UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Primeira lista de Exercícios - Análise Funcional, período 2009.2.

Professor: João Marcos do Ó

---

**Exercício 1** *Seja* $p \in [1, \infty]$. *Prove que*

$$(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p); \; (\ell_p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p); \; (c_0(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \quad e \quad (c(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$$

*são espaços de Banach.*

**Exercício 2** *Prove que se* $1 \leq p < q$, *então a inclusão* $\ell_p(\mathbb{K}) \subset \ell_q(\mathbb{K})$ *é continua e esta inclusão é estrita no sentido que existe um elemento em* $\ell_q(\mathbb{K})$ *que não está em* $\ell_p(\mathbb{K})$. *Sugestão: tome* $x = (x_i) \in \ell_p(\mathbb{K}) - \{0\}$, *use que* $0 \leq |x_i| / \|x\|_p \leq 1$ *e* $1 \leq p < q$, *para concluir que*

$$\left( \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^q \leq \left( \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p.$$

**Exercício 3** *Seja* $X$ *um conjunto não-vazio e* $(E, \|\cdot||)$ *um espaço vetorial normado. Consideremos*

$$\mathcal{B}(X, E) = \{ f : X \to E : f \text{ é uma função limitada} \}.$$

*Este espaço vetorial munido da função*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

*é um espaço vetorial normado. Prove que se* $(E, \|\cdot||)$ *é um espaço de Banach então* $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ *é também um espaço de Banach. Se tomarmos* $X = [0, 1]$ *e* $E = \mathbb{R}$ *com a norma usual temos que o espaço das funções reais definidas no intervalo* $[0, 1]$ *e limitadas,* $(\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, *com a norma do sup é um espacço de Banach.*

**Exercício 4** *Seja $C([a,b],\mathbb{K})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$. $C([a,b],\mathbb{K})$ munido da função $\|u\|_p = \int_a^b |u(x)|^p \,\mathrm{d}x$ é um espaço normado mas não é completo. Suponha que $a=0$ e $b=1$ e consideremos a seqüência de funções $f_n \in C([a,b],\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ dada por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ -nx/2 + (n+2)/4 & se \quad 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/n \\ 0 & se \quad 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Note que $(f_n)$ é uma seqüência de Cauchy segundo a norma $\|\cdot\|_p$. Veja o que ocorre com $\|f_{n+1} - f_n\|_p$ quando $n \to \infty$. Suponhamos que existe uma função $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Note que neste caso temos*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} |f(t) + f_n(t)|^p \, dt = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2-1/n} |f(t) - 1|^p \, dt + \lim_{n\to\infty} \int_{1/2-1/n}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt = \\ &= \int_0^{1/2} |f(t) - 1|^p \, dt \end{aligned}$$

*pois*

$$0 \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2} |f(t) - f_n(t)|^p \, dt \leq \frac{1}{n} \left[ 1 + \sup_{t \in [0,1/2]} |f(t)| \right]^p \to 0$$

*Logo $f \equiv 1$ em $[0,1/2]$. Analogamente, podemos provar que $f \equiv 0$ em $[1/2,1]$. Portanto temos que $f$ não é contínua em $[0,1]$.*

**Exercício 5** *Prove que um espaço vetorial normado é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

**Exercício 6** *Seja $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ é contínua e para todo $\varepsilon > 0$ existe $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ compacto tal que $| f(t) | \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R} \backslash B_\varepsilon \}$. Prove que $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\| f \|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} | f(t) | \, .$$

**Exercício 7** *Prove que não existe produto interno em $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};$ $f$ é função contínua$\}$ tal que $\langle f, f \rangle = \| f \|_\infty^2$.*

**Exercício 8** *Sabemos que um subespaço $M$ de um espaço de Banach $E$ é também Banach se, e somente se, $M$ é fechado em $E$. Prove que o subespaço das funções polinomiais $P[0,1]$ com a norma $\| \cdot \|_\infty$ não é Banach. Para isto basta provar que $P[0,1]$ não é fechado em $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$. Qual é o fecho topológico do subespaço $P[0,1]$ em $(C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$? Note que se tomarmos $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$, temos que o fecho algébrico de $S$ denotado por $\langle S \rangle$ é $P[0,1]$ o qual é diferente do fecho topológico de $\langle S \rangle$.*

