restrição de uma aplicação suave a sua fronteira, pelo lema 7.1, teremos que

$$\deg(\bar{v} |_{\partial Y}) = 0.$$

Como os campos $v |_{\partial X}$ e g apontam para fora, teremos que $g(x) \neq -v |_{\partial X}(x)$ para todo $x \in \partial X$ seguindo assim da proposição 6.2 que as aplicações $v |_{\partial X}$ e g são suavemente homotópicas, e portanto $\deg g = \deg v |_{\partial X}$. Pela definição de índice $i(v, z_i) = \deg(\bar{v} |_{S(z_i, \epsilon)})$, e portanto substituindo em 9.2, teremos

$$\deg(g) - \sum_{i=1}^n i(v, z_i) = 0 \quad (9.3)$$

Sendo assim, a soma dos índices não dependerá da escolha do campo de vetores, ficando assim demonstrado o resultado. \square

Com o objetivo de estender o resultado acima para variedades mais gerais, tentaremos expressar o índice de um campo em uma singularidade em termos de suas derivadas nesse ponto. Consideremos primeiramente um campo de vetores $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, de modo que $dv_z : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ esteja definida.

Definição 9.4. O campo de vetores v é não degenerado em z , se dv_z é um isomorfismo.

Lema 9.5. O índice de v em uma singularidade não degenerada z será $+1$ ou -1 , de acordo com o sinal do determinante da aplicação dv_z .

Demonstração. Como dv_z é um isomorfismo, pelo teorema da aplicação inversa, o campo $v |_{U_0} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo de alguma vizinhança convexa U_0 de z . Sem perda de generalidade,

podemos supor que $z = 0$. Se v preserva orientação, vimos nos lemas 9.2 e 9.3, $v|_{U_0}$ pode ser deformada de maneira suave na aplicação identidade sem introduzirmos novas singularidades. E portanto, o índice de v em z deve ser $+1$. Se v reverte orientação, v pode ser deformada em uma reflexão, e conseqüentemente $i(v, p) = -1$. \square

De modo mais geral, consideremos uma singularidade z de um campo de vetores w definido sobre uma variedade suave $M \subset \mathbb{R}^k$ de dimensão n , considerando w como uma aplicação $w : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, tal que a diferencial, $dw_z : T_z M \rightarrow \mathbb{R}^k$ esteja definida.

Lema 9.6. *A diferencial dw_z carrega o espaço tangente $T_z M$ em um subespaço de $T_z M \subset \mathbb{R}^k$, e então pode ser considerada como uma transformação linear de $T_z M$ nele mesmo. Se a transformação linear tem determinante $D \neq 0$ então z é uma singularidade isolada de w com índice igual a $+1$ e -1 de acordo com o sinal do determinante D .*

Demonstração. Seja $h : U \rightarrow M$ uma parametrização de alguma vizinhança de z , e seja

$$t^i = dh_u(e^i) = \frac{\partial h}{\partial u_i}$$

base do espaço tangente $T_{h(u)}M$. Observe então que,

$$dw_{h(u)}(t^i) = dw_{h(u)} \circ dh_u(e^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i} \quad (9.4)$$

Sendo h um difeomorfismo podemos tomar o campo $v = \sum_{j=1}^n v_j e^j$ em U , correspondente a w em M , dado por

$$v = dh^{-1} \circ w \circ h$$

e portanto,

$$w(h(u)) = dh_u(v(u)) = dh_u\left(\sum_{j=1}^n v_j(u)e^j\right) = \sum_{j=1}^n v_j(u)dh_u(e^j) \quad (9.5)$$

Derivando $w(h(u))$ na direção de u_i , pelas equações (9.4) e (9.5), teremos

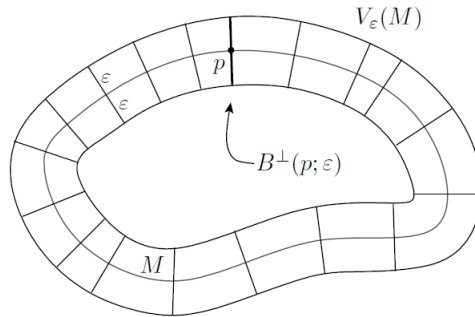
$$dw_{h(u)}(t^i) = \sum_j \left(\frac{\partial v_j(u)}{\partial u_i}\right) t^j + \sum_j v_j \left(\frac{\partial t^j}{\partial u_i}\right)$$

e assim, avaliando na singularidade $h^{-1}(z)$ de v , obteremos assim

$$dw_z(t^i) = dw_{h(h^{-1}(z))}(t^i) = \sum_j \left(\frac{\partial v_j(h^{-1}(z))}{\partial u_i}\right) t^j$$

donde segue que $dw_z(T_z M) \subset T_z M$, e ainda $\det dw_z = \det \left(\frac{\partial v_j}{\partial u_i}\right)$, e pelo lema anterior o índice será $+1$ ou -1 de acordo com o sinal do determinante da transformação, como queríamos demonstrar. \square

