Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Regularidade de Soluções de Uma Classe de Problemas Elípticos Semi-lineares †

por

Rodrigo Genuino Clemente

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2011

João Pessoa - PB

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Regularidade de Soluções de Uma Classe de Problemas Elípticos Semi-lineares

por

Rodrigo Genuino Clemente

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira - UFC

Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla López - USACH

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2011

Agradecimentos

Aos meus pais João Clemente da Silva e Claudete Genuino Clemente e a minha irmã Raissa Genuino Clemente, por terem me ajudado tanto nesta caminhada. Vocês são meu porto seguro!

Aos professores do DM-UFPB: Uberlandio Batista Severo, Fágner Dias Araruna, Everaldo Souto de Medeiros, Eduardo Goncalves dos Santos, Antônio de Andrade e Silva, Flávia Jerônimo Barbosa, Antônio Sales da Silva e Jacqueline Rojas que me guiaram pelo caminho do conhecimento, meu agradecimento e em especial ao professor João Marcos Bezerra do Ó, por toda atenção e dedicação, as quais foram fundamentais para minha formação acadêmica.

Aos amigos que tornam o dia-a-dia no Milênio e na Sala do Mestrado mais alegres, forte abraço!

Dedicatória

Aos que acreditam no meu trabalho.

Resumo

Começamos estudamos soluções semi-estáveis para a equação $-\Delta u = f(u)$ em um domínio suave limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \leq 4$. O resultado apresentado é uma limitação L^∞ a qual vale para toda solução positiva semi-estável e toda não-linearidade f. Mostramos também uma abordagem sobre o caso $-\Delta u = f(u)$ na bola unitária do $\mathbb{R}^n$. Os resultados obtidos são estimativas em L^q e $W^{k,q}$ para soluções semi-estáveis radiais $u \in H_0^1$, a prova de uma limitação se $n \leq 9$ e, no caso em que g é crescente e convexa, $u \in W^{3,2}$ em toda dimensão n.

Abstract

We start studing semi-stable solutions for the equation $-\Delta u = f(u)$ in a smooth and bounded domain Ω of $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \leq 4$. The presented result is a L^∞ boundedness, which holds for all semi-stable positive solution and all non-linearity f. We also show a approach about the case $-\Delta u = f(u)$ in the unitary ball of $\mathbb{R}^n$. The results obtained are L^q and $W^{k,q}$ estimates for semi-stable radial solutions $u \in H_0^1$, the proof of a boundedness if $n \leq 9$ and, in case that g is increasing and convex, $u \in W^{3,2}$ in all dimension n.

Sumário

Introdução

Este trabalho é o resultado dos meus estudos com o professor Dr. João Marcos Bezerra do Ó para a dissertação de mestrado. Estudamos dois artigos, Regularity of Minimizers of Semilinear Elliptic Problems Up to Dimension Four, por Xavier Cabré, e Regularity of Radial Minimizers and Extremal Solutions of Semilinear Elliptic Equations, por Xavier Cabré e Antonio Capella.

Tive a preocupação de adicionar alguns resultados ao texto para facilitar a leitura. Muitos destes resultados são clássicos e podem ser encontrados em diversos livros.

Para uma boa compreensão deste texto, o leitor deve conhecer temas como Análise Funcional, Equações Diferenciais Parciais e algumas definições vistas em cursos de Geometria Diferencial. Além disso, ter paciência em verificar as contas feitas, que em muitos casos não são difíceis, mas trabalhosas. As referências deste texto citam bons livros sobre tais temas.

Usaremos alguns resultados constantemente. Entre eles, destaco Teoria de Regularidade Elíptica e Imersões em Espaços L^p e de Sobolev.

A primeira parte do texto trata-se de uma classe especial de soluções para a equação $-\Delta u = f(u)$ em um domínio suave limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \leq 4$. Esta classe é chamada de semi-estável, e engloba minimizantes locais, minimais e soluções extremais. O resultado obtido é uma limitação L^∞ a qual vale para toda solução positiva semi-estável e toda não-linearidade f. Em dimensões maiores, tal limitação é um problema em aberto.

Podemos destacar alguns teoremas que são de fundamental importância no primeiro capítulo. O Teorema de Sternberg-Zumbrun, por exemplo, desempenha papel importantíssimo para o desencadeamento das estimativas, pois ele funciona como uma tradução da condição de semi-estabilidade. Podemos destacar também uma desigualdade tipo Sobolev dada pelo teorema devido a Michael-Simon-Allard, que vale em uma hipersuperfície C^∞ imersa, compacta e sem fronteiras. Sem ela não conseguiríamos fazer uma estimativa imprescindível quando $n = 4$.

A segunda parte trata do caso $-\Delta u = g(u)$ na bola unitária do $\mathbb{R}^n$. Os resultados obtidos são estimativas em L^q e $W^{k,q}$ para soluções semi-estáveis radiais $u \in H_0^1$, a prova de uma limitação se $n \leq 9$ e, no caso em que g é crescente e convexa, $u \in W^{3,2}$ em toda dimensão n.

Na segunda seção, podemos destacar o artigo devido a Gidas-Ni-Nirenberg sobre simetria de soluções usando moving planes. Este artigo desempenha papel importante, já que a solução herda a simetria do domínio $\Omega = B_R$, ou seja, a solução que estamos trabalhando é radial. Em resumo, isto torna o problema de EDP em um problema de EDO.

Capítulo 1

O problema $-\Delta u = f(u)$

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^∞, F uma primitiva de f e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio C^∞. Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

e o funcional energia a ele relacionado

$$E(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u) \right\} \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

1.1 Minimizantes locais e semi-estabilidade

Definição 1.1.1 *Dizemos que uma função $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ é um minimizante local de (1.2) se existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$E(u) \leq E(u + \xi)$$

para toda $\xi \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|\xi\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \epsilon$.

Observação 1 *Por regularidade elíptica, segue que todo minimizante local u é uma solução clássica C^∞ de (1.1). De fato, observe que*

$$E'(u)v = 0, \ \forall v \in C_0^1(\overline{\Omega}),$$

pois

$$E'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{E(u+tv)-E(u)}{t} = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } t > 0. \\ \leq 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Devemos, portanto, ter que $E'(u) = 0$, *para toda* $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$. *Pela densidade de* C_0^1 *em* H_0^1 *e usando a continuidade de* $E'(u)$, *segue que vale* $E'(u) = 0$ *para toda* $v \in H_0^1(\Omega)$. *Logo,* u *é solução fraca de* (1.1). *Usando resultados de regularidade, veja os Teoremas 3.0.8 e 3.0.9, segue que u é uma solução clássica, como queríamos mostrar.*

Observação 2 *Podemos lembrar um resultado devido a Brezis e Nirenberg sobre minimizantes locais na topologia* C^1, *conhecido como* H^1 *versus* C^1. *Em resumo, se* f *satisfaz uma condição de crescimento, temos que o minimizante na topologia* C^1 *é de fato, um minimizante local para a topologia* H^1. *Este é um resultado aparentemente inesperado, já que uma vizinhança em* H^1 *é muito maior que em* C^1. *Para tornar nossas palavras mais precisas, enunciaremos abaixo este resultado.*

Teorema 1.1.2 (H^1 vs C^1 [04]) *Assuma que* f *satisfaça a condição de crescimento*

$$|f(x,u)| \leq C(1+|u|^p) \tag{1.3}$$

com $p \leq \frac{n+2}{n-2}$ *e seja* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *um minimizante local de* E *na topologia* C^1, *isto é, existe um* $r > 0$ *tal que*

$$E(u) \leq E(u+v), \text{ para toda } v \in C_0^1(\overline{\Omega}) \text{ com } \|v\|_{C^1} \leq r.$$

Então u_0 *é um minimizante local de* E *na topologia* H_0^1, *isto é, existe um* $\epsilon_0 > 0$ *tal que*

$$E(u) \leq E(u+v), \text{ para toda } v \in H_0^1(\overline{\Omega}) \text{ com } \|v\|_{H^1} \leq \epsilon_0.$$

Observação 3 *Mostramos acima que todo minimizante local é de fato uma solução clássica. Esta demonstração ficou imediata, devido a hipótese que* $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Podemos mostrar um resultado mais geral, quando f satisfaz a hipótese de crescimento (1.3)*, usando o Teorema H^1 vs C^1, pois se $u \in H_0^1(\Omega)$ é minimizante local na topologia C^1, segue do Teorema* 1.1.2 *que u é minimizante local na topologia H^1. Desta forma, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de* (1.1)*. Pelos Teoremas de regularidade, segue que u é de fato solução clássica.*

Definição 1.1.3 *Dizemos que uma solução clássica $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (1.1) é uma solução semi-estável se*

$$Q_u(\xi) := \int_\Omega \left\{ |\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \right\} \mathrm{d}x \geq 0, \tag{1.4}$$

para toda $\xi \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Observação 4 *A condição de semi-estabilidade de uma solução clássica u é equivalente a condição $\lambda_1 \geq 0$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(-\Delta - f'(u); \Omega)$ é o primeiro autovalor do operador linear $-\Delta - f'(u)$ em u em Ω, isto é, λ_1 é o primeiro autovalor do problema*

$$\begin{cases} -\Delta v - f'(u)v &= \lambda v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

O primeiro autovalor possui a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) = \inf_{\xi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega \{|\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2\} \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega \xi^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Portanto, $\lambda_1 \geq 0$ se e somente se $Q_u(\xi) \geq 0$.

Definição 1.1.4 *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. O funcional φ possui uma derivada de Gateaux $f \in X'$ em $u \in U$, se para cada $h \in X$ temos*

$$\lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle}{t} \right\} = 0.$$

A derivada de Gateaux em u é denotada por $\varphi'(u)$.

Observação 5 *Lembremos que a derivada de Gateaux é dada por*

$$\langle \varphi'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\varphi(u+th)-\varphi(u)}{t}\right\}.$$

Definição 1.1.5 *Seja $\varphi \in C^1(U,\mathbb{R})$. O funcional φ possui uma segunda derivada de Gateaux $L \in \mathcal{L}(X,X')$ em $u \in U$ se, para todo $h, v \in X$,*

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\langle \varphi'(u+th)-\varphi'(u)-Lth, v\rangle}{t}\right\}.$$

A segunda derivada de Gateaux em u é denotada por $\varphi''(u)$.

Observação 6 *Lembremos que a segunda derivada de Gateaux é dada por*

$$\langle \varphi''(u)h, v\rangle = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\langle \varphi'(u+th)-\varphi'(u), v\rangle}{t}\right\}.$$

Teorema 1.1.6 (Fórmula de Taylor em Espaços de Banach [07]) *Sejam V e W dois espaços de Banach e $f : V \to W$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em um aberto $O \subset V$. Então se $[u, u+h] \subset O$, temos*

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)h + \frac{1}{2}f''(u)(h,h) + R(h),$$

onde $R(h) \to 0$ quando $\|h\| \to 0$.

Observação 7 *Todo minimizante local é sempre semi-estável. De fato, existe $\epsilon > 0$ tal que $E(u) \leq E(u+h)$ para toda $h \in C_0^1(\overline{\Omega})$ com $\|h\|_{C_0^1(\overline{\Omega})} \leq \epsilon$. Desta forma, a fórmula de Taylor nos diz que*

$$E(u+h) = E(u) + E'(u)h + E''(u)(h,h) + R(h),$$

com $R(h) \to 0$ quando $\|h\| \to 0$. Observe agora que

$$E'(u)(h) = \lim_{\|h\|\to 0}\left\{\frac{E(u+h)-E(u)}{\|h\|}\right\} = 0.$$

Portanto, segue que

$$E''(u)(h,h) \geq 0.$$

Resta provarmos que $E''(u)(h,h) = Q_u(h)$. *De fato, observe que*

$$\begin{aligned}\langle E'(u), h\rangle &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{E(u+th)-E(u)}{t}\right\}\\ &= \lim_{t\to 0}\int\left\{\frac{2t\langle\nabla u,\nabla h\rangle + t^2|\nabla h|^2 - F(u+th)+F(u)}{t}\right\}\mathrm{d}x\\ &= \int\{\langle\nabla u,\nabla h\rangle - f(u)h\}\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\langle E''(u)h, v\rangle &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\langle E'(u+th)-E'(u), v\rangle}{t}\right\}\\ &= \lim_{t\to 0}\int\left\{\frac{t\langle\nabla h,\nabla v\rangle - f(u+th)v - f(u)v}{t}\right\}\mathrm{d}x\\ &= \int\{\langle\nabla h,\nabla v\rangle - f'(u)hv\}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Fazendo $v = h$, *obtemos o resultado desejado.*

1.2 O Teorema de Sternberg-Zumbrun

Iniciaremos esta seção fazendo um breve comentário sobre a medida de Hausdorff. Isto se faz necessário para uma melhor compreensão do Lema (1.2.1).

