UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Quinta lista de Exercícios - Análise Funcional, período 2009.2.
Professor: João Marcos do Ó

Exercício 1. Seja $T : \ell^2 \to \ell^2$ o operador linear definido por $T(x) = y$ onde

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j = 1 \\ (j-1)^{-1}x_{j-1} & \text{se} \quad j \geq 2. \end{cases}$$

1. Considere a sequência de operadores lineares $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell^2$ onde $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ é definido por $T_n(x) = y$ onde

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j = 1 \\ (j-1)^{-1}x_{j-1} & \text{se} \quad 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

   Prove que T_n é um operador linear de posto finito e $T_n \to T$ em $L(\ell^2, \ell^2)$. Pontanto T é um operador linear compacto e em particular contínuo.

2. O operador T é autoadjunto?

3. Prove que $\sigma(T) = \{0\}$. Para isto use o **Teorema VI.8** pagina 95, Brezis. Seja E espaço de Hilbert com $\dim(E) = \infty$ e $T : E \to E$ um operador linear compacto. Então
   (a) $0 \in \sigma(T)$.
   (b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$, isto é, o espectro de T é formado de autovalores de T e o elemento nulo.
   (c) Ocorre apenas uma das afirmações:
      i. $\sigma(T) = \{0\}$;
      ii. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é finito;
      iii. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ é sequência convergente para o elemento nulo.

Exercício 2. Seja E espaço de Hilbert e $P : E \to E$ um operador linear contínuo.

1. Prove que P é uma projeção ortogonal se, e somente se, P é autoajunto e idempotente, isto é, $P^2 = P$.

2. Suponha que $\dim(E) = \infty$ e $T : E \to E$ é um operador linear contínuo e autoadjunto tal que $\sigma(T) = VP(T) = \{0, 1\}$. Prove que T é uma projeção ortogonal. Lembre-se que se $T : E \to E$ é um

operador linear contínuo e autoadjunto então $\sigma(T) \subset [m, M], m \in \sigma(T)$ e $M \in \sigma(T)$ onde

$$m = \inf\{\langle T(u); u\rangle : u \in E \quad \text{e} \quad \|u\| = 1\}$$

e

$$M = \sup\{\langle T(u); u\rangle : u \in E \quad \text{e} \quad \|u\| = 1\}$$

Exercício 3. Considere $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ munido com a norma

$$\|u\|_1 = \int_{[-1,1]} |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Seja $A_a = \{f \in E : f(0) = a\}$.

1. Prove que A_a é convexo e não vazio.
2. Prove que se $a < b$, então $A_a \cap A_b = \emptyset$.
3. Prove que A_a não é aberto em E.
4. Prove que A_a é denso em E.
5. Os conjuntos A e B podem ser separados por um hiperplano fechado em E?
6. Considere o funcional linear $\varphi : E \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(f) = f(0)$. Prove que existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que $\|u_n\|_1 = 1$ e $\varphi(u_n) = u_n(0) \to \infty$, logo φ não é contínua em E.
7. Note que se $a < b$ então o funcional φ, definido acima, separa os conjuntos A_a e A_b.

Exercício 4. Seja $A : \ell^2 \to \ell^2$ definido por $A(x_1, ..., x_n, ...) = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n, ...)$ onde $\lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\sup_n |\lambda_n| < \infty$. Para quais seqüências $\{\lambda_n\}$ podemos afirmar que A^{-1} existe? Nesse caso A^{-1} fica contínuo?

Exercício 5. Seja $S : \ell^2 \to \ell^2$, $S(x) = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. S é injetivo? S é sobrejetivo? Existe inverso à direita? À esquerda? São limitados? Repita tudo para $T(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

Exercício 6. Mostre que o operador $A : C^1[0, 1] \to C^0[0, 1]$, $A(x) = x'$ admite um inverso à direita mas não à esquerda.

Exercício 7. Seja $A : \mathcal{D} \to C[0, 1]$, $\mathcal{D} = \{x \in C^1[0, 1] : x(0) = 0\}$, $Ax(t) = x'(t) + a(t)x(t)$, onde $a \in C[0, 1]$. Mostre que A^{-1} existe e é contínuo.