Consideremos agora uma variedade compacta sem fronteira $M \subset \mathbb{R}^k$. E seja $N_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x - y\| \leq \epsilon, \text{ para algum } y \in M\}$ vizinhança tubular da variedade, onde ϵ é um raio normal admissível a M . Deste modo, N_ϵ é uma variedade de dimensão k com bordo.



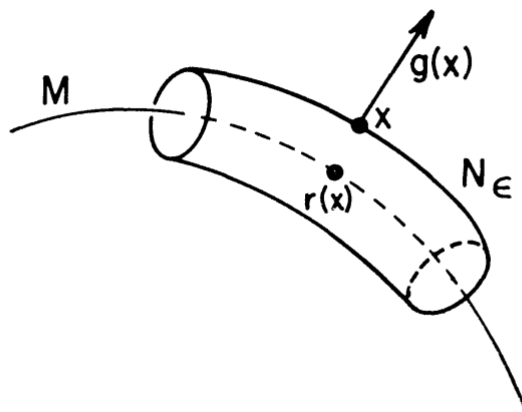
Generalizaremos a seguir o lema de Hopf para variedades gerais. A ideia da demonstração é “engrossar”, isto é considerar uma vizinhança tubular da variedade M , de modo a obter uma variedade com a mesma dimensão do espaço. Estenderemos assim o campo de vetores inicial para a nova variedade de modo que possua as mesmas singularidades do campo inicial, sendo então a soma dos índices preservada.

Teorema 9.2. *Para todo campo de vetores v com apenas singularidades não degeneradas, a soma dos índices do campo é igual ao grau da aplicação de Gauss*

$$g : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{k-1}.$$

Em particular, a soma dos índices não depende da escolha do campo de vetores.

Demonstração. Para $x \in N_\epsilon$, seja $r(x) \in M$ o ponto mais próximo a x de M . Note que o vetor $x - r(x)$ é perpendicular ao espaço tangente de M em $r(x)$, caso contrário $r(x)$ não seria o ponto mais próximo de M . Se ϵ é suficientemente pequeno, então a função $r(x)$ é suave e bem definida.



Consideremos a aplicação

$$\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2.$$

Então o gradiente de φ é dado por

$$\nabla\varphi(x) = 2(x - r(x)).$$

Observe que, se $x \in N_\epsilon$, $\varphi^{-1}(\epsilon^2) = \{\|x - r(x)\| = \epsilon, \text{ para algum } y \in M\} = \partial N_\epsilon$, e por conseguinte, o gradiente nos dará a direção do vetor normal exterior em $\varphi^{-1}(\epsilon^2)$, e assim a aplicação de Gauss será dada por

$$g(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|} = \frac{x - r(x)}{\epsilon}$$

Consideremos então o campo de vetores w em N_ϵ , dado por

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x))$$

Note que quando $x \in M$, $w \equiv v$, logo é uma extensão de v para N_ϵ . Observe ainda que,

$$\begin{aligned} w(x) \cdot g(x) &= [x - r(x) + v(r(x))] \cdot \left[\frac{(x - r(x))}{\epsilon}\right] \\ &= \frac{\|x - r(x)\|^2}{\epsilon} + v(r(x)) \frac{x - r(x)}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{9.6}$$

consequentemente, sendo $(x - r(x))$ perpendicular a $r(x)$, se $x \in \partial N_\epsilon$

$$w(x) \cdot g(x) = \frac{\|x - r(x)\|^2}{\epsilon} > 0$$

portanto w aponta para fora ao longo da fronteira. Note que w pode sumir apenas em singularidades de v em M ; isto é claro desde que $(x - r(x))$ e $w(r(x))$ são mutuamente ortogonais. Calculando a derivada de w em uma singularidade $z \in M$, vemos que

$$\begin{aligned} dw_z(h) &= dv_z(h) \text{ para todo } h \in T_z M \\ dw_z(h) &= h \text{ para } h \in T_z M^\perp \end{aligned}$$

Então o determinante de dw_z é igual ao determinante de dv_z . E portanto, o índice de w em uma singularidade z é igual ao índice de v em z . E portanto, do lema 9.4 a soma dos índices é o grau da aplicação g , ficando então demonstrado o teorema.