Lema 1.2.1 ([05]) *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Então, para toda função* $f : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *temos*

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\nabla f_{x_j}\right|^2\right) - |\nabla|\nabla f|| =$$

$$\begin{cases} |\nabla f|\left(\sum_{l=1}^{n-1}k_l^2\right) + |\nabla_L|\nabla f||^2, & \text{para todo } x\in\{|\nabla f|>0\}\cap U\\ 0, & \text{quase todo } x\in\{|\nabla f|=0\}.\end{cases}$$

Iremos concentrar agora nossa atenção para demonstrar a principal estimativa deste capítulo, o Teorema 1.4.1. Precisaremos de dois resultados importantíssimos.

O primeiro é o Teorema de Sternberg-Zumbrun e segue da hipótese de semi-estabilidade. O segundo é uma desigualdade de Sobolev devida a Michael-Simon-Allard, a qual vale em toda hipersuperfície compacta de $\mathbb{R}^{m+1}$ sem fronteira.

Lembremos que o Teorema da Função Implícita nos diz que cada superfície de nível $\{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : u(x) = t\} = \{u = t\}$ é uma hipersuperfície $(n-1)$-dimensional, quando $|\nabla u \neq 0|$. Em particular, estão bem definidos o gradiente tangencial (projeção ortogonal do gradiente no espaço tangente de $\{u = t\}$), como também suas curvaturas principais.

Observação 8 *O Teorema de Sard nos garante que o conjunto de valores críticos de uma função suave possui medida nula.*

Teorema 1.2.2 (Sternberg-Zumbrun [01]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado suave e u uma solução clássica semi-estável suave positiva de* (1.1)*. Então para toda função Lipschitz η em $\overline{\Omega}$ com $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$, temos*

$$\int_{\{\Omega \cap \{|\nabla u|>0\}\}} \left\{ \left(|\nabla_T |\nabla u||^2 + |A|^2 |\nabla u|^2 \right) \eta^2 \right\} \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{1.6}$$

onde ∇_T denota o gradiente Riemanniano ao longo de um conjunto de nível de u (é portanto a projeção ortogonal do gradiente em $\mathbb{R}^n$ ao longo de um conjunto de nível de u) e onde

$$|A|^2 = |A(x)|^2 = \sum_{l=1}^{n-1} \kappa_l^2,$$

sendo κ_l a curvatura principal do conjunto de nível de u passando por x, para um dado $x \in \Omega \cap \{|\nabla u| > 0\}$.

Prova: A condição de estabilidade

$$Q_u(\xi) := \int_\Omega \left\{ |\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \right\} \mathrm{d}x \geq 0, \forall \xi \in C_0^1(\overline{\Omega}) \tag{1.4}$$

também vale, por aproximação, para toda função Lipschitz ξ em $\overline{\Omega}$ com $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$. De fato, seja ξ uma função Lipschitziana em $\overline{\Omega}$ com $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Temos que $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Logo, $\xi \in H_0^1(\Omega)$. Assim, existe uma sequência $\xi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\xi_n \to \xi$ em $H_0^1(\Omega)$ e vale

$$Q_u(\xi_n) := \int_\Omega \left\{ |\nabla \xi_n|^2 - f'(u)\xi_n^2 \right\} \mathrm{d}x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, como u é solução clássica de (1.1), temos que $f'(u) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num compacto. Assim,

$$\int_\Omega f'(u)(\xi_n^2 - \xi^2)\,\mathrm{d}x \leq k \int_\Omega (\xi_n^2 - \xi^2)\,\mathrm{d}x \to 0$$

onde $k = \|f'(u)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$. Portanto, obtemos

$$Q_u(\xi) := \int_\Omega \left\{ |\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \right\} \mathrm{d}x \geq 0, \tag{1.7}$$

para toda ξ Lipschitziana em $\overline{\Omega}$ com $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Agora, tome $\xi = c\eta$ em (1.4), onde c é uma função suave e η é Lipschitz em $\overline{\Omega}$ e $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Note que ξ é Lipschitziana e $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$. De fato, observe que

$$|\xi(x) - \xi(y)| = |c(x)\eta(x) - c(y)\eta(y)| \leq \|c\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} |\eta(x) - \eta(y)| \leq \tilde{k}|x - y|,$$

para todo $x, y \in \overline{\Omega}$, pois η é Lipschitz. Por outro lado, como $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$, segue que $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Sabemos que u satisfaz a condição de semi-estabilidade (1.7). Assim, segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_u(c\eta) &= \int_\Omega \left\{ |\nabla(c\eta)|^2 - f'(u)(c\eta)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left\{ |\eta\nabla c + c\nabla\eta|^2 - f'(u)c^2\eta^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\eta\frac{\partial c}{\partial x_i} + c\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)^2 - f'(u)c^2\eta^2 \right\} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.8}$$

Por outro lado, observe que

$$\left(c\eta^2 \frac{\partial c}{\partial x_i} \right)_{x_i} = c\eta^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(\eta^2 \frac{\partial c}{\partial x_i} + 2c\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right). \tag{1.9}$$

e assim obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\eta\frac{\partial c}{\partial x_i}+c\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\eta^2\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)^2+2\eta c\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+c^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)^2\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{c^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)^2+\left(c\eta^2\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)_{x_i}-c\eta^2\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x_i^2}\right\}\\
&= c^2|\nabla\eta|^2-c\eta^2\Delta c+\sum_{i=1}^{n}\left(c\eta^2\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)_{x_i} \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Usando integral por partes, segue que

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(c\eta^2\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)_{x_i}\cdot 1\,\mathrm{d}x=0 \qquad (1.11)$$

Desta forma, usando (1.11) e (1.10), obtemos de (1.8) a desigualdade

$$\begin{aligned}
0\le Q_u(c\eta) &= \int_\Omega\left\{c^2|\nabla\eta|^2-c\eta^2\Delta c-f'(u)c^2\eta^2\right\}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega\left\{c^2|\nabla\eta|^2-(\Delta c+f'(u)c)\,c\eta^2\right\}\,\mathrm{d}x \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Para simplificar, iremos adotar a seguinte notação:

$$u_j=\partial_{x_j}u \text{ e } u_{ij}=\partial_{x_ix_j}u.$$

Diferentemente do que foi feito nos artigos [05, 06], onde foi tomado $c=|\nabla u|$ e feito considerações sobre o conjunto $\{|\nabla u|=0\}$, iremos fixar $\epsilon>0$ e tomar $c=\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}$.

Desta forma, não precisaremos nos preocupar com os pontos críticos de u e ainda garantimos a diferenciabilidade de c. Feito isto, desde que $\Delta u+f(u)=0$ em Ω, temos

$$\begin{aligned}
\Delta u_j+f'(u)u_j &= \sum_{i=1}^{n}\partial_{x_ix_i}(u_j)+f'(u)u_j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\partial_{x_j}(u_{x_ix_i}+f(u))\\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta u+f(u))=0. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Assim, verificamos que

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \cdot \sum_{j=1}^{n} 2u_j u_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j u_{ij}}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} &= \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_{ij}\right)_{x_i} \cdot \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} + \left(\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}\right)_{x_i} \sum_{j=1}^{n} u_j u_{ij}}{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \\
&= \frac{1}{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{n} u_{iij} u_j \right) \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} u_j u_{ij}\right)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Usando (1.13) obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta c &= \frac{1}{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \left\{ \sum_{i,j} u_{ij}^2 \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} - f'(u)|\nabla u|^2 \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} - \right. \\
&\left. - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\right)^2\right)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Portanto, segue

$$\begin{aligned}
(\Delta + f'(u))(c) &= \Delta c + f'(u)c = \Delta c + f'(u)\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \\
&= \frac{1}{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \left\{ -f'(u)|\nabla u|^2 \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} + \sum_{i,j} u_{ij} \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} - \right. \\
&\left. - \left(\sum_i \left(\sum_j u_{ij} u_j \right)^2 \right) \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \right\} + f'(u)\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \\
&= f'(u) \left[\frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} + \sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \left[\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_j^{n} u_{ij} \frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \right)^2 \right] \\
&= f'(u) \frac{\epsilon^2}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \left[\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_j^{n} u_{ij} \frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon^2}} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Usando as desigualdades (1.12) e (1.15) deduzimos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla u|^2+\epsilon^2)|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega c^2|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega (\Delta c + f'(u)c)c\eta^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f'(u)\epsilon^2\eta^2\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_\Omega \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i=1}^n\left(\sum_j^n u_{ij}\frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x. \qquad (1.16)\end{aligned}$$

O integrando na última integral é não-negativo, pois como

$$\frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}} < 1,$$

temos que

$$u_{ij}^2 \geq u_{ij}^2\frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i=1}^n\left(\sum_j^n u_{ij}\frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\geq \int_{\Omega\cap\{|\nabla u>0|\}} \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i}\left(\sum_j u_{ij}\frac{u_j}{\sqrt{|\nabla u|^2+\epsilon^2}}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\geq \int_{\Omega\cap\{|\nabla u>0|\}} \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i}\left(\sum_j u_{ij}\frac{u_j}{|\nabla u|}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x \qquad (1.17)\end{aligned}$$

Usando esta desigualdade juntamente com (1.16), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla u|^2+\epsilon^2)|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}x &\geq \int_\Omega f'(u)\epsilon^2\eta^2\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{\Omega\cap\{|\nabla u|>0\}} \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i}\left(\sum_j u_{ij}\frac{u_j}{|\nabla u|}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\epsilon \to 0$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2|\nabla\eta|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_{\Omega\cap\{|\nabla u>0|\}} \left\{\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_{i}\left(\sum_j u_{ij}\frac{u_j}{|\nabla u|}\right)^2\right\}\eta^2\,\mathrm{d}x.$$

Pelo Lema 1.2.1, sabemos que em todo ponto $x \in \Omega \cap \{|\nabla u| > 0\}$, vale

$$\sum_{i,j} u_{ij}^2 - \sum_i \left(\sum_j u_{ij} \frac{u_j}{|\nabla u|} \right)^2 = |\nabla_T |\nabla u||^2 + |A|^2 |\nabla u|^2$$

Segue, portanto a desigualdade

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 \, \mathrm{d}x \geq \int_{\{\Omega \cap \{|\nabla u| > 0\}\}} \left(|\nabla_T |\nabla u||^2 + |A|^2 |\nabla u|^2 \right) \eta^2 \, \mathrm{d}x,$$

como queriamos mostrar. ■

1.3 Uma desigualdade do tipo Sobolev

Teorema 1.3.1 (Michael, Simon e Allard [01], [08], [09]) *Seja $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ uma hipersuperfície C^∞ imersa m-dimensional compacta sem fronteira. Então, para todo $p \in [1, m)$, existe uma constante $C = C(m, p)$ tal que para toda função $v : M \to \mathbb{R}$, $C^\infty(M)$, vale*

$$\left(\int_M |v|^{p^*} dV \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C(m,p) \left(\int_M |\nabla v|^p + |Hv|^p dV \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde H é a curvatura média de M e $p^* = \frac{mp}{m-p}$.

Observação 9 *Note que a constante C não depende da variedade M considerada. Contudo, perceba que a geometria de M influencia a desigualdade, pois vemos que surge um termo com a curvatura média H de M.*

1.4 Limitação L^∞ próximo da fronteira

Estamos prontos para demonstrar a principal estimativa. Em dimensão $n \leq 4$, limitamos a norma $L^\infty(\Omega)$ para toda solução u semi-estável pela norma $W^{1,4}$ de u em $\{u < t\}$, onde t pode ser escolhido arbitrariamente.

Esta estimativa vale em qualquer domínio suave Ω (não necessariamente convexo) e para toda não-linearidade f. A importância desta limitação é que, escolhendo t pequeno, $\{u < t\}$ torna-se uma pequena vizinhança de $\partial\Omega$, e assim a limitação de u em Ω é reduzida a uma questão de regularidade de u próximo a $\partial\Omega$.

