UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Quarta lista de Exercícios - Análise Funcional, período 2009.2.
Professor: João Marcos do Ó

Exercício 1. Prove que o espaço dual de ℓ^1 é ℓ^∞.

- **(a)** Considere $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a base canônica de ℓ^1, isto é, $e_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $e_i(j) = 0$ se $i \neq j$ e $e_i(j) = 1$ se $i = j$. Dada $f \in (\ell^1)'$, seja $\alpha_j = f(e_j)$. Neste caso podemos afirmar que para todo $\xi = (a_j) \in \ell^1$ temos $f(\xi) = f(\sum_{j=1}^\infty a_j e_j) = \sum_{j=1}^\infty a_j \alpha_j$?
- **(b)** Prove que o elemento $\alpha = (\alpha_j)$ com $\alpha_j = f(e_j)$ pertence a ℓ^∞ e que $\|\alpha\|_\infty \leq \|f\|_{(\ell^1)'}$.
- **(c)** Defina $\Phi : (\ell^1)' \to \ell^\infty$ dada por $\Phi(f) := \alpha = (\alpha_j)$ com $\alpha_j = f(e_j)$. Prove que Φ está bem definida é linear e contínua.
- **(d)** Prove que para todo $\xi = (a_j) \in \ell^1$ temos

$$|f(\xi)| \leq \|\alpha\|_\infty \|\xi\|_1$$

donde $\|f\|_{(\ell^1)'} \leq \|\alpha\|_\infty$ e portanto para todo $f \in (\ell^1)'$ temos $\|\Phi(f)\|_{\ell^\infty} = \|f\|_{(\ell^1)'}$, isto é, Φ é uma isometria.
- **(e)** Prove que Φ é sobrejetora. Dada $\beta = (\beta_j) \in \ell^\infty$ defina o funcional $g : \ell^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$g(\xi) = g\left(\sum_{j=1}^\infty a_j e_j\right) := \sum_{j=1}^\infty a_j \beta_j.$$

Prove que $|g(\xi)| \leq \|\beta\|_\infty \|\xi\|_1$, donde $g \in (\ell^1)'$ e $\Phi(g) = \beta$.

Exercício 2. Prove que ℓ^∞ não é separável. Seja $\xi = (\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em ℓ^∞. Defina $\alpha \in \ell^\infty$ dada por

$$\alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi_j^j \geq 1 \\ \xi_j + 1, & \text{se } |\xi_j^j| < 1. \end{cases}$$

Prove que $\|\alpha - \xi_n\|_\infty \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3. Prove que ℓ^1 não é reflexivo.

Exercício 4. Considere $Z \subset \ell^\infty$ tal que $\beta \in Z$ se $\beta_j \in \{0, 1\}$. Prove que Z não é enumerável. Prove que se $\alpha, \beta \in \ell^\infty$ e $\alpha \neq \beta$, então $\|\alpha - \beta\|_\infty = 1$. O que você pode concluir deste fato?

Exercício 5. Considere $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ tal que $e_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $e_i(j) = 0$ se $i \neq j$ e $e_i(j) = 1$ se $i = j$. Prove que $e_n \rightharpoonup 0$ in ℓ^2, mas $e_n \not\to 0$ no sentido forte em ℓ^2.

Exercício 6. Seja E um espaço de Banach e $f \in E'$. Prove que $f : (E, \sigma(E, E')) \to \mathbb{R}$ é contínua.

Exercício 7. Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in E''$. Explique se é verdadeiro ou falso que $\Phi : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{R}$ é contínua.

Exercício 8. Seja E um espaço de Banach. Prove as seguintes afirmações:

(a) $(x_n) \subset E$, $x_n \rightharpoonup x$ (em $\sigma(E, E')$) $\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$, $\forall f \in E'$.

(b) $(x_n) \subset E$, $x_n \to x$ (em $(E, \|\cdot\|)$) $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, $\forall f \in E'$.

(c) Se E tem dimensão finita então a topologia fraca em E coincide com a topologia forte em E.

(d) Explique se é verdadeiro ou falso que se E tem dimensão infinita então a topologia fraca em E é estritamente menor que a topologia forte em E.

(e) Prove que a coleção $\sigma(E, E')$ é uma topologia em E e além disso é Hausdorff (T_2).