□

Teorema 9.3. (Poincaré-Hopf) *Seja v um campo de vetores em M , onde M é uma variedade sem fronteira e compacta, com apenas singularidades isoladas. Então a soma dos índices de um campo de vetores é igual a característica de Euler da variedade.*

Demonstração. Passo 1: Identificação do Invariante soma dos índices com a característica de Euler $X(M)$

Mostramos no teorema 9.2 que a soma dos índices não depende da escolha do campo de vetores, deste modo é suficiente construirmos um campo de vetores tal que a soma dos índices é igual a característica de Euler-Poincaré. De acordo com Marston Morse, é sempre possível encontrar uma função real, cujo gradiente é um campo de vetores não degenerados. Mais ainda, Morse demonstrou que a soma dos índices para este campo é igual a característica de Euler.

Passo 2: Provando o teorema para o caso de campos de vetores degenerados

Consideremos primeiramente um campo de vetores v definido em um subconjunto aberto U , e seja z uma singularidade degenerada isolada. Considere $2\epsilon > 0$, de modo que a única singularidade do campo em $B(z, 2\epsilon)$ seja o ponto z . E considere $\lambda : U \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação suave, tal que $\lambda(x) = 1$, para todo $x \in B(z, \epsilon)$ e $\lambda(x) = 0$. E considere o campo de vetores

$$v'(x) = v(x) - \lambda(x)y$$

onde $y \in N$ é algum valor regular do campo v . No anel delimitado pelas bolas de centros ϵ e 2ϵ , existe $\delta > 0$, tal que $\|v(x)\| > \delta$. Tomando y de modo que $\|y\| < \delta$, teremos

$$\|v'(x)\| = \|v(x) - \lambda(x)y\| \geq \|v(x)\| - \|\lambda(x)y\| > 0.$$

e portanto o novo campo só poderá ter singularidades na bola de centro z e raio ϵ . E portanto, tomando qualquer singularidade do campo v' , a singularidade será não degenerada. Utilizando esse procedimento para todas as singularidades degeneradas obteremos um novo campo de vetores onde as singularidades são não degeneradas. Para concluirmos a demonstração, devemos mostrar que a soma dos índices não se altera. Mostraremos que a soma dos índices do novo campo de vetores na bola de centro z e raio 2ϵ coincide com o índice de v em z . Com efeito, sabemos que o índice de v é dado pelo grau da aplicação $\frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ definida na fronteira da bola de centro z e raio 2ϵ . Usando o mesmo argumento aplicado na demonstração do lema de Hopf. Retirando uma vizinhança de cada singularidade do campo v' na bola de centro z e raio 2ϵ , obteremos uma nova variedade Y . E conseqüentemente,

$$\deg v|_Y = \deg v|_{\partial B(z, 2\epsilon)} - \sum \deg v|_{\partial B(z', \delta_{z'})} = 0$$

mostrando que

$$i(v, z) = \sum_{z'} i(v', z').$$

provando o argumento. Utilizando uma carta apropriada, podemos transferir os argumentos acima para um subconjunto aberto de uma variedade M de dimensão k , o teorema fica demonstrado no

caso de pontos com singularidades não degeneradas.

Mais geralmente, consideremos campos de vetores sobre uma variedade compacta M . Aplicando este argumento localmente vemos que todo campo de vetores com singularidades isoladas pode ser substituído por um campo de vetores não degenerado sem alterar a soma dos índices.

□

Observação 9.1. *Se $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma variedade com fronteira, então qualquer campo de vetores que aponta para fora ao longo da fronteira de M pode ser estendido sobre uma vizinhança $N_\epsilon(y)$ de modo que aponte para fora ao longo da fronteira de $N_\epsilon(y)$. No entanto, existe alguma dificuldade com a suavidade ao redor da fronteira de M . Então $N_\epsilon(y)$ não é uma variedade de classe C^∞ , mas apenas uma variedade de classe C^1 . A extensão w , se definida como acima por*

$$w(x) = v(r(x)) + x - r(x)$$

poderá apenas ser um campo de vetores contínuo próximo de ∂M . O argumento pode, mesmo assim, ser efetuado se mostrarmos que as nossas suposições de diferenciabilidade não são necessárias ou por outros métodos.