Teorema 1.4.1 ([01]) *Seja f uma função C^∞ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qualquer domínio C^∞ limitado. Assuma que $2 \leq n \leq 4$. Seja $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, com $u > 0$ em Ω um minimizante local de*

$$E(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u) \right\} \mathrm{d}x,$$

ou, mais geralmente, uma solução clássica semi-estável de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \ \text{em } \Omega \\ \quad u = 0 \ \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, para todo $t > 0$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq t + \frac{C}{t}|\Omega|^{\frac{4-n}{2n}} \left(\int_{\{u<t\}} |\nabla u|^4 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.18}$$

onde C é uma constante universal (em particular, independente de f, Ω e u). Na última integral usamos a notação $\{u < t\} = \{x \in \Omega : u(x) < t\}$.

Prova: Por regularidade elíptica, a solução $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. De fato, o Teorema 3.0.8 nos diz que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e o Teorema 3.0.9 nos permite fazer uma argumentação de bootstrap para concluirmos que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Relembre que $u > 0$ em Ω. Denote

$$T := \max_{\overline{\Omega}} u = \|u\|_\infty$$

e, para $s \in (0, T)$, defina

$$\Gamma_s := \{x \in \Omega : u(x) = s\}.$$

O Teorema de Sard nos garante que quase todo $s \in (0, T)$ é um valor regular de u. Por definição, se s é valor regular de u, então $|\nabla u(x)| > 0, \forall x \in \Omega$ tal que

$u(x) = s$, isto é, para todo $x \in \Gamma_s$. Em particular, se s é um valor regular, Γ_s é uma hipersuperfície compacta C^∞ imersa em $\mathbb{R}^n$ sem fronteira.

Desde que u é solução semi-estável, podemos usar o Teorema 1.2.2 com uma função teste

$$\eta(x) = \varphi(u(x)), \forall x \in \Omega,$$

onde φ é uma função Lipschitziana em $[0, T]$ com $\varphi(0) = 0$. Assim, observe que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 |\varphi'(u) \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^4 [\varphi'(u)]^2 \,\mathrm{d}x,$$

e usando a coarea na última integral acima, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^T \left(\int_{\Gamma_s} [\varphi'(u(x))]^2 |\nabla u|^3 dV_s \right) ds.$$

Como $u(x) = s$, para todo $x \in \Gamma_s$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 |\nabla \eta|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^T \left(\int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s \right) [\varphi'(s)]^2 ds. \tag{1.19}$$

Acima, estamos denotamos por dV_s o elemento de volume em Γ_s. A integral em ds é sobre os valores regulares de u, cujo complementar possui medida nula em (0,T). Usando o Teorema 1.2.2 em (1.19), obtemos

$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s \right) [\varphi'(s)]^2 ds \geq \int_{\{\Omega \cap \{|\nabla u| > \delta\}\}} \left(|\nabla_T |\nabla u||^2 + |A|^2 |\nabla u|^2 \right) [\varphi(u)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

Observe que no lado esquerdo da desigualdade do Teorema 1.2.2 nós integramos sobre $\Omega \cap \{|\nabla u| > 0\}$. Pela monotonicidade da integral, podemos integrar sobre $\Omega \cap \{|\nabla u| > \delta\}$ para $\delta > 0$ e portanto, a inequação permanece válida. Usaremos novamente a coarea na última integral acima para obtermos

$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s \right) [\varphi'(s)]^2 ds \geq$$
$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma_s \cap \{|\nabla u| > \delta\}} \frac{1}{|\nabla u|} \left(|\nabla_T |\nabla u||^2 + |A|^2 |\nabla u|^2 \right) dV_s \right) [\varphi(s)]^2 ds \tag{1.20}$$

Pudemos fazer isto desde que no conjunto $\Gamma_s \cap \{|\nabla u| > \delta\}$, $|\nabla u|$ é limitado longe do zero.

Agora, observe que

$$\frac{|\nabla_T |\nabla u||^2}{|\nabla u|} = 4 \left|\nabla_T |\nabla u|^{\frac{1}{2}}\right|^2.$$

De fato, temos que

$$\partial_{x_j} |\nabla u| = \partial_{x_j} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j} \right)$$

Logo,

$$\frac{|\nabla_T |\nabla u||^2}{|\nabla u|} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j}\right)^2}{|\nabla u|} = \frac{1}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j}\right)^2}{|\nabla u|^3}.$$

Por outro lado,

$$\partial_{x_j} |\nabla u|^{\frac{1}{2}} = \partial_{x_j} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{\frac{1}{4}-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j} \right)$$

e portanto,

$$4 \left|\nabla_T |\nabla u|^{\frac{1}{2}}\right|^2 = 4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{\left(\sum_{i=1}^n 2u_{x_i} u_{x_i x_j}\right)^2}{|\nabla u|^3}.$$

Assim, segue a igualdade afirmada acima. Voltando a (1.20), temos

$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s \right) [\varphi'(s)]^2 ds \geq$$
$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma_s \cap \{|\nabla u| > \delta\}} \left\{ 4|\nabla_T |\nabla u|^{\frac{1}{2}}|^2 + \left(|A||\nabla u|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\} dV_s \right) [\varphi(s)]^2 ds.$$

Fazendo $\delta \to 0$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\int_0^T h_1(s) [\varphi(s)]^2 ds \leq \int_0^T h_2(s) [\varphi'(s)]^2 ds, \tag{1.21}$$

para toda função Lipschitziana $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$, com $\varphi(0) = 0$, onde

$$h_1(s) := \int_{\Gamma_s} \left\{ 4|\nabla_T |\nabla u|^{\frac{1}{2}}|^2 + \left(|A||\nabla u|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\} dV_s \tag{1.22}$$

e

$$h_2(s) := \int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s,$$

para todo valor regular s de u.

É justamente de (1.21) que obteremos a estimativa L^∞ desejada. Em dimensão $n \leq 4$ usaremos a desigualdade de Sobolev do Teorema (1.3.1) com $M = \Gamma_s$, $p = 2$ e $v = |\nabla u|^{\frac{1}{2}}$. Note que a curvatura média H de Γ_s satisfaz $|H| \leq |A|$. Assim, dividiremos a demonstração em três casos. Será útil denotarmos

$$B_t := \frac{1}{2}\int_{\{u<t\}} |\nabla u|^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^t h_2(s)ds,$$

onde $t > 0$ é uma constante positiva como no enunciado do Teorema. Iremos começar com o caso $n = 4$. Observe que a dimensão de Γ_s é 3, logo a desigualdade de Sobolev dada pelo Teorema 1.3.1 nos dá que

$$\left(\int_{\Gamma_s} |\nabla u|^3 dV_s\right)^{\frac{1}{3}} \leq C(n)\left(\int_{\Gamma_s} |\nabla|\nabla u|^{\frac{1}{2}}|^2 + |H|\nabla u|^{\frac{1}{2}}|^2 dV_s\right)^{\frac{1}{2}},$$

de onde segue que

$$h_2^{\frac{1}{3}} \leq Ch_1, \text{ quase sempre em } (0, T), \tag{1.23}$$

onde C é uma constante universal.

Para cada valor regular s de u temos que $0 < h_2(s)$, pois $|\nabla u| > 0$ e $h_1(s) < \infty$, pois ∇u e A são contínuas e Γ_s é um conjunto compacto. Isto juntamente com (1.23) nos dá que $\frac{h_1}{h_2} \in (0, +\infty)$ quase sempre em $(0, T)$. Assim, definiremos

$$g_k(s) := \min\left\{k, \frac{h_1(s)}{h_2(s)}\right\}.$$

Para valores regulares s e para um inteiro positivo, temos que $g_k \in L^\infty(0, T)$ e que

$$g_k(s) \to \frac{h_1(s)}{h_2(s)} \in (0, +\infty), \text{ quando } k \to \infty, \text{ para quase todo } s \in (0, T), \tag{1.24}$$

pois basta tomar $k > \frac{h_1(s)}{h_2(s)}$.

Desde que $g_k \in L^\infty(0, T)$, a função

$$\varphi_k(s) := \begin{cases} \dfrac{s}{t} & \text{se } s \leq t, \\ \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_s^t \sqrt{g_k(\tau)}d\tau\right) & \text{se } t < s \leq T. \end{cases} \tag{1.25}$$

está bem definida, satisfaz $\varphi_k(0) = 0$ e é Lipschitziana em $[0, T]$. De fato temos que

$$\varphi_k'(s) := \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{se } 0 < s \leq t, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{g_k(s)}\varphi_k(s) & \text{se } t < s \leq T. \end{cases}$$

Assim, $\varphi_k \in W^{1,\infty}(0,T)$, pois φ é contínua em $[0,T]$, de onde segue que $\varphi \in L^\infty(0,T)$ e $\varphi_k' \in L^\infty(0,T)$, pois $\sqrt{g_k(s)} \in L^\infty(0,T)$. Portanto, basta mostrar que φ_k é localmente Lipschitziana em 0 e em T. Como $\varphi_k(s) = \frac{s}{t}$, numa vizinhança $[0, \epsilon)$, com $\epsilon < t$, temos que φ_k é linear, e portanto Lipschitziana. Já numa vizinhança $(T - \epsilon, T]$ de T, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} &\left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_s^t \sqrt{g_k(\tau)}d\tau\right) - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_r^t \sqrt{g_k(\tau)}d\tau\right)\right| \leq \\ &\leq \exp(\theta)\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\theta^t \sqrt{g_k(\tau)}d\tau \leq C\left|s-t\right|. \end{aligned}$$

Logo, φ_k é Lipschitziana numa vizinhança de T. Desta forma, como $[0,T]$ é compacto e φ_k é localmente Lipschitziana, segue que φ_k é Lipschitziana em $[0,T]$.

Além disso, note que como

$$\varphi_k'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{g_k(s)}\varphi_k(s) \quad \text{em (t,T).}$$

segue da definição de $g_k(s)$ que

$$h_2(\varphi_k')^2 = h_2\frac{1}{2}g_k\varphi_k^2 \leq \frac{1}{2}h_1\varphi_k^2 \quad \text{em (t,T).} \tag{1.26}$$

Agora, usando (1.21), com $\varphi = \varphi_k$ teremos

$$\int_0^t h_1\varphi_k^2 + \int_t^T h_1\varphi_k^2 \leq \int_0^t h_2(\varphi')_k^2 + \int_t^T h_2(\varphi')_k^2$$

e usando (1.26), uma vez que $\varphi_k'(s) = \frac{1}{t}$ em $(0,t)$, obtemos

$$\int_0^t h_1\varphi_k^2 + \int_t^T h_1\varphi_k^2 \leq \int_0^t \frac{h_2}{t^2} + \int_t^T h_1\frac{1}{2}(\varphi')_k^2.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\int_t^T h_1\varphi_k^2 \leq \int_0^t \frac{h_2}{t^2} - h_1\varphi_k^2,$$

e assim

$$\int_t^T h_1\varphi_k^2 \leq \frac{2}{t^2}\int_0^t h_2.$$

Além disso,

$$\frac{2}{t^2}\int_0^t h_2 = \frac{2}{t^2}\int_{\{u<t\}} |\nabla u|^4 \,\mathrm{d}x = 2B_t, \tag{1.27}$$

e assim

$$\int_t^T h_1\varphi_k^2 \leq 2B_t. \tag{1.28}$$

Note que para concluir a prova do presente teorema, precisamos obter algo como $T-t \leq CB_t^{1/2}$. Para tanto, usando (1.24) podemos escrever

$$T-t = \int_t^T ds = \sup_{k\geq 1}\int_t^T \sqrt[4]{\frac{h_2 g_k}{h_1}}ds. \tag{1.29}$$