Exercício 8. Seja $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ tal que $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds + x(t)$. Mostre que $\mathcal{N}(A) = \{x : A(x) = 0\} = \{0\}$, e que A é sobrejetivo. Além disso, A^{-1} é limitado; calcule A^{-1}.

Exercício 9. Sejam E um espaço de Banach e C operador em $\mathcal{B}(E,E) \equiv \mathcal{B}(E)$ tal que $\|C\| < 1$. Mostre que $I - C$ é sobrejetivo, $(I-C)^{-1}$ existe e é limitado, e $(I-C)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n$, a convergência sendo na norma de $\mathcal{B}(E)$. Além disso, $\|(I-C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|C\|}$.

Sugestão: $(I-C)(I+C+C^2+...+C^N) = I - C^{N+1}$.

Exercício 10. Seja E um espaço de Banach, $A \in \mathcal{B}(E)$ tal que $\|I - A\| < 1$. Mostre que A^{-1} existe e que $A^{-1} \in \mathcal{B}(E)$.

Exercício 11. (Operador derivada e operador integração)

1. O operador $A : \mathcal{D}(A) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ onde, $\mathcal{D}(A) = \{x \in C[0,1] : x' \in C[0,1]\}$ dado por $Ax = x'$ é contínuo?
2. $T : (C[0,1]^1, \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Tx = x'$, é contínuo?
3. Mostre que $I : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ix)(t) = \int_0^t x(s)ds$ é contínuo; calcule $\|I\|$.

Exercício 12. Sejam $(E, \|\cdot\|)$ e $(F, \|\cdot\|)$. Dizemos que que E e F são *topologicamente isomorfos* quando existe uma aplicação linear T de E sobre F com T e T^{-1} contínuas. Mostre que T e E são topologicamente isomorfos se e só se existe T de E sobre F linear e constantes $m, M > 0$ tais que $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$. Mostre que o isomorfismo topológico preserva seqüências de Cauchy; em particular, E é espaço de Banach se e só se F é espaço de Banach.

Exercício 13. Seja E um espaço vetorial com a métrica $d : E \times E \to \mathbb{R}$. Em geral não existe norma $\|\cdot\|$ em E tal que $d(x,y) = \|x-y\|$. De fato, mostre que (ℓ^1, d) onde $d(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi^n - \eta^n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}$, é espaço métrico (completo).

Sugestão: Para demonstrar a desigualdade triangular: $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ é estritamente crescente para $x \geq 0$; $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \ldots$. Se existisse uma norma em (ℓ^1, d) tal que $d(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$ teríamos $d(\lambda\xi, \lambda\eta) = |\lambda|\|\xi - \eta\|$, o que não é verdadeiro. Será que existe norma em ℓ^1 tal que d e $\|\cdot\|$ definem a mesma topologia?

Exercício 14. Seja $A : E \to F$ operador linear tal que $\mathcal{R}(A)$ é fechado em F e existe $m > 0$ satisfazendo $\|Ax\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in E$. Mostre que A^{-1} é fechado.

Exercício 15. Mostre que se A é fechado e admite inverso A^{-1}, então A^{-1} é fechado.

Exercício 16. Dada $f \in C^1$, denotando $\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)|dx$, mostre que $(C[0,1], \|\cdot\|_{L^1})$ é um espaço vetorial normado, mas não é um espaço de Banach.

Exercício 17. Sejam $0 < \alpha \leq 1$, $C^{\alpha}[0,1] = \left\{ f \in C[0,1] : \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \right\}$. Mostre que $(C^{\alpha}[0,1], \|\cdot\|_{\alpha})$ é espaço de Banach onde

$$\|f\|_{\alpha} = \|f\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

O subconjunto $\{f \in C^{\alpha} : \|f\|_{\alpha} \leq 1\}$ é compacto em $(C^{\alpha}[0,1], \|\cdot\|_{\infty})$. É compacto em $(C^{\alpha}[0,1], \|\cdot\|_{\alpha})$?