Observe que o resultado demonstrado acima, relaciona dois ramos aparentemente não relacionados da matemática. A soma dos índices de um campo de vetores, que é um conceito puramente analítico, com a característica de Euler-Poincaré, um invariante topológico. Como consequência imediata do Teorema de Poincaré-Hopf temos o seguinte corolário

Corolário 9.1. *Se a característica de uma determinada variedade M é diferente de zero, então qualquer campo de vetores deverá se anular em algum ponto.*

Tal consequência é conhecida por suas implicações famosas. Quando $M = S^2$, este fato se reflete na observação informal de que em qualquer momento dado, existe um ponto na superfície da terra onde o vento não sopra, ou ainda, não é possível pentear uma bola cabeluda.

Apêndice A

Construção de Aplicações C^∞

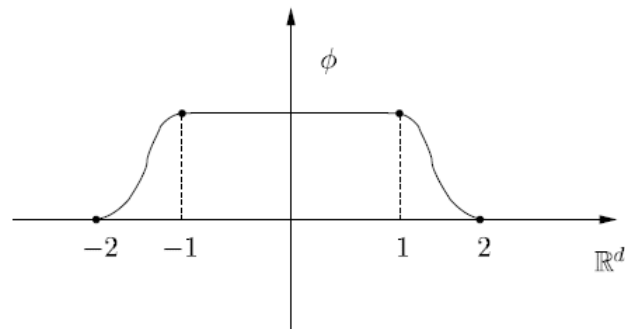
Lema A.1. Existe uma função de classe C^∞ , $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \overline{C(1)} \\ 0, & \text{se } x \in \overline{C(2)} \end{cases}$$

Demonstração. Vamos construir $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |t| > 2 \end{cases}$$

Graficamente, algo como



Seja

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Note que f é C^∞ . De fato,

- $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$, portanto f é contínua.
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$

Concluindo assim que f é diferenciável na origem e $f'(0) = 0$. Observe que calculando a derivada de ordem n , segue por indução que

$$f^n(t) = \begin{cases} p\left(\frac{-1}{t}\right)e^{\frac{-1}{t}}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

e portanto f é de classe C^∞ . Considere agora $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$. Note que, a partir de sua definição $g(t) \geq 0$, $g \equiv 1$ se $t \geq 1$ e $g \equiv 0$ se $t \leq 0$. Tome assim

$$h(t) = g(t+2)g(2-t)$$

Consequentemente h satisfaz as condições desejadas.

□

Apêndice B

Classificação de Variedades de dimensão

1

É possível, no caso de dimensão 1, descrever completamente a variedade. Provaremos neste apêndice um resultado assumido durante todo o texto. Provaremos este resultado com a utilização de funções de Morse.

Teorema B.1. *Toda variedade compacta de dimensão 1, é difeomorfa a um círculo ou a um intervalo fechado.*

A demonstração desse teorema requer alguns resultados preliminares.

Lema B.1. *(Suavidade) Seja g uma função definida em $[a, b]$ que é suave e tem derivada positiva em todo ponto exceto em um único ponto interior c . Então existe uma função globalmente suave \tilde{g} que coincide com g próximo dos pontos de fronteira e que possui derivada positiva em todo ponto.*

Demonstração. Analogamente a construção do lemas anteriores, seja ρ uma função suave não negativa que é nula fora de um subconjunto compacto de (a, b) , e que é igual a 1 em uma vizinhança de c , que ainda satisfaz $\int_a^b \rho = 1$. E defina a aplicação