Usando (1.27) e Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \int_t^T \sqrt[4]{\frac{h_2}{h_1}g_k}ds &= \int_t^T \left(\sqrt{h_1}\varphi_k\right)\left(\sqrt[4]{\frac{h_2}{h_1^3}g_k\frac{1}{\varphi_k}}\right)ds \\ &\leq \left\{\int_t^T h_1\varphi_k^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}.\left\{\int_t^T \sqrt{\frac{h_2 g_k}{h_1^3}\frac{1}{\varphi_k^2}}ds\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por (1.28) e pela estimativa (1.23) dada pela desigualdade de Michael-Simon-Allard, segue que

$$\begin{aligned} \int_t^T \sqrt[4]{\frac{h_2 g_k}{h_1}}ds &\leq (2B_t)^{\frac{1}{2}}\left\{\int_t^T \sqrt{\frac{h_2 g_k}{h_1^3}\frac{1}{\varphi_k^2}}ds\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (2B_t)^{\frac{1}{2}}\left\{C\int_t^T \sqrt{g_k}\frac{1}{\varphi_k^2}ds\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Agora, conseguimos limitar a última integral usando (1.25). Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \int_t^T \sqrt{g_k}\frac{1}{\varphi_k^2}ds &= \int_t^T \sqrt{g_k}\frac{1}{\varphi_k^2}\frac{\varphi_k'}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{g_k}\varphi_k}ds = \\ &= \sqrt{2}\int_t^T \frac{\varphi_k'}{\varphi_k^3}ds = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\varphi_k^{-2}(s)\right]_{s=T}^{s=t} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_k^{-2}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, segue de (1.30) que

$$\int_t^T \sqrt[4]{\frac{h_2 g_k}{h_1}} ds \leq (2B_t)^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = C(B_t)^{\frac{1}{2}}.$$

E assim de (1.29) obtemos

$$T - t \leq C(B_t)^{\frac{1}{2}},$$

de onde segue o resultado em dimensão 4:

$$T \leq t + \frac{1}{t}\left(\int_{\{u<t\}} |\nabla u|^4 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos agora tratar dos casos $n = 3$ e $n = 2$: Nestas dimensões tomaremos uma função teste φ mais simples que em dimensão 4. Iremos simplesmente considerar

$$\varphi(s) := \begin{cases} \dfrac{s}{t} \text{ se } s \leq t, \\ 1 \text{ se } t < s \leq T. \end{cases} \tag{1.31}$$

Observe que φ está bem definida, é Lipschitziana em $[0, T]$ e satisfaz $\varphi(0) = 0$. Com esta escolha de φ e desde que, pela própria definição,

$$h_1(s) \geq \int_{\Gamma_s} |A|^2 |\nabla u| dV_s$$

a desigualdade (1.21) nos dá

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_{\Gamma_s} |A|^2 |\nabla u| dV_s ds &\leq \int_0^T h_1(s) \left[\varphi(s)\right]^2 ds \leq \int_0^T h_2(s) \left[\varphi'(s)\right]^2 ds = \\ &= \int_0^t h_2(s) \frac{1}{t^2} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t h_2(s) = \\ &= \frac{1}{t^2} \int_{\{u<t\}} |\nabla u|^4 \, \mathrm{d}x = B_t. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Esta desigualdade vale para toda dimensão n. Porém, usaremos agora uma desigualdade geométrica para a curva Γ_s $(n = 2)$ ou para a superfície Γ_s $(n = 3)$. Esta desigualdade vale para toda dimensão $n \geq 2$ e é dada por

$$|\Gamma_s|^{\frac{n-2}{n-1}} \leq C(n) \int_{\Gamma_s} |H| dV_s. \tag{1.33}$$

Usaremos também a desigualdade isoperimétrica

$$V(s) := |\{u > s\}| \leq C(n)|\Gamma_s|^{\frac{n}{n-1}}. \tag{1.34}$$

Juntando estas duas desigualdades geométricas obtemos

$$[V(s)]^{\frac{n-2}{n}} \leq \left[C(n)|\Gamma_s|^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-2}{n}} = C(n)|\Gamma_s|^{\frac{n-2}{n-1}} \leq C(n)\int_{\Gamma_s}|H|dV_s. \tag{1.35}$$

Como $|H| \leq |A|$ e ∇u não se anula nos valores regulares s, segue

$$C(n)\int_{\Gamma_s}|H|dV_s \quad \leq \quad C(n)\int_{\Gamma_s}|A|dV_s = C(n)\int_{\Gamma_s}|A|\frac{\sqrt{|\nabla u|}}{\sqrt{|\nabla u|}}dV_s.$$

Usando agora Cauchy-Schwarz, obtemos

$$C(n)\int_{\Gamma_s}|A|\frac{\sqrt{|\nabla u|}}{\sqrt{|\nabla u|}}dV_s \leq C(n)\left\{\int_{\Gamma_s}|A|^2|\nabla u|dV_s\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\Gamma_s}\frac{dV_s}{|\nabla u|}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.36}$$

para todo valor regular s. Observe que

$$T - t \quad = \quad \int_t^T ds = \int_t^T V(s)^{\frac{n-2}{n}}V(s)^{\frac{2-n}{n}}ds.$$

Agora, usando (1.36) e (1.35) segue

$$T - t \leq \int_t^T C(n)\left\{\int_{\Gamma_s}|A|^2|\nabla u|dV_s\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}}\int_{\Gamma_s}\frac{dV_s}{|\nabla u|}\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$T - t \leq C(n)\left\{\int_t^T\int_{\Gamma_s}|A|^2|\nabla u|dV_s ds\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_t^T V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}}\int_{\Gamma_s}\frac{dV_s}{|\nabla u|}ds\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

E por (1.32) obtemos

$$T - t \leq C(n)B_t^{\frac{1}{2}}\left\{\int_t^T V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}}\int_{\Gamma_s}\frac{dV_s}{|\nabla u|}ds\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.37}$$

Desde que $V(s) = |\{u > s\}|$ é uma função não-crescente, segue que V é diferenciável quase sempre e usando a coarea, obtemos

$$-V'(s) = \int_{\Gamma_s}\frac{dV_s}{|\nabla u|}, \text{ para quase todo } s \in (0, T).$$

Além disso, para $n \leq 3$, $V(s)^{\frac{4-n}{n}}$ é não-crescente em s e assim, sua variação total satisfaz

$$\begin{aligned}
|\Omega|^{\frac{4-n}{n}} &\geq V(t)^{\frac{4-n}{n}} = \left[V(s)^{\frac{4-n}{n}}\right]_{s=T}^{s=t} \geq \\
&\geq \int_t^T \frac{4-n}{n} V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}} (-V'(s))ds = \\
&= \frac{4-n}{n} \int_t^T V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}} \int_{\Gamma_s} \frac{dV_s}{|\nabla u|} ds.
\end{aligned}$$

Juntando a equação acima com (1.37), segue que

$$T - t \leq C(n) B_t^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{4-n}{2n}}, \text{ para } n \leq 3.$$

$\blacksquare$

Observação 10 *Note que este argumento falha para $n \geq 4$ desde que a integral em (1.37)*

$$\int_t^T V(s)^{\frac{2(2-n)}{n}} (-V'(s))ds = \int_0^{V(t)} \frac{\mathrm{d}r}{r^{\frac{2(n-2)}{n}}}, \tag{1.38}$$

não é convergente em $s = T$ (isto é, $r = 0$) pois $\frac{2(n-2)}{n} \geq 1$.

1.5 Consequências da limitação

Iremos agora demonstrar a principal estimativa desta seção. Esta seguirá imediatamente da estimativa L^∞ para soluções semi-estáveis obtida na seção anterior.

Teorema 1.5.1 ([01]) *Dados f uma função C^∞, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio C^∞ limitado, $2 \leq n \leq 4$ e u uma solução semi-estável de* (1.1) *satisfazendo*

$$u(x) \geq c_3 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \quad \textit{para todo} \quad x \in \Omega \tag{1.39}$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq c_4 \tag{1.40}$$

onde

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$$

para constantes positivas ϵ*,* c_3 *e* c_4*. Então,*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\Omega, \epsilon, c_3, c_4, \|f\|_{L^\infty([0,c_4])}\right),$$

onde $C(\cdot)$ *é uma constante dependendo apenas das quantidades entre parênteses.*

Prova: Tomando ϵ suficientemente pequeno, podemos supor que Ω_δ é C^∞ para todo $0 < \delta < \epsilon$. Usaremos agora o Teorema 1.4.1 com a escolha

$$t = c_3 \frac{\epsilon}{2}.$$

Por (1.39), temos

$$\{x \in \Omega : u(x) < t\} \subset \Omega_{\epsilon/2},$$

pois neste caso temos

$$c_3 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq u(x) < c_3 \frac{\epsilon}{2},$$

de portanto

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sendo assim, é suficiente limitar $\|u\|_{W^{1,4}}(\Omega_{\frac{\epsilon}{2}})$. Observe que u é solução de $-\Delta u = f(u)$ em Ω_ϵ e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Por outro lado, $\partial\Omega \cup \Omega_{\frac{\epsilon}{2}}$ possui fecho compacto contido em $\partial\Omega \cup \Omega_\epsilon$ e ambos conjuntos são C^∞. Assim, usando o Teorema 3.0.13, obtemos que

$$u \in W^{2,2}(\Omega_{\frac{\epsilon}{2}})$$

e que

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega_{\frac{\epsilon}{2}})} \leq C(c_4, \|f\|_{L^\infty([0,c_4])}),$$

pois, por (1.40),

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_4$$

e portanto,

$$\|f(u)\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^\infty([0,c_4])}.$$

Além disso, pelos Teoremas 3.0.14 e 3.0.15 temos que

$$u \in W^{1,4}(\Omega_{\frac{\epsilon}{2}}).$$

Pela estimativa (1.18), segue o resultado desejado. ∎

Teorema 1.5.2 ([01], [10], [11]) *Seja f uma função localmente Lipschitziana e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio C^∞ limitado. Seja u uma solução clássica positiva de* (1.1). *Se Ω é convexo, então existem constantes positivas ρ e γ dependendo apenas de Ω tal que para todo $x \in \Omega$ com $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \rho$, existe um conjunto I_x com as seguintes propriedades:*

$$|I_x| \geq \gamma \text{ e } u(x) \leq u(y) \text{ para todo } y \in I_x. \tag{1.41}$$

Como consequencia,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_{L^1(\Omega)}, \text{ onde } \Omega_\rho = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \rho\}. \tag{1.42}$$

Se Ω não é convexo mas $n = 2$ e $f \geq 0$, então (1.42) *também vale para constantes ρ e γ apenas dependentes de Ω.*

Prova: De fato, aqui devemos aplicar alguns resultados obtidos por Gidas-Ni-Nirenberg, que diz que se Ω é convexo, então existe um $t_0 > 0$ tal que $u(x - tn(x))$ é não-decrescente para valores de $t \in [0, t_0]$ e para $x \in \partial\Omega$. Estamos denotando por $n(x)$ o vetor normal unitário apontando para fora em $x \in \partial\Omega$. Ainda pelo resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, existe $\alpha > 0$, que depende exclusivamente da região convexa, tal que

$$u(x - tv) \text{ é não-decrescente para } t \in [0, t_0] \text{ e}$$
$$v \in \mathbb{R}^n \text{ satisfazendo } \|v\| = 1 \text{ e } \langle v, n(x) \rangle \geq \alpha.$$

Conseguimos assim um cone C_x limitado centrado em x. Considere h a altura do cone C_x. Tome $\rho = \frac{h}{2}$. Queremos obter um conjunto I_x com as propriedades de (1.41). Assim, dado $x \in \Omega_\rho$, temos que $x \in C_z$, para algum $z \in \partial\Omega$. Considere o hiperplano H que passa por x e é paralelo a base do cone. Tome I_x a região entre a base do cone e o hiperplano H. O fato de que $u(x - tv)$ é não-decrescente em t para x, t e v como acima nos dá que existe números positivos γ e ρ tal que

$$|I_x| \geq \gamma \text{ e } u(x) \leq u(y) \text{ para todo } y \in I_x,$$

como queríamos. Como consequência, observe que se $x \in \Omega_\rho$

$$\gamma u(x) \leq |I_x| = \int_{I_x} u(x)\,\mathrm{d}y$$

e daí, pela hipótese (1.41),

$$\gamma u(x) \leq \int I_x u(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_\Omega u(y)\,\mathrm{d}y,$$

para todo $x \in \Omega_\rho$. Portanto,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq \frac{1}{\gamma}\int_\Omega u(y)\,\mathrm{d}y.$$

■

A partir de agora, denotaremos a distância de um ponto $x \in \Omega$ até o conjunto $\partial\Omega$ por $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = \delta(x)$.

Lema 1.5.3 ([12]) *Seja v a solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = h(x) \text{ em } \Omega \\ \quad v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h \in L^\infty(\Omega)$, $h \geq 0$. Então

$$\frac{v(x)}{\delta(x)} \geq c\int_\Omega h(x)\delta(x), \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{1.43}$$

onde $c > 0$ é uma constante dependendo apenas de Ω.