Exercício 18. Mostre que $E' \times F' = (E \times F)'$.

Sugestão: mostre que $T(f,g)(u,v) = f(u) + g(v)$ é um isomorfismo topológico.

Exercício 19. Seja $N \subset E'$. Mostre que $(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}$ se E é reflexivo.

Exercício 20. Sejam E e F espaços isometricamente isomorfos. Mostre que E é reflexivo se e só se F for reflexivo.

Exercício 21. Sejam X, Y espaços de Banach e $A_n \in \mathcal{B}(X,Y)$. Suponha que a seqüência $(\langle f, A_n x\rangle)$ seja limitada para cada $x \in X$ e todo $f \in Y'$. Mostre que a seqüência $\{\|A_n\|\}$ é limitada.

Exercício 22. Ache o operador adjunto dos operadores $A : \ell^1 \to \ell^1$ dados por, $Ax = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$; $Ax = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| \leq 1 \forall n; Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$; $A(x) = (x_2, x_3, \ldots)$. Repita a questão com A definido em c_0; idem $A : \ell^2 \to \ell^2$.

Exercício 23. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, Y subespaço de X. Mostre que se $int(Y) \neq \emptyset$ então $Y = X$.

Exercício 24. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ reflexivo $f \in X'$. Mostre que existe $x \neq 0$ tal que $\langle f, x\rangle = \|f\|\|x\|$. Utilize os seguintes funcionais: $f : C[-1,1] \to C[-1,1]$, $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k$, $x = (x_1, ..., x_k, ...) \in \ell_1$, e $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}}$, $x \in c_0$ para mostrar que $C[-1,1]$, ℓ^1 e c_0 não são reflexivos.

Exercício 25. Seja $A : \mathcal{D}(A) \to C[0,1]$ tal que $Ax(t) = \frac{d^2x}{dx^2} + x(t)$,

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in C[0,1] \text{ e } x(0) = x'(0) = 0\}.$$

Mostre que A é fechado mas não é limitado. Existe A^{-1}? A^{-1} é limitado?

Exercício 26. Seja Y subespaço de $(X, \|\cdot\|)$. Mostre que Y é fracamente fechado se e só se Y for fortemente fechado; esse resultado vale para qualquer subconjunto convexo Y de X.

Exercício 27. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vertorial normado e $f : E \to \mathbb{R}$ um funcional linear não trivial. Mostre que $E = N(f) \oplus \langle x_0\rangle$, onde $x_0 \in E \setminus N(f)$ e $N(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

Exercício 28. Sejam $(E, \|\cdot\|)$ e $(F, \|\cdot\|)$ espaços vetoriais normados. Mostre que se $L(E,F) = \{T : E \to F : T$ é linear e contínua $\}$ é Banach então F é Banach.

Exercício 29. Se $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, então é possível escrever $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, onde cada E_n é subespaço vetorial de dimensão finita?

Exercício 30. prove que $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ não é um espaço de Banach, onde $\|u\|_1 = \int_{[0,1]} |u| \; dx$.

Exercício 31. Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno de H.

1. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal de H. Mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge se, e somente se, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ converge, e neste caso vale
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2}.$$
2. Seja $C \neq \emptyset$ um subconjunto fechado e convexo de H. Dados $x \in H$ e $y \in C$, prove que
$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| \Leftrightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \; \forall z \in C.$$
3. Mostre que o conjunto $A := \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde $c_n(i) = 0$ se $i \neq n$ e $c_n(n) = (n+1)/n$. Prove que $A \subset \ell^2$ é fechado em ℓ^2 com sua norma usual, porém não existe um elemento em ℓ^2 que minimiza $\inf_{x \in A} \|x\|_{\ell^2}$.
4. Seja $C \subset H$ um conjunto ortonormal maximal de H. Mostre que se $\langle x, y \rangle = \langle u, y \rangle$ para todo $y \in C$, então $x = u$.
5. Seja $C = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal de H. Prove que para todo $x \in H$ a expressão
$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$$
está bem definida, ou seja, $y \in H$ e além disso $\langle x - y, x_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 32. Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ espaços vetoriais normados e seja D um subespaço vetorial de X. Dizemos que uma transformação linear $A : D \to Y$ é uma aplicação fechada se para toda sequência $(x_n) \subset D$, com $x_n \to x$ em X e $A(x_n) \to y$ em Y, vale
$$x \in D \quad \text{e} \quad y = A(x).$$