$$\tilde{g}(x) = g(a) + \int_a^x [k\rho(s) + g'(s)(1 - \rho(s))]$$

onde a constante

$$k = g(b) - g(a) - \int_a^b g'(s)(1 - \rho(s))ds > 0$$

Verifiquemos que a aplicação tem as propriedades desejadas. □

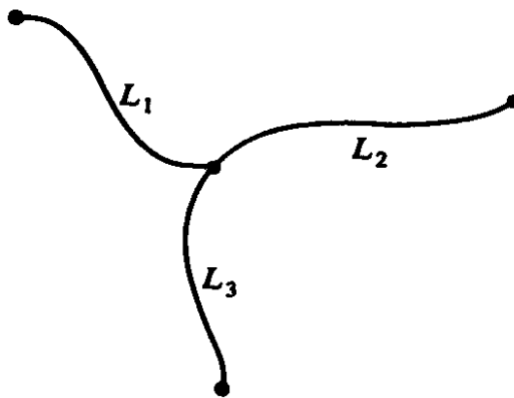
Com o objetivo de demonstrar o teorema, consideremos uma função de Morse f em X . Seja S a união dos pontos críticos de f juntamente com a fronteira de X . Se o conjunto S for finito, então $X \setminus S$ é formado por um número finito de variedades conexas de dimensão 1, a qual denotaremos por, L_1, \dots, L_N .

Proposição B.1. *f mapeia cada L_i difeomorficamente sobre um intervalo aberto de \mathbb{R} .*

Demonstração. Seja L algum dos L_i . Como f é um difeomorfismo local e L é conexo então $f(L)$ é um subconjunto aberto e conexo em \mathbb{R} . Mais ainda, $f(L)$ está contido em um subconjunto compacto $f(X)$ e portanto, $f(L) = (a, b)$. É suficiente mostrar que f é bijetiva em L , e assim, $f^{-1} : (a, b) \rightarrow L$ é definida, e é suave desde que f é um difeomorfismo local. Seja p um ponto de L e seja $c = f(p)$. Mostraremos que qualquer outro ponto $q \in L$ pode ser unido a p por uma curva $\gamma : [c, d] \rightarrow L$, tal que $f \circ \gamma = id$ e $\gamma(d) = q$. Desde que $f(q) = d \neq c = f(p)$, mostrando assim que a aplicação é bijetora. Então considere Q o conjunto dos pontos q que podem ser unidos através de um caminho. É fácil ver que Q é aberto e fechado, utilizando o fato de que f é um difeomorfismo local. Donde segue que $Q = L$. \square

Lema B.2. *Seja L um subconjunto de X difeomorfo a um intervalo aberto de \mathbb{R} , onde $\dim X = 1$. Então \bar{L} contém até dois pontos que não estão em L .*

Aqui o difeomorfismo f de L_i são estendidos para o fecho \bar{L}_i não podendo ocorrer a situação da figura abaixo. Então cada \bar{L}_i tem exatamente dois pontos de fronteira. Então, desde que X é uma variedade, cada ponto $p \in S$ pode estar na fronteira de 1 ou dois \bar{L}_i , e no caso formal, $p \in \partial X$. Chamaremos a sequência L_1, \dots, L_k uma cadeia, se a cada dois elementos consecutivos \bar{L}_j e L_{j+1}



tem um ponto de fronteira p_j em comum. Desde que temos apenas uma quantidade finita de L_i , existem claramente uma cadeia maximal. Finalizaremos a nossa prova com a seguinte afirmação:

Afirmação B.1. *Se L_1, \dots, L_k é uma cadeia maximal, então ela contém todos os L_i . Se \bar{L}_k e \bar{L}_0 tem algum ponto de fronteira em comum, então X é difeomorfo a um círculo, caso contrário, X é difeomorfa a um intervalo aberto.*

Demonstração. Suponhamos que L não está incluída na cadeia. Então \bar{L} não pode partilhar dos pontos de fronteira p_0 ou p_k , caso contrário a cadeia poderia ser aumentada. O conjunto não pode compartilhar nem um ponto p_j , desde que a situação descrita na figura abaixo não é possível.

Então $\cup_{j=1}^k \bar{L}_j$ não intercepta nenhum \bar{L} excluído da cadeia. Consequentemente, a união é aberta e fechada em X , donde segue que

$$X = \bigcup_{j=1}^k \bar{L}_j$$

por conexidade.

A aplicação f se comporta bem em cada L_j , mas pode ser que necessitemos reverter as direções á medida que atravessamos um ponto de fronteira. Nós apenas endireitaremos de forma um pouco menos delicada. Seja $a_j = f(p_j)$. Deste modo, a aplicação f mapeia L_j difeomorficamente sobre (a_{j-1}, a_j) ou (a_j, a_{j-1}) , de modo que o intervalo faça sentido. Para cada $j = 1, \dots, k$ tome uma aplicação afim $\tau_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ carregando a_j em $j-1$ e a_j em j . Defina a aplicação $f_j : \bar{L}_j \rightarrow [j-1, j]$ por $f_j = \tau_j \circ f$.