Prova: Iremos dividir a prova em duas etapas. Mostraremos inicialmente que para qualquer compacto $K \subset \Omega$ vale

$$v(x) \geq c \int_\Omega h(x)\delta(x),$$

onde $c > 0$ depende apenas de K e de Ω. Sendo assim, seja $\rho = \frac{\operatorname{dist}(K, \partial\Omega)}{2}$ e tome m bolas de raio ρ tal que

$$K \subset B_\rho(x_1) \subset ... \subset B_\rho(x_m) \subset \Omega.$$

Seja $\xi_1, ..., \xi_m$ as soluções de

$$\begin{cases} -\Delta\xi_i = \chi_{B_\rho(x_i)} \text{ em } \Omega \\ \xi_i = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tais soluções ξ_i existem devido ao Teorema de Representação de Riesz-Fréchet. Agora, usando o lema da fronteira de Hopf, temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\xi_i(x) \geq c\delta(x), \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e } i = 1, ..., m. \tag{1.44}$$

De fato, observe que se $x_0 \in \partial\Omega$,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

Desta forma,

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta}(x_0) \leq \delta_0 < 0, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega$$

pois ξ_i é C^1 e $\partial\Omega$ é compacto. Escrevendo

$$\lim_{t \to 0} \frac{\xi_i(x_0) - \xi_i(x)}{\|x - x_0\|} \leq \delta_0$$

e portanto,

$$\xi_i(x) \geq -\delta_0\delta(x) = c\delta(x)$$

para todo x próximo de x_0. Basta agora obter (1.44) para x longe da fronteira, digamos, em $K_{\epsilon_0} := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon_0\}$. Para tanto, sabemos que

$$\xi_i(x) > \delta_1 > 0 \text{ em } \Omega,$$

de onde concluímos que

$$\xi_i(x) \geq \delta_1 > \delta_1 \frac{\delta(x)}{\max_{K_{\epsilon_0}} \delta(x)} = c\delta(x).$$

Daqui até o final da demonstração c denota várias constantes que dependem apenas de K e Ω. Seja $x \in K$ e tome a bola $B_\rho(x_i)$ contendo x. Desde que $-\Delta v \geq 0$ em Ω temos que

$$v(x) \geq (v_{x,\rho}) = c \int_{B_{\rho(x)}} v(y)\ \mathrm{d}y.$$

Usando integral por partes, segue

$$c \int_{B_\rho(x_i)} v(y)\ \mathrm{d}y = c \int_\Omega v(y)(-\Delta \xi_i)\ \mathrm{d}y = c \int_\Omega h(y)\xi_i(y)\, \mathrm{d}y.$$

Por (1.44), segue que

$$v(x) \geq c \int_\Omega h(y)\delta(y)\ \mathrm{d}y.$$

Para finalizar a prova, fixe $K \subset \Omega$. Precisamos mostrar que vale (1.43) para $x \in \Omega \setminus K$. Seja w a solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 \text{ em } \Omega \setminus K \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \\ w = 1 \text{ sobre } \partial K. \end{cases}$$

Pelo lema da fronteira de Hopf,

$$w(x) \geq c\delta(x), \forall x \in \Omega \setminus K.$$

Afirmamos que

$$v(x) \geq w(x) \int_\Omega h(y)\delta(y)\ \mathrm{d}y \text{ em } \Omega \setminus K.$$

De fato, defina

$$\tilde{w}(x) = w(x) \int_\Omega h(y)\delta(y)\, dy. \tag{1.45}$$

Observe que $\tilde{w}$ é harmônica, pois w é harmônica. Assim,

$$-\Delta v \geq -\Delta \tilde{w} \tag{1.46}$$

pois $h \geq 0$. Como $\tilde{w} = v = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue do princípio do máximo que

$$v(x) \geq \tilde{w}(x) = w(x) \int_\Omega h(y)\delta(y)\, dy \tag{1.47}$$

Portanto,

$$v(x) \geq w(x)c \left(\int_\Omega h\delta \right) \geq c\delta(x) \left(\int_\Omega h\delta \right), \forall x \in \Omega \setminus K.$$

∎

Teorema 1.5.4 ([01]) *Seja f uma função C^∞ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado C^∞. Assuma $2 \leq n \leq 4$ e que Ω é convexo nos casos $n = \{3, 4\}$. Seja $u \in L^1(\Omega)$ uma solução fraca positiva de (1.1) e suponha que u é o limite em L^1 de uma sequencia de soluções clássicas positivas semi-estáveis de* (1.1) *Temos que*

1. *Se $f \geq 0$ em $[0, +\infty)$, então $u \in L^\infty(\Omega)$.*

2. *Assuma que $f(s) \geq c_1 > 0$ e $f(s) \geq \mu s - c_2$, $\forall s \in [0, +\infty)$, para algumas constantes positivas c_1 e c_2 e para algum $\mu > \lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de Dirichlet do $-\Delta$ em Ω. Então*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega, \mu, c_1, c_2, \|f\|_{L^\infty[0,\overline{C}(\Omega,\mu,c_2)]}).$$

Prova: Iniciamente, iremos fixar uma notação. Para uma função $v : \Omega \to \mathbb{R}$, denotaremos por $\|v\|_{L^1_\delta(\Omega)} = \|v\delta\|_{L^1(\Omega)}$. Agora, seja (u_k) uma sequência de soluções clássicas positivas semi-estáveis tal que $u_k \to u$ em $L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.5.2, obtemos

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq \frac{1}{\gamma} \|u_k\|_{L^1(\Omega)} \to \frac{1}{\gamma} \|u\|_{L^1(\Omega)}. \tag{1.48}$$

Desde que $f \geq 0$, usamos a estimativa dada pelo Lema 1.5.3 para a equação

$$\begin{cases} -\Delta u_k = h_k(x) := f(u_k(x)) \geq 0 \text{ em } \Omega \\ u_k = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.49}$$

Assim,

$$\frac{u_k}{\delta} \geq c \, \|f(u_k)\|_{L^1_\delta(\Omega)} \text{ em } \Omega. \tag{1.50}$$

Agora, multiplicando o problema (1.49) pelo primeiro autovalor de Dirichlet de $-\Delta$ em Ω ϕ e integrando duas vezes por partes, obtemos

$$-\int_\Omega u_k(y)\lambda_1\phi_1(y) \text{ d}y = \int_\Omega f(u_k(y))\phi_1(y) \text{ d}y.$$

Desta forma, deduzimos que $\|u_k\|_{L^1_\delta(\Omega)}$ e $\|f(u_k)\|_{L^1_\delta}(\Omega)$ são comparáveis por constantes multiplicativas dependendo apenas de Ω. De fato, observe que se $x \in \Omega$, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\delta(x) = \|x - x_0\|$. Daí, o teorema do valor médio nos dá

$$|\phi_1(x)| = |\phi_1(x) - \phi_1(x_0)| \leq C\delta(x).$$

Assim,

$$\lambda_1 \int_\Omega u_k(y)\delta(y) \text{ d}y \geq \lambda_1 \int_\Omega u_k(y)\phi_1(y) \text{ d}y.$$

Por outro lado, observe que

$$\int_\Omega \frac{u_k(y)}{\delta(y)}\delta(y)\lambda_1\phi_1 \text{ d}y = \lambda_1 \int_\Omega u_k(y)\phi_1(y) \text{ d}y$$

e usando (1.50) obtemos

$$\lambda_1 \int_\Omega u_k(y)\phi_1(y) \text{ d}y \geq \|f(u_k)\|_{L^1_\delta(\Omega)} \int_\Omega c\delta(y)\lambda_1\phi_1(y) \text{ d}y$$

De onde concluimos o que afirmamos. Agora, multiplicando (1.1) por w solução de

$$\begin{cases} -\Delta w = 1 \text{ em } \Omega \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e integrando novamente por partes duas vezes, deduzimos que

$$-\int_{\Omega} u_k = \int_{\Omega} f(u_k)w.$$

Logo, $\|u_k\|_{L^1(\Omega)}$ é comparável as duas quantidades anteriores. Relembremos que $\|u_k\|_{L^1(\Omega)} \to \|u\|_{L^1(\Omega)} > 0$. Portanto, obtemos uma limitação inferior para a parcela a direita de (1.50) por uma constante positiva independente de k, ou seja,

$$\frac{u_k}{\delta} \geq c\,\|f(u_k)\|_{L^1_\delta(\Omega)} \geq \tilde{c}.$$

Como consequencia desta limitação inferior e de (1.48), podemos usar o Teorema 1.5.1 para obtermos $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{c}$. Agora, fazemos $k \to \infty$ e portanto, $u \in L^\infty(\Omega)$, como afirmamos na parte (1). Para provar 2, assuma que $f \geq c_1 > 0$, temos que

$$u_k \geq c_1 w \geq c_1 c\delta = c_1 c \operatorname{dist}(\cdot, \partial\Omega),$$

onde w é a solução de (1.5). Agora, multiplicando (1.1_{u_k}) pela primeira autofunção de Dirichlet de $-\Delta$ em Ω e integramos por partes duas vezes e assim, como $f(s) \geq \mu s - c_2$, $\forall s$ e $\mu > \lambda_1$, obtemos

$$\|u_k\|_{L^1_\delta(\Omega)} \leq \overline{C}(\Omega, \mu, c_2)$$

e assim também para $\|u_k\|_{L^1(\Omega)}$ como feito anteriormente. Agora esta estimativa combinada com (1.48) nos dá uma estimativa como (1.40). Pelo Teorema 1.5.1 obtemos a limitação desejada.

■

1.6 A solução extremal

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda g}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, $n \geq 2$, $\lambda > 0$ e a não-linearidade $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$g \in C^1, \text{ não-decrescente}, g(0) > 0 \text{ e } \lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty.$$

É bem conhecido que existe um parâmetro extremal $\lambda^* \in (0, +\infty)$ tal que se $0 \leq \lambda < \lambda^*$ então o problema $(P_{\lambda g})$ admite uma solução minimal clássica u_λ. Além disso, u_λ é semi-estável. De outra forma, se $\lambda > \lambda^*$ então $(P_{\lambda g})$ não possui solução clássica. Aqui clássica significa limitada, enquanto minimal significa o menor. Além disso, o conjunto

$$\{u_\lambda : 0 \leq \lambda < \lambda^*\} \tag{1.51}$$

é crescente em λ e seu limite quando $\lambda \nearrow \lambda^*$ é uma solução fraca $u^* = u_{\lambda^*}$ de $(P_{\lambda^* g})$, chamada solução extremal de $(P_{\lambda g})$ no seguinte sentido. Diremos que $u \in L^1(\Omega)$ é uma solução fraca de $(P_{\lambda g})$ se

$$\lambda g(u) \mathrm{dist}(\cdot, \partial\Omega) \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega u\Delta\xi + \lambda g(u)\xi \, \mathrm{d}x = 0,$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\xi \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Vejamos alguns exemplos:

1. Tome $g(u) = e^u$. É conhecido que $u^* \in L^\infty(\Omega)$ se $n \leq 9$ (para todo Ω), enquanto $u^*(x) = -2 \log |u|$ se $n \geq 10$ e $\Omega = B_1$.

2. Um resultado similar acontece se tomarmos $g(u) = (1 + u)^p$ com $p > 1$.

Enunciaremos e demonstraremos de maneira precisa o que comentamos acima sobre o parametro extremal e solução extremal.