**Exercício 9** *Prove que o espaço* $\ell^p$ *com a norma* $\| \ x \ \|_p = \sqrt[p]{\sum | \ x_i \ |^p}$ *é completo e separável par todo* $p \in [1, +\infty)$. *Lembramos que um espaço métrico é dito separável quando possui um conjunto enumerável denso (O conjunto dos números reais é separável, uma vez que o conjunto dos racionais é enumerável e denso na reta).*

**Exercício 10** *Seja* $E$ *um espaço vetorial e* $M$ *um subespaço de* $E$. *Consideremos em* $E$ *a seguinte relação de equivalência:* $x \sim y$ *se, e somente se,* $x - y \in M$ *e denotemos por* $x + M$ *a classe de* $x$. *Sabemos que o conjunto destas classes de equivalências denotado por* $E/M$ *quando munido das operações naturais* $(x + M) + (y + M) = x + y + M$ *e* $\alpha(x + M) = \alpha x + M$ *é um espaço vetorial.*

1. *Prove que se* $E$ *é normado e* $M$ *é um subespaço fechado de* $E$ *então a função*
$$\| \ x + M \ \| = \inf_{y \in x+M} \| \ y \ \| = \inf_{v \in M} \| \ x + v \ \|$$
*define uma norma em* $E/M$.

2. *Prove que se* $E$ *é um espaço normado e separável então para todo subespaço fechado* $M$ *de* $E$, *o espaço quociente* $E/M$ *é separável.*

3. *Prove que se* $E$ *é um espaço de Banach então para todo subespaço fechado* $M$ *de* $E$, *o espaço quociente* $E/M$ *é Banach.*

**Exercício 11** *Prove que dados* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$ *com*
$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1.$$
*Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ *pertence ao espaço de Lebesgue* $L^p(\Omega)$ *e além disso vale*
$$\| \ f \ \|_{L^p} \leq \| \ f_1 \ \|_{L^{p_1}} \ldots \| \ f_k \ \|_{L^{p_k}} \ .$$
*Este resultado vale se* $p_1 = +\infty$ *?*

*Prove também que se* $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ *com* $1 \leq r \leq s \leq +\infty$, *então* $f \in L^\xi(\Omega)$ *para todo* $\xi \in [r, s]$ *e vale a inequação de interpolação*
$$\begin{aligned} \| \quad & f \ \|_{L^\xi} \leq \| \ f \ \|_{L^r}^{\alpha} \| \ f \ \|_{L^s}^{1-\alpha} \\ \text{onde } \frac{1}{\xi} \quad &= \quad \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{s}, \ \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

**Exercício 12** (1.5) *Nos três casos a seguir calcule a norma do funcional* $f$ *dado.*

1. $f(x) := \int_{-1}^{1} x(t) \ dt, \ x \in L^1[-1, 1]$;

2. $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k / k, \ x \in \ell^2$;

3. $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k / 2^{k+1}, \ x \in c_0$.

**Exercício 13** *Sejam $E, F, G$ espaços normados. Prove que se $A \in \mathfrak{L}(F,G)$ e $B \in \mathfrak{L}(E,F)$ então $AB := A \circ B \in \mathfrak{L}(E,G)$ e $\|AB\|_{\mathfrak{L}(E,G)} \leq \|A\|_{\mathfrak{L}(F,G)}\|B\|_{\mathfrak{L}(E,F)}$. Note que $\mathfrak{L}(E,E)$ com as operações usuais é uma álgebra não comutativa. Suponha que $(A_n) \subset \mathfrak{L}(F,G)$; $(B_n) \subset \mathfrak{L}(E,F)$ são tais que $\|A_n - A_0\|_{\mathfrak{L}(F,G)} \to 0$ e $\|B_n - B_0\|_{\mathfrak{L}(F,G)} \to 0$. Prove que $A_nB_n$ converge para $A_0B_0$ na norma do espaço $\mathfrak{L}(E,G)$.*