(f) Prove que se E tem dimensão infinita então a topologia fraca em E não é metrizável.

(g) Descreva os abertos das bases para as topologias: $\sigma(E, E')$ e $\sigma(E', E)$.

(h) Prove que toda sequência $(x_n) \subset E$ fracamente convergente é limitada em $(E, \|\cdot\|)$.

(i) Prove que a função norma é sequêncialmente fracamente semi contínua inferiormente, isto é, para toda sequência $(x_n) \subset E$ fracamente convergente $x_n \rightharpoonup x$ tem-se $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(j) Prove que se E tem dimensão infinita então

$$\overline{\{x \in E : \|x\| = 1\}}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

(l) Prove que $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacta em $(E, \|\cdot\|)$ se, e somente se, E tem dimensão finita.

Exercício 9. Prove que em ℓ^1 uma sequência é fracamente convergente se, e somente se, é fortemente convergente: $u_n \rightharpoonup u \Leftrightarrow u_n \to u$. O que você pode concluir disto em termos da relação entre topologia fraca e topologia forte?

Exercício 10. Seja E um espaço de Banach reflexivo. Prove que se $(u_n) \subset E$ é tal que para todo $f \in E'$, a sequência $(f(u_n))$ é convergente, então existe $u \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ converge em $\sigma(E, E')$.

Exercício 11. Seja E um espaço de Banach. Prove que todo conjunto $K \subset E$ compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$ é limitado.

Exercício 12. Seja E um espaço de Banach reflexivo. Prove que $K \subset E$ é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$ se, e somente se, é fracamente fechado em $\sigma(E, E')$ e limitado.

Exercício 13. Seja E um espaço de Banach e

$$c_w = \{(x_n) \subset E : (x_n) \text{ converge fraco}\}.$$

Prove que c_w é um subespaço vertorial de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$.

Exercício 14. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ operador linear. Prove que se T aplica sequências fortemente convergentes em E em sequências fracamente convergentes em F, então T é fortemente contínuo.

Exercício 15. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ operador linear limitado. Prove que se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$, então $Tx_n \rightharpoonup Tx$ em $\sigma(F, F')$.

Exercício 16. Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que um operador linear $T : E \to F$ é compacto se $\overline{T(B_E)}$ é compacto, onde

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

1. Prove que todo operador compacto é contínuo.
2. Prove que T é compacto se, e somente se, T aplica conjuntos limitados em conjuntos realtivamente compactos.
3. Prove que T é compacto se, e somente se, T aplica sequências limitadas de E em sequências de F que possuem subsequências convergentes em F.
4. Prove que a coleção $K(E, F) = \{T : E \to F : T \quad \text{é compacto}\}$ é um subespaço vetorial fechado de $L(E, F)$, em particular $(K(E, F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ é um espaço de Banach.

Exercício 17. Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que um operador linear $T : E \to F$ é completamente contínuo se T aplica sequências fracamente convergentes em E em sequências convergente em F.

1. Prove que todo operador completamente contínuo é contínuo.
2. Prove que todo operador compacto é completamente contínuo.
3. Prove que se E é reflexivo, então $T : E \to F$ é compacto se, e somente se, T é completamente contínuo.
4. A coleção $CC(E, F) = \{T : E \to F : T \quad \text{é completamente contínuo}\}$ é um subespaço vetorial fechado de $L(E, F)$?
5. Se E não é reflexivo, existe exemplo $T : E \to F$ completamente contínuo que não é compacto. Considere o operador inclusão

$$\mathcal{I} : C([0, 1], \mathbb{R}) \hookrightarrow L^2([0, 1], \mathbb{R}),$$

em que estes espaços estão munidos de suas normas usuais. Prove que $\mathcal{I}$ é completamente contínuo mas não é compacto.

Exercício 18. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ operador linear limitado. Dizemos que T tem posto finito se $T(E)$ é um subespaço de dimensão finita de F.

1. A coleção $PF(E, F) = \{T : E \to F : T \quad \text{tem posto finito}\}$ é um subespaço vetorial fechado de $L(E, F)$?
2. Seja (T_n) uma sequência de operadores de posto finito tal que $T_n \to T$ em $L(E, F)$. Prove que T é um operador compacto.
3. Seja H um espaço de Hilbert. Use o teorema da projeção para provar que para todo operador compacto $T : H \to H$ existe uma sequência de operadores de posto finito $T_n : H \to H$ tal que $T_n \to T$ em $L(E, F)$.