Teorema 1.6.1 ([03]) *Assuma que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um domínio suave e* $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função* C^1*, não-decrescente,* $g(0) > 0$ *e* $\lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty$*. Então existe um parametro* $0 < \lambda^* < \infty$ *tal que:*

1. *Se $\lambda > \lambda^*$, então não existe solução clássica de $(P_{\lambda g})$.*

2. *Se $0 \leq \lambda < \lambda^*$, então existe uma solução minimal clássica u_λ de $(P_{\lambda g})$. Temos também que $u_\lambda < u_\mu$ se $\lambda < \mu < \lambda^*$. Além disso, u_λ é semi-estável, isto é, o primeiro autovalor de Dirichlet do operador linearizado em u_λ é não-negativo.*

3. *$u^* = \lim\limits_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda$ é uma solução fraca de $(P_{\lambda^* g})$. Além disso, u^* é semi-estável.*

Prova: Inicialmente, mostraremos que o conjunto (1.51) é não vazio. Note que do fato de $f(0) > 0$, temos que $\underline{u} = 0$ é subsolução de $(P_{\lambda g})$, para todo $\lambda > 0$. Agora, observe que a solução $\overline{u}$ de

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} &= 1 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \overline{u} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.52}$$

é uma supersolução de $(P_{\lambda g})$ para $\lambda g(\max \overline{u}) < 1$. De fato, temos que

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \cdot \nabla v = \int_\Omega v \geq \int_\Omega \lambda g(u) v.$$

Pelo Teorema de Sub e Supersolução, existe uma solução clássica u_λ, como queríamos. Agora, mostraremos que não existe solução para λ grande. Assim, denote por λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e por φ_1 uma autofunção correspondente. Como g é superlinear e $g > 0$ em $[0, +\infty)$, temos que

$$\lambda g(u) > \lambda_1 u,$$

com λ suficientemente grande. Suponha agora, com o objetivo de contradição, que u seja solução de $(P_{\lambda g})$. Multiplicando por φ_1 e integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega -\Delta u \varphi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \lambda g(u)\varphi_1 > \lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 \, \mathrm{d}x,$$

e assim, obtemos uma contradição. Portanto, o parâmetro extremal λ^* é obtido tomando o supremo de todos os $\lambda > 0$ tal que $(P_{\lambda g})$ admite solução clássica.

Iremos agora demonstrarmos o item (2). Se $\lambda < \lambda^*$ existe μ tal que $\lambda < \mu < \lambda^*$ e assim, $(P_{\mu g})$ admite solução clássica u. Note que, u é supersolução de $(P_{\lambda g})$. Usando iteração monótona, u_λ é o limite não-decrescente de u^m, onde $-\Delta u^m = \lambda f(u^{m-1})$ com condição de Dirichlet e $u^0 = 0$. Assim, temos que

$$0 \leq u^m \leq u^{m+1} \leq u.$$

Logo, existe uma solução clássica u_λ com $u_\lambda \leq u$. Note que este processo independe da escolha da supersolução u. Isto implica que u_λ é menor que qualquer supersolução clássica de $(P_{\lambda g})$. Portanto, u_λ é minimal e em particular, $u_\lambda \leq u_\mu$. Agora, para mostrar que u_λ é semi-estável, observe que o funcional energia de $(P_{\lambda g})$ é dado por

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u)\,\mathrm{d}x,$$

onde $F' = \lambda f$, atinge seu mínimo no fechado convexo

$$F = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : 0 \leq v \leq u_\lambda \right\}.$$

Como mostrado no começo do capítulo, se olharmos a primeira e a segunda variações de energia, obtemos que u é semi-estável. Além disso, $u \leq u_\lambda$. Porém u_λ é minimal, ou seja, devemos ter $u = u_\lambda$. Portanto u_λ é semi-estável.

Nos resta provar o item (3). Seja λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ e $\varphi_1 > 0$ uma autofunção correspondente. Por g ser superlinear, existe $C > 0$ tal que

$$g(u) \geq \frac{2\lambda_1}{\lambda^*} u - C$$

para todo $u \geq 0$. Multiplicando a equação $(P_{\lambda g})$ para u_λ $(\lambda < \lambda^*)$ por φ_1 e integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\lambda \int_\Omega g(u_\lambda)\varphi_1\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega u_\lambda \varphi_1\,\mathrm{d}x \leq \frac{\lambda^*}{2} \int_\Omega \left(g(u_\lambda) + C\right)\varphi_1\,\mathrm{d}x.$$

Como f é não-decrescente, temos que $f(u_\lambda)\varphi_1$, e portanto $f(u_\lambda)\delta$, são não decrescentes em λ e limitadas em $L^1(\Omega)$. Considere agora $\overline{u}$ solução de (1.52).

Observe que

$$\overline{u}(x) \leq C\delta(x),$$

para todo $x \in \Omega$. De fato, seja $x \in \Omega$. Como $\partial\Omega$ é fechado, segue que existe $a \in \partial\Omega$ tal que

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = \|x - a\|.$$

Assim, pela convexidade de Ω, podemos usar o Teorema do valor médio e obter

$$\|\overline{u}(x)\| = \|\overline{u}(x) - \overline{u}(a)\| \leq |D\overline{u}(c)| \, \|x - a\| = |D\overline{u}(c)| \, \delta(x).$$

Usando a compacidade de $\overline{\Omega}$ e a continuidade de $D\overline{u}$ segue que existe

$$C = \max_{\overline{\Omega}} D\overline{u}.$$

Portanto, segue que $u(x) \leq C\delta(x)$, $\forall x \in \Omega$. Agora, multiplicando $(P_{\lambda g})$ por $\overline{u}$ e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega u_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega f(u_\lambda(x))\overline{u}(x)\,\mathrm{d}x \leq C\lambda \int_\Omega f(u_\lambda(x))\delta(x)\,\mathrm{d}x \leq \tilde{C}.$$

Assim, u_λ e $\lambda f(u_\lambda)\delta$ são crescentes em λ e limitadas em $L^1(\Omega)$. Agora, pelo Teorema da convergência monótona, existe o limite $u^* \in L^1(\Omega)$ e por continuidade do funcional energia segue que u^* é solução fraca de $(P_{\lambda^* g})$. Por fim, devemos mostrar que u^* é semi-estável. De fato, para $\lambda < \lambda^*$ temos que u_λ é semi-estável, isto é,

$$\int_\Omega \lambda f'(u_\lambda)\xi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla\xi|^2\,\mathrm{d}x, \text{ para toda } \xi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $f' \geq 0$, o lema de Fatou nos dá que

$$\int_\Omega \lambda^* f'(u_\lambda^*)\xi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla\xi|^2.$$

Portanto, u^* é semi-estável. ■

Estamos a um passo de mostrar o resultado de limitação. Agora, relembre que a solução fraca extremal u^* é o limite crescente em L^1, quando $\lambda \nearrow \lambda^*$, de soluções minimais u_λ de $(P_{\lambda g})$, isto é,

$$u^* = \lim_{\lambda \to \lambda^*} u_\lambda(x).$$

Além disso, para $\lambda < \lambda^*$, u_λ é uma solução C^2 semi-estável de $(P_{\lambda g})$. Feitas estas observações, vamos demonstrar o resultado sobre a limitação da solução extremal.

Teorema 1.6.2 ([01]) *Seja* $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, C^1, *não-decrescente,* $g(0) > 0$ *e* $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{g(u)}{u} = +\infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado* C^∞. *Assuma que* $2 \leq n \leq 4$ *e que* Ω *é convexo no caso* $n = \{3,4\}$. *Seja* u^* *a solução extremal de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda g(u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P_{\lambda g})$$

Então, $u^* \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: Começaremos estendendo g de maneira C^1 a todo $\mathbb{R}$, tal que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue não-decrescente e que $g \geq \frac{g(0)}{2}$ em $\mathbb{R}$. Seja ρ um mollifier com suporte em $(0,1)$ e tome $\rho_k(\beta) = k\rho(k\beta)$ um mollifier com suporte em $(0, \frac{1}{k})$. Com o objetivo de usarmos a estimativa L^∞ obtida anteriormente, iremos definir

$$g_k(s) = \int_{s-\frac{1}{k}}^{s} g(\tau)\rho_k(s-\tau)d\tau = \int_0^1 g(s - \frac{\beta}{k})\rho(\beta)d\beta.$$

Observe que g_k possui as seguintes propriedades:

1. $g_k \leq g_{k+1} \leq g$ em $\mathbb{R}$: De fato,

$$\begin{aligned} g_k(s) - g_{k+1}(s) &= \int_0^1 \left[g(s - \frac{\beta}{k}) - g(s - \frac{\beta}{k+1}) \right] \rho(\beta)d\beta \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois $s - \frac{\beta}{k} \leq s - \frac{\beta}{k+1}$. Além disso,

$$\begin{aligned} g_{k+1}(s) - g(s) &= \int_0^1 \left[g(s - \frac{\beta}{k+1}) - g(s) \right] \rho(\beta)d\beta \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois $s - \frac{\beta}{k+1} \leq s$ e $\int_0^1 \rho(\beta)d\beta = 1$.

2. g_k é C^∞ e $g_k(0) > 0$: Segue da propriedade dos mollifiers que g_k é C^∞. Agora,

$$\begin{aligned} g_k(0) &= \int_0^1 g(\frac{-\beta}{k})\rho(\beta)d\beta > \int_0^1 \frac{g(0)}{2}\rho(\beta)d\beta \\ &> 0, \end{aligned}$$

pois $g \geq \frac{g(0)}{2} > 0$.

3. g_k é não-decrescente: Seja $s \leq t$. Logo,

$$\begin{aligned} g_k(s) - g_k(t) &= \int_0^1 \left[g(s - \frac{\beta}{k}) - g(t - \frac{\beta}{k})\right]\rho(\beta)d\beta \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

pois como g é não-decrescente, $g(s - \frac{\beta}{k}) - g(t - \frac{\beta}{k}) \leq 0$.

4. g_k é super-linear: De fato,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g_k(s)}{s} = \lim_{s \to +\infty} \int_0^1 \frac{g(s - \frac{\beta}{k})}{s}\rho(\beta)d\beta.$$

Fazendo $t := s - \frac{\beta}{k}$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{s \to +\infty} \int_0^1 \frac{g(s - \frac{\beta}{k})}{s}\rho(\beta)d\beta &= \lim_{t \to +\infty} \int_0^1 \frac{g(t)}{t + \frac{\beta}{k}}\rho(\beta)d\beta \\ &= \lim_{t \to +\infty} \int_0^1 \frac{g(t)}{t\left[1 + \frac{\beta}{kt}\right]}\rho(\beta)d\beta \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t} \int_0^1 \frac{\rho(\beta)}{1 + \frac{\beta}{kt}}d\beta = +\infty, \end{aligned}$$

pois g é superlinear.

Agora, note que para todo k, 0 é subsolução fraca para o problema $(P_{\lambda^* g_k})$, pois

$$\int_\Omega \nabla 0 \cdot \nabla v \leq \int_\Omega \lambda^* g(0) v$$

e que u^* é supersolução do mesmo problema, pois como $g(u^*) \geq g_k(u^*)$, segue que

$$\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla v = \int_\Omega \lambda^* g(u^*) v \geq \int_\Omega \lambda^* g_k(u^*) v.$$

Temos também que o parâmetro extremal para o problema $(P_{\lambda^* g_k})$, que denotaremos por λ_k^*, satisfaz

$$\lambda^* \leq \lambda_k^*,$$

pois se $\lambda_k^* \leq \lambda^*$, seja $\lambda_0 \in (\lambda_k^*, \lambda^*)$. Logo, existe u_0 solução minimal clássica de $(P_{\lambda_0 g})$. Assim, u_0 é supersolução fraca de $(P_{\lambda_0 g_k})$. Pelo Teorema de Sub e Supersolução, obtemos que existe $\tilde{u}_0$ solução clássica de $(P_{\lambda g_k})$ tal que

$$0 \leq \tilde{u}_0 \leq u_0.$$

Pela definição de λ_k^*, obtemos que $\lambda_0 < \lambda_k^*$, o que é uma contradição. Além disso, a solução do problema $(P_{(\lambda^* - \frac{1}{n})g_k})$, que denotaremos por $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}}$, é clássica. Assim, aplicando o Teorema 1.5.4 com $f = (\lambda^* - \frac{1}{n})g_k$, obtemos uma limitação tal que

$$\left\| u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega, \mu, c_1, c_2, \|f\|_{L^\infty([0,\bar{C}])}) \leq C(\Omega, \mu, c_1, c_2, \|\lambda^* g\|_{L^\infty([0,\bar{C}])}),$$

ou seja, independente de n e k. Agora, observe que $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n+1}}$, pois $\left\{ u^k_\lambda : 0 < \lambda < \lambda^* \right\}$ é crescente em λ. Além disso, como $g_k \leq g_{k+1} \leq g$, temos que $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^*$, pois

$$\int_\Omega \nabla u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \nabla v = \int_\Omega (\lambda^* - \frac{1}{n}) g_{k+1}(u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}}) v \geq \int_\Omega (\lambda^* - \frac{1}{n}) g_k(u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}}) v,$$

ou seja, $u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}}$ é supersolução de $\left(P_{(\lambda^* - \frac{1}{n})g_k} \right)$, de onde obtemos

$$u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \geq u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}}.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que u^* é supersolução de $\left(P_{(\lambda^* - \frac{1}{n})g_{k+1}} \right)$. Agora, como temos a limitação $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^{k+1}_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^*$, pelo Teorema da convergência monótona, temos que

$$u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \to v_n \in L^1(\Omega).$$

A limitação de $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}}$ em L^∞ independente de k e n nos diz que $v_n \in L^\infty(\Omega)$. Pela condição $u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n}} \leq u^k_{\lambda^* - \frac{1}{n+1}}$, temos que

$$v_n \leq v_{n+1} \leq u^*.$$

Novamente, o Teorema da convergência monótona nos dá que $v_n \to v$, com $v \in L^\infty$. Observe agora que v é solução de $(P_{\lambda^* g})$ pois como

$$\int_\Omega v_n \Delta\varphi - \left(\lambda^* - \frac{1}{n}\right) g(v_n)\varphi = 0, \forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega}), \forall n \in \mathbb{N},$$

usando a continuidade do funcional obtemos que

$$\int_\Omega v\Delta\varphi - \lambda^* g(v)\varphi = 0.$$

Desta forma, v é solução fraca de $(P_{\lambda^* g})$. Pela minimalidade de u^*, devemos ter que $v = u^*$. Portanto, $u \in L^\infty(\Omega)$ como queríamos. ■

Capítulo 2

O problema radial

Neste capítulo, iremos trabalhar resultados de regularidade para u^* no caso radial, isto é, quando $\Omega = B_1$ é a bola unitária do R^n. Iremos denotar $r = |x|$ para $x \in R^n$. Com este intuito, começaremos estudando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) \quad \text{em} \quad B_1 \\ u &\geq 0 \quad \text{em} \quad B_1 \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitziana.