1. Prove que A é fechada se, e somente se, seu gráfico é fechado $Graf(A)$ em $X \times Y$ equipado com a norma $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.
2. Prove que se A é limitada e D é um subespaço fechado de X, então A é fechada. Em particular, se $D = X$ e A é contínua então A é fechada.
3. Prove que se A é fechada e A^{-1} existe, então A^{-1} também é fechada.
4. Prove que se Y é Banach, A é fechada e limitada, então D é um subespaço fechado de X.

Exercício 33. Considere $C([a,b],\mathbb{R})$ equipado com a norma $\|u\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|$ e $C^1([a,b],\mathbb{R})$ equipado com a norma

$$\|u\|_1 := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

- Mostre que $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|u\|_1)$ é um espaço de Banach.
- Mostre que a inclusão

$$(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|u\|_1) \hookrightarrow (C([a,b],\mathbb{R}), \|u\|_\infty)$$

é compacta.

Exercício 33. Considere $A : \ell^2 \to \ell^2$ definida por $A(x) = y$ onde $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $y = (x_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \ldots) = A(x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2i} \ldots)$$

1. A aplicação A é compacta?
2. Determine os autovalores de A.
3. Determine o espectro de A.
4. Determine a adjunta A^* de A.
5. A aplicação A^* é compacta?
6. Determine os autovalores de A^*.
7. Determine o espectro de A^*.
8. As aplicações A^* e A são autoadjuntas?

Exercício 34 Definamos os seguinte espaços vetoriais normados por $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$:

$c_{00}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) : x_j \neq 0$ apenas para um número finito de índices $j\}$
$c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) : x_j \to 0\}$
$c(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) :$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_j \to \alpha\}$

1. Mostre que $c_{00}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ é denso em $c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.
2. Mostre que $c_{00}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ não é espaço de Banach com respeito à norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

3. Mostre que $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ não é denso em $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$
4. Mostre que a codimensão de $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ é igual a 1 em $c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
5. Mostre que $\{c_i : c_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}, i \in \mathbb{N}\}$ é uma base de Schauder de $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ que também é base no sentido de espaço vetorial.

Exercício 35 1. Definamos o funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x$ em $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$. Exiba o único funcional linear contínuo $\widetilde{f}$ que estende f a todo $\mathbb{R}^2$ e tal que $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$. Justifique sua resposta através de cálculos envolvendo a expressão de f e $\widetilde{f}$.

2. Seja H um espaço de Hilbert e $V \subset H$ um subespaço vetorial próprio não trivial. Mostre que todo funcional linear e contínuo $f : V \to \mathbb{R}$ possui única extensão linear e contínua $\widetilde{f} : H \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\| = \|\widetilde{f}\|$.

Exercício 36 Sejam E e F espaços vetoriais normados e seja $T : E \to F$ uma função qualquer. Denotemos por $G(T)$ e $Im(T)$ respectivamente o gráfico de T e a imagem de T.

1. Se $G(T)$ é compacto, então E e $Im(T)$ são compactos.
2. Se E é compacto e T é contínua, então $G(T)$ é compacto.
3. Se $G(T)$ é compacto, então T é contínua.
4. Que condições a mais sobre T, E e F garantem que se $G(T)$ é fechado então T é contínua? Justifique.

Exercício 37 Seja X um espaço de Banach e sejam $A, B : X \to X$ aplicações lineares contínuas. Definamos $T : X \bigotimes X \to X \bigotimes X$ por $T(x, y) = (Ax, Ay + Bx)$

1. Mostre que o espectro de T e o de A são iguais.
2. Mostre que o conjunto de autovalores de T e o de A são iguais.