Exercício 19. Mostre que os seguintes operadores são compactos.

(a) $T : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$

(b) $T : \ell^2 \to \ell^2$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1/2, x_2/2^2, \ldots, x_n/2^n, \ldots)$

(c) $T : \ell^p \to \ell^p$, $1 \leq p < \infty$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$

(d) $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$

Exercício 20. Sejam E, F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador compacto. Prove que se F tem dimensão infinita, então T não pode ser sobrejetivo. Se $T(E)$ é fechado em F, pode $T(E)$ ter dimensão infinita?

Exercício 21. Mostre que a seqüência de operadores limitados $T_n : \ell^2 \to \ell^2$ de posto finito definidos por

$$T_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

converge pontualmente para um operador limitado que não é compacto.

Exercício 21. Sejam H um espaço de Hilbert, $\{e_n\}$ um sistema ortonormal completo para H e $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ uma seqüência de números reais tal que $\lambda_n \to 0$. Defina um operador $T : H \longrightarrow H$ por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Mostre que T é um operador compacto.

Exercício 22. Sejam H um espaço de Hilbert, $\{e_n\}$ um sistema ortonormal completo para H, F um espaço de Banach e $T : H \longrightarrow F$ um operador limitado. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ é uma série convergente, então, T é um operador compacto.

Exercício 23. Seja $E = \{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f'(0) = 0\}$ e considere o operador $T : E \longrightarrow C^0([0,1])$ definido por $Tf = f''$. Mostre que $T^{-1} : C^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ é um operador compacto.

Exercício 24. Sejam E um espaço reflexivo, F um espaço vetorial normado e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear compacto. Mostre que $T(B_E)$ é compacto.

Exercício 25. Defina $T : C^0([-1,1]) \longrightarrow C^0([-1,1])$ por

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{x} tf(t)dt.$$

Mostre que T é um operador compacto, mas $T(B_{C^0([-1,1])})$ não é compacto.

Exercício 26. Sejam E e F espaços vetoriais normados com $\dim E = \infty$ e $T : E \to F$ um operador linear compacto. Mostre que existe uma seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n e $Tx_n \to 0$.

Exercício 27. Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ um operador linear compacto. Mostre que existe $x \neq 0$ tal que $\|Tx\| = \|T\| \, \|x\|$.

Exercício 28. Sejam E um espaço reflexivo e F um espaço de Banach com a propriedade de que toda seqüência que satisfaz $y_n \rightharpoonup 0$ satisfaz $y_n \to 0$. Mostre que se $T : E \to F$ é um operador linear limitado, então, T é compacto.

Exercício 29. Sejam E e F espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : E \to F$ que leva seqüências limitadas em E em seqüências que possuem subseqüências fracamente convergentes em F é chamado um **operador fracamente compacto**.

1. Mostre que operadores fracamente compactos são limitados.
2. Mostre que se E ou F são reflexivos, então todo operador limitado é fracamente compacto.

Exercício 30. Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \to F$ um operador linear compacto. Mostre que $T(E)$ é separável.

Exercício 31. Mostre que toda forma bilinear limitada é contínua.

Exercício 32. Sejam H um espaço de Hilbert separável, $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto compacto, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a seqüência de autovalores não-nulos distintos de T e $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a correspondente seqüência de autovetores ortonormais. Mostre que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tx, e_n \rangle \, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \, e_n.$$

Exercício 33. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ operador linear limitado.

1. Prove que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"] \\ E'' \arrow[r, "T^{**}"'] & F'' \end{tikzcd}$$

2. Suponha que vale que se $T : E \to F$ é compacto então $T^* : F' \to E'$ também é compacto. Prove que vale a recíproca, isto é, se $T^* : F' \to E'$ é compacto então $T : E \to F$ é compacto. Para isto use o exercício anterior para provar que

$$J_F(\overline{T(B_E)}) \subset \overline{T^{**}(B_{E''})}.$$

3. Prove que se $T : E \to F$ é compacto então $T^* : F' \to E'$ também é compacto.

Exercício 34. Prove que $T : \ell^1 \to \ell^1$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ é uma isometria que não é sobrejetora.