Aqui, podemos recordar um resultado de simetria do Gidas-Ni-Nirenberg que diz que se u é uma solução limitada de (2.1), então u é radialmente decrescente. Este resuldado de simetria segue usando o método moving planes.

2.1 Estimativas L^q

Precisaremos agora de algumas definições para obtermos mais a frente resultados de regularidade para a classe de minimizantes locais radiais.

Definição 2.1.1 *Dizemos que u é uma solução fraca de (2.1) se $u \in L^1(B_1)$ é* *não-negativa,* $g(u)\delta \in L^1(B_1)$ *e*

$$-\int_{B_1} u\Delta\xi \, \mathrm{d}x = \int_{B_1} g(u)\xi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \xi \in C_0^2(\overline{B_1}) \tag{2.2}$$

Definição 2.1.2 *Seja* $u \in L^\infty_{loc}(B_1 \setminus \{0\})$ *solução fraca de* (2.1)*. Dizemos que* u *é semi-estável se*

$$Q_u(\xi) := \int_{B_1} \left\{ |\nabla \xi|^2 - g'(u)\xi^2 \right\} \, \mathrm{d}x \geq 0, \tag{2.3}$$

para toda $\xi \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\})$.

Definição 2.1.3 *Dizemos que uma função radial* $u \in H^1(B_1)$ *é um minimizante local radial se para todo* $\delta > 0$ *existir* $\epsilon_\delta > 0$ *tal que*

$$E_{B_1 \setminus \overline{B_\delta}}(u) \leq E_{B_1 \setminus \overline{B_\delta}}(u + \xi) \tag{2.4}$$

para toda função radial ξ *com suporte compacto em* $B_1 \setminus \overline{B_\delta}$ *e com* $\|\xi\|_{C^1} \leq \epsilon_\delta$.

Precisaremos de dois lemas antes de obtermos o Teorema que nos dará estimativas L^∞ e L^q.

Lema 2.1.4 ([03]) *Seja* $u \in L^\infty_{loc}(B_1 \setminus \{0\})$ *solução fraca de (2.1). Então para cada* $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1)$ *com suporte compacto em* $B_1 \setminus \{0\}$*, temos que* $r\eta u_r \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1 \setminus \{0\})$ *possui suporte compacto em* $B_1 \setminus \{0\}$ *e*

$$Q_u(r\eta u_r) = \int_{B_1} u_r^2 \left\{ |\nabla(r\eta)|^2 - (n-1)\eta^2 \right\} \, \mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Prova: Seja $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1)$ com suporte compacto em $B_1 \setminus \{0\}$ e seja c qualquer função em $(H^2_{loc} \cap L^\infty_{loc})(B_1 \setminus \{0\})$. Como η possui suporte compacto, o pruduto $r\eta c \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1 \setminus \{0\})$ e possui suporte compacto em $B_1 \setminus \{0\}$. Por aproximação, podemos tomar $\xi = r\eta c$ e assim obter

$$\begin{aligned} Q_u(r\eta c) &= \int_{B_1} \left\{ |\nabla(r\eta c)|^2 - g'(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ \langle \nabla(r\eta c), \nabla(r\eta c) \rangle - g'(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ \langle c\nabla(r\eta) + r\eta\nabla c, c\nabla(r\eta) + r\eta\nabla c \rangle - g'(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla r\eta|^2 + 2cr\eta\nabla(r\eta)\nabla c + r^2\eta^2 |\nabla c|^2 - g(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observe agora que

$$c\nabla c\nabla(r^2\eta^2) = 2r\eta c\nabla c\nabla(r\eta). \tag{2.7}$$

Com isto, podemos usar (2.7) em (2.6) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} Q_u(r\eta c) &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla r\eta|^2 + 2cr\eta\nabla(r\eta)\nabla c + r^2\eta^2 |\nabla c|^2 - g(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla(r\eta)|^2 + c\nabla c.\nabla(r^2\eta^2) + r^2\eta^2 |\nabla c|^2 - g'(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla(r\eta)|^2 - r^2\eta^2\nabla(c\nabla c) + r^2\eta^2 |\nabla c|^2 - g'(u)(r\eta c)^2 \right\} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Agrupando os termos da equação acima, chegamos a

$$\begin{aligned} Q_u(r\eta c) &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla(r\eta)|^2 - r^2\eta^2 \left[\nabla(c\nabla c) - |\nabla c|^2 + g'(u)c^2 \right] \right\} \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1} \left\{ c^2 |\nabla(r\eta)|^2 - r^2\eta^2 \left[c\Delta c + g'(u)c^2 \right] \right\} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Com o objetivo de concluir a demonstração do lema, queremos tomar $c := u_r$ e obter a igualdade

$$c\Delta c + g'(u)c^2 = \frac{n-1}{r^2}c^2.$$

Mostraremos que isto é de fato verdade. Observe que como $u(x) = v(r)$ e $r = |x| = \sqrt{{x_1}^2 + ... + {x_n}^2}$, temos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

Assim,

$$u_{x_i} = v(r)_{x_i} = v' \frac{\partial r}{\partial x_i} = v' \frac{x_i}{r}.$$

Ainda mais,

$$u_{x_i x_i} = v'' \frac{{x_i}^2}{r^2} - v'(\frac{1}{r} - \frac{{x_i}^2}{r^3}).$$

Logo,

$$-\Delta u = -v'' - \frac{n-1}{r} v' = g(v).$$

Derivando com relação a r, temos

$$-v''' + \frac{n-1}{r^2} v' - \frac{n-1}{r} v'' = g(v) v'.$$

Portanto,

$$-\Delta u_r + \frac{n-1}{r^2} u_r = g'(u) u_r. \tag{2.9}$$

Pelas estimativas locais em $W^{2,q}$, temos que $u_r \in (H^2_{loc} \cap L^\infty_{loc})(B_1 \setminus \{0\})$. Tome agora, $c := u_r$. Logo, concluímos a igualdade desejada e consequentemente a demostração do lema. ■

Lema 2.1.5 ([03]) *Seja $n \geq 2$, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz e $u \in H^1_0(B_1)$ uma solução fraca semi-estável radialmente decrescente de (2.1). Seja α satisfazendo*

$$1 \leq \alpha < 1 + \sqrt{n-1}. \tag{2.10}$$

Então,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{-2\alpha} \, \mathrm{d}x \leq \frac{C_n}{(n-1) - (\alpha-1)^2} \left\{ \|u\|^2_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|^2_{L^1(B_1)} \right\}, \tag{2.11}$$

onde C_n é uma constante dependendo apenas de n.

Prova: Por aproximação, a condição de semi-estabilidade de u vale para toda $\xi \in H^1(B_1)$, com suporte compacto contido em $B_1 \setminus \{0\}$. Pelo lema anterior, temos que

$$\int_{B_1} u_r^2 \left\{ |\nabla(r\eta)|^2 - (n-1)\eta^2 \right\} \, \mathrm{d}x \geq 0$$

e daí

$$(n-1)\int_{B_1} u_r^2\eta^2\,\mathrm{d}x \le \int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta)|^2\,\mathrm{d}x \tag{2.12}$$

para toda $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1)$ com suporte compacto em $B_1 \setminus \{0\}$. Mostraremos agora que a estimativa (2.12) também vale para $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1)$ tal que $|\nabla(r\eta)| \in L^\infty(B_1)$. De fato, seja η satisfazendo as propriedades citadas. Tome $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})^n$ tal que $0 \le \zeta \le 1$, com $\zeta = 0$ em B_1 e $\zeta = 1$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_2$ e seja $\zeta_\delta(\cdot) = \zeta(\frac{\cdot}{\delta})$ para $\delta > 0$. Aplicando (2.12) com η substituida por $\eta\zeta_\delta$ obtemos

$$(n-1)\int_{B_1} u_r^2\eta^2\zeta_\delta^2\,\mathrm{d}x \le \int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta\zeta_\delta)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Agora, fazendo alguns cálculos, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta\zeta_\delta)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{B_1} u_r^2\,\langle\nabla(r\eta\xi),\nabla(r\eta\xi)\rangle\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{B_1} u_r^2\,\langle\zeta_\delta\nabla(r\eta)+r\eta\nabla\zeta_\delta,\zeta_\delta\nabla(r\eta)+r\eta\nabla\zeta_\delta\rangle\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{B_1} \left\{u_r^2\zeta_\delta^2\,|\nabla(r\eta)|^2+2r\eta\zeta_\delta\nabla\zeta_\delta.\nabla(r\eta)+r^2\eta^2\,|\nabla\zeta_\delta|^2\right\}\mathrm{d}x\\
&= \int_{B_1} u_r^2\zeta_\delta^2\,|\nabla(r\eta)|^2+r^2\eta^2\,|\nabla\zeta_\delta|^2+\zeta_\delta\nabla\zeta_\delta.\nabla(r^2\eta^2)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\zeta_\delta\nabla\zeta_\delta.\nabla(r^2\eta^2) = 2r\eta\zeta_\delta\nabla\zeta_\delta\nabla(r\eta).$$

Como, por hipótese, η e $|\nabla(r\eta)|$ são limitados, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta\zeta_\delta)|^2\,\mathrm{d}x \le\\
&\qquad \int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta)|^2\,\zeta_\delta^2 + \int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} u_r^2\,|\eta|\left\{\frac{r^2}{\delta^2}\,|\eta|\,|\nabla\zeta|^2+\frac{2r}{\delta}\zeta_\delta\,|\nabla(r\eta)|\,|\nabla\zeta|\right\}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta\zeta_\delta)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_{B_1} u_r^2\,|\nabla(r\eta)|^2\,\zeta_\delta^2 + C\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} u_r^2\,\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

Agora, observe que como $u \in H_0^1(B_1)$, a última integral tende a zero quando $\delta \to 0$. Usando o Teorema da convergência monótona, vale afirmação feita acima, ou seja, a estimativa (2.12) vale para $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(B_1)$ tal que $|\nabla(r\eta)| \in L^\infty(B_1)$.