Se $a_0 \neq a_k$, então as aplicações f_k concordam em pontos de definição comum. Mais ainda, eles se encaixam de maneira que é possível considerar a aplicação $F : X \rightarrow [0, k]$, por $F = f_j$ em \bar{L}_j , F é uma aplicação contínua e é um difeomorfismo com excessão dos pontos p_1, \dots, p_{k-1} . Usando o lema de suavidade, simplesmente modificando F , podemos estender a aplicação a um difeomorfismo local.

Se $a_0 = a_k$, seja $g_j = \exp[i(2\pi/k)f_j]$. Então podemos definir a aplicação $G : X \rightarrow S^1$ por $G = g_j$ sobre \bar{L}_j . Sendo G contínua e um difeomorfismo com excessão dos pontos p_1, \dots, p_{k-1} . Novamente utilizando o lema da suavidade, G pode ser estendida a um difeomorfismo global, e portanto, o resultado segue. \square

Índice Remissivo

- Índice do campo em uma singularidade, 68
- Aplicações
 - suavemente homotópicas, 50
 - suavemente isotópicas, 51
- Bola normal, 35
- Cadeias, 65
- Campos de Vetores
 - Normais, 34
 - tangentes, 67
- Característica de Euler-Poincaré, 64
- Classificação de variedades compactas de dimensão 1, 80
- Difeomorfismo
 - que preserva orientação, 29
- Diferencial de uma aplicação, 16
- Espaço Tangente, 14
- Face de um simplexo, 63
- Forma
 - Local das Imersões, 6
 - Local das Submersões, 7
- Fronteira de uma variedade, 23
- Grau
 - de Brouwer, 59
 - Módulo 2, 56
- Grupo de homologia de um poliedro, 65
- Imersão, 5
- Interior de uma variedade, 23
- Lema
 - de Hopf, 71
- Números de Betti, 66
- Orientação
 - para espaços vetoriais, 29
 - para uma variedade suave, 29
 - produto, 32
- Poliedro, 63
- Ponto Crítico, 19
- Ponto Regular, 19
- Projeção Estereográfica, 11
- Raio normal admissível, 35
- Regra da Cadeia, 3
- Segmento normal, 35
- Simplexo, 63
- Submersão, 6
- Subvariedade, 14
- Teorema
 - Aplicação Inversa, 4
 - da Função Implícita, 8
 - de Brown-Sard, 46
 - de Euler-Poincaré, 65
 - de Fubini, 41
 - de Poincaré-Hopf, 75
 - de Sard, 41
 - do ponto fixo de Brouwer, 47
 - Fundamental da Álgebra, 38
- Valor Crítico, 19

Valor Regular, 19

Variedade

 com fronteira, 22

 Orientável, 30

 Suave, 9

Vizinhança Tubular, 35

Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDER, J. A proof of the invariance of certain constants in Analisis Situs, Trans. Am. Math. Soc., vol.16 (1915), pags 148-154.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [3] CONLON, Lawrence. *Differentiable Manifolds*. 2º ed.
- [4] DOERING, Claus I. LOPES, Artur O. *Equações Diferenciais Ordinárias* SBM, . 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [5] GUILLEMIN, Victor e POLLACK, Allan. *Differential Topology*. New Jersey : Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [6] HIRSCH, M. W. *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, NY, 1976.
- [7] LEE. J. *Introduction to Smooth Manifolds* . Prentice Hall, Massachusetts, 2000.
- [8] LIMA, Elon Lages. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, Publicações Matemáticas, 2007.
- [9] LIMA, Elon Lages. *Homologia Básica*. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2009.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise, vol 2*. 11ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [11] LIMA, Elon Lages. *A característica de Euler Poincaré*. Revista Matemática Universitária, nº 01, artigo 02. Rio de Janeiro: IMPA.
- [12] LIMA, Elon Lages. *Análise no Espaço \mathbb{R}^n* . 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [13] MILNOR, J. W. *Topology : From the Differentiable Viewpoint*. New Jersey : University of Virginia Press, 1965.
- [14] MILNOR, J. W. *Morse Theory*. Princeton N.J.:Princeton University Press, No.51, 1963.
- [15] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3ª ed. Houston, Texas: Perish, 1999. vol 1.

- [16] TU, Loring. *An Introduction to Differentiable Manifolds*. 2^a ed. Medford, Massachusetts: Springer. 2011.
- [17] WARNER, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1970.