Agora, seja $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Para $\alpha \geq 1$ satisfazendo as hipóteses, vamos aplicar (2.12) com $\eta = \eta_\epsilon$ dada por

$$\eta_\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon^{-\alpha} - 2^\alpha, & \text{se} \quad 0 \leq r \leq \epsilon \\ r^{-\alpha} - 2^\alpha, & \text{se} \quad \epsilon < r \leq \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} < r. \end{cases}$$

Como η_ϵ e $|\nabla(r\eta_\epsilon)|$ são limitadas, temos que

$$\begin{aligned} (n-1)\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} & u_r^2 (r^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \,\mathrm{d}x + (n-1)(\epsilon^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \int_{B_\epsilon} u_r^2 \,\mathrm{d}x \\ & \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 \left[(1-\alpha)r^{-\alpha} - 2^\alpha\right]^2 \,\mathrm{d}x + (\epsilon^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \int_{B_\epsilon} u_r^2 \,|\nabla r|^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Desde que $n \geq 2$, segue que

$$\begin{aligned} (n-1) & \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 (r^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \,\mathrm{d}x \\ & \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 \left[(1-\alpha)r^{-\alpha} - 2^\alpha\right]^2 \,\mathrm{d}x + (\epsilon^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \left[1 - n + 1\right] \int_{B_\epsilon} u_r^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

de onde deduzimos

$$(n-1)\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 (r^{-\alpha} - 2^\alpha)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 \left[(1-\alpha)r^{-\alpha} - 2^\alpha\right]^2 \,\mathrm{d}x.$$

Desenvolvendo os quadrados e usando a hipótese sobre α, segue que

$$\begin{aligned} (n-1) & \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 \left[r^{-2\alpha} - 2r^{-\alpha}2^\alpha + 2^{2\alpha}\right] \,\mathrm{d}x \leq \\ & \int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 \left[(1 - 2\alpha + \alpha^2) r^{-2\alpha} - 2(1-\alpha) r^{-\alpha} 2^\alpha + 2^{2\alpha}\right] \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e assim

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2\left[(n-2+2\alpha-\alpha^2)r^{-2\alpha}+(-n+2-\alpha)2r^{-\alpha}2^\alpha+(n-2)2^{2\alpha}\right]\,\mathrm{d}x\le 0$$

Desta forma, obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{-2\alpha}\left[(n-1)-(\alpha-1)^2\right]\,\mathrm{d}x\le C_n\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$

de onde segue

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{-2\alpha}\,\mathrm{d}x\le \frac{C_n}{(n-1)-(\alpha-1)^2}\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{-\alpha}\,\mathrm{d}x, \tag{2.14}$$

onde C_n denota uma constante dependente apenas de n. Escolhendo agora uma constante positiva $C_{\alpha,n}$ tal que

$$\frac{C_n}{(n-1)-(\alpha-1)^2}r^{-\alpha}\le\frac{1}{2}r^{-2\alpha}+C_{\alpha,n}r^{n-1},\ \text{ para todo } r>0.$$

Assim, da desigualdade (2.14), obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{-2\alpha}\,\mathrm{d}x\le C_{\alpha,n}\int_{B_{\frac{1}{2}}\setminus B_\epsilon} u_r^2 r^{n-1}\,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Agora, afirmamos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{n-1} &= |\partial B_1|\int_0^{\frac{1}{2}} u_r^2 r^{2n-2}\,\mathrm{d}r\\ &\le C_n\left\{\|u\|^2_{L^1(B_1)}+\|g(u)\delta\|^2_{L^1(B_1)}\right\}.\end{aligned}$$

De fato, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} ur^{n-1}\,\mathrm{d}r=F(1/2)-F(1/4).$$

Usando o Teorema do Valor Médio e o fato de u ser radialmente decrescente, temos

$$F(1/2)-F(1/4)=F'(c)\,|1/2-1/4|=u(c)c^{n-1}\,|1/2-1/4|\ge C_n u(1/2),$$

pois $c\in(1/4,1/2)$, onde C_n é uma constante que depende de n. Desta forma,

$$u(1/2) \leq C_n \int_{1/4}^{1/2} u r^{n-1} \, \mathrm{d}r.$$

Como

$$\int_{1/4}^{1/2} u r^{n-1} \, \mathrm{d}r = \int_{B_{1/2} \setminus B_{1/4}} u \, \mathrm{d}x \leq \int_{B_1} u \, \mathrm{d}x,$$

segue que

$$u(1/2) \leq \int_{B_1} u \, \mathrm{d}x = C_n \left\| u \right\|_{L^1(B_1)}. \tag{2.16}$$

Concluimos, portanto, que a afirmação é verdadeira. Agora, novamente, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ tal que

$$-u_r(\rho) = -\frac{u\left(\frac{3}{4}\right) - u\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = 4u\left(\frac{1}{2}\right) - 4u\left(\frac{3}{4}\right) \leq 4u\left(\frac{1}{2}\right). \tag{2.17}$$

Para $s \leq \frac{1}{2}$ iremos integrar $(r^{n-1} u_r)_r = -g(u) r^{n-1}$ e assim,

$$\int_s^\rho (r^{n-1} u_r)_r = \int_s^\rho -g(u) r^{n-1}$$

de onde obtemos

$$u_r(\rho)\rho^{n-1} - u_r(s) s^{n-1} = \int_s^\rho -g(u) r^{n-1}$$

e desta forma

$$\begin{aligned} -u_r(s) s^{n-1} &= -u_r(\rho)\rho^{n-1} - \int_s^\rho g(u) r^{n-1} \, \mathrm{d}r \\ &\leq C_n \left\{ u\left(\frac{1}{2}\right) + \left\| g(u)\delta \right\|_{L^1(B_1)} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$0 \leq -u_r(s) s^{n-1} \leq C_n \left\{ \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} + \left\| g(u)\delta \right\|_{L^1(B_1)} \right\}, \tag{2.18}$$

para todo $s \leq \frac{1}{2}$. Agora, elevando ao quadrado, segue o resultado. Afim de completar a demonstração do lema, note que fazendo $\epsilon \to 0$ em (2.15), obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{-2\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_{\alpha,n} \left\{ \left\| u \right\|_{L^1(B_1)}^2 + \left\| g(u)\delta \right\|_{L^1(B_1)}^2 \right\},$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 2.1.6 *Seja $n \geq 2$, $G \in C^2(\mathbb{R})$ e $u \in H^1(B_1)$ uma solução radial de $-\Delta u = G'(u)$ em $B_1 \setminus \{0\}$. Assuma que u é semi-estável. Seja α satisfaz*

$$1 \leq \alpha < 1 + \sqrt{n-1}. \tag{2.19}$$

Então

$$\int_{B_{1/2}} u_r^2 r^{-2\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \frac{C_n}{(n-1)-(\alpha-1)^2}\,\|u\|^2_{H^1(B_1)}, \tag{2.20}$$

onde C_n é uma constante dependendo apenas de n.

Teorema 2.1.7 ([03]) *Seja $n \geq 1$, $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitziana e $u \in H^1_0(B_1)$ uma solução fraca semi-estável radialmente decrescente de (2.1). Se $n \leq 9$, então $u \in L^\infty(B_1)$. Mais que isso,*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_n \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\},$$

para alguma constante C_n dependendo apenas de n. Se $n = 10$, então $u \in L^q(B_1)$, para todo $q < \infty$. Além disso,

$$u(r) \leq C \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} (|\log r| + 1) \ \ em\ B_1,$$

onde C é uma constante universal. Se $n \geq 11$ e $q < q_0$, então $u \in L^q(B_1)$ e

$$\|u\|_{L^q(B_1)} \leq C_{q,n} \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\},$$

onde $C_{q,n}$ é uma constante dependendo apenas de q e n. Mais ainda,

$$u(r) \leq C_n \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} r^{\frac{-n}{2}+\sqrt{n-1}+2} \left(|\log r|^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \ \ em\ B_1$$

para alguma constante C_n dependendo apenas de n.

Prova: Como na prova do lema anterior, podemos obter uma estimativa do tipo (2.18) com $n = 1$, isto é,

$$0 \leq -u_r(s) \leq C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}, \quad \forall s \leq \frac{1}{2}.$$

Integrando de r a $\frac{1}{2}$, obtemos

$$-\int_r^{\frac{1}{2}} u_r(s)ds \leq C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}$$

e assim,

$$-u\left(\frac{1}{2}\right) + u(r) \leq C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}.$$

Usando agora (2.16) segue que

$$u(r) \leq C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}, \text{ com } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}.$$

Desde que u é radialmente decrescente, segue que $u \in L^\infty(B_1)$ quando $n = 1$. Agora para o resto da prova iremos assumir que $n \geq 2$. Seja α satisfazendo as hipóteses. Para $0 < s \leq \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} u(s) - u\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_s^{\frac{1}{2}} -u_r \,\mathrm{d}r \\ &= \int_s^{\frac{1}{2}} u_r r^{-\alpha+\frac{n-1}{2}} r^{\alpha-\frac{n-1}{2}} \,\mathrm{d}r \leq C_n \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{-2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{2\alpha+1-n} \,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde acima usamos Cauchy-Schwarz.

Pelo lema anterior, deduzimos que

$$\begin{aligned} &u(s) \leq u(1/2) + \\ &+\frac{C_n}{\sqrt{(n-1)-(\alpha-1)^2}} \left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{2\alpha+1-n} \,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}} \left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

para todo $0 < s \leq \frac{1}{2}$. Agora, vamos dividir em casos: Vamos começar com o caso $n \leq 9$. A integral em (2.16) é finita em $s = 0$ se tivermos o expoente $2\alpha+1-n > -1$, isto é,

$$\frac{(n-4)}{2} < \alpha - 1. \tag{2.23}$$

Desde que $n \leq 9$, então $\frac{(n-4)}{2} < \sqrt{n-1}$ e podemos escolher α satisfazendo (2.23) e $\alpha < 1+\sqrt{n-1}$ tal que o lema anterior vale. Agora, a estimativa do teorema segue diretamente de (2.22) e (2.16, isto é, vale o resultado para o caso $n \leq 9$. Assuma agora que $n = 10$. Para $0 < \epsilon < 1$, seja $\alpha = 4 - \epsilon$ e apliquemos o lema anterior para obtermos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{-8+2\epsilon}\,\mathrm{d}x \leq \frac{C}{\epsilon}\left\{\|u\|^2_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|^2_{L^1(B_1)}\right\}$$

para uma constante universal C independente de ϵ. Calculando a integral e juntamente com (2.21) nos dá que

$$\begin{aligned} u(s) &\leq u\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{-1-2\epsilon}\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\} \\ &\leq u(\frac{1}{2}) + C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}\frac{s^{-\epsilon}}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

para todo $0 < s < \frac{1}{2}$ e todo $0 < \epsilon < 1$. Disto segue que $u \in L^q(B_1)$ para todo $q < \infty$, pois Agora, para provarmos a estimativa pontual, dado $s \in (0, \frac{1}{2})$ devemos encontrar ϵ que minimize $\frac{s^{-\epsilon}}{\epsilon}$ em (2.24). Assim, temos que

$$\left(\frac{s^{-\epsilon}}{\epsilon}\right)' = \frac{s^{-\epsilon}\epsilon\ln s - s^{-\epsilon}}{\epsilon^2}$$

e assim,

$$\epsilon = |\ln s|^{-1}.$$

Note que $\epsilon \in (0,1)$ se $0 < s < e^{-1}$. Assim, pela estimativa acima e com o ϵ dado acima, obtemos

$$u(s) \leq u\left(\frac{1}{2}\right) + C\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}|\ln s| \text{ para } 0 < s < e^{-1}.$$

Segue portanto a desigualdade desejada. Por último, suponha que $n \geq 11$. Para $\epsilon \in (0,1)$, seja $\alpha = 1 + \sqrt{n-1} - \epsilon$ e usando a desigualdade (2.22) obtemos que

$$\begin{aligned} &u(s) - u(\frac{1}{2}) \\ &\leq \frac{C_n}{\sqrt{n-1-(\alpha-1)^2}}\left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{3-n+2\sqrt{n-1}-2\epsilon}\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)}\right\}. \end{aligned}$$

Observe que $-\epsilon^2 + (2\sqrt{n-1} - 1)\epsilon > 0$, pois $n \geq 11$ e $\epsilon \in (0,1)$. Daí,

$$u(s) - u(\frac{1}{2}) \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{3-n+2\sqrt{n-1}-2\epsilon} \, \mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\}.$$

Integrando, segue

$$u(s) - u(\frac{1}{2}) \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{2}^{4-n+2\sqrt{n-1}-2\epsilon} - s^{4-n+2\sqrt{n-1}-2\epsilon} \right) \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} \tag{2.25}$$

de onde obtemos

$$u(s) - u(\frac{1}{2}) \leq \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} s^{4-n+2\sqrt{n-1}-2\epsilon},$$

pois observe que o fato de $n \geq 11$ temos que $4 - n + 2\sqrt{n-1} < 0$ Agora, devemos elevar (2.25) a $q \geq 1$, integrar e usar coordenadas polares para obtermos

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} (u - u(\frac{1}{2}))^q \, \mathrm{d}x \leq \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\}^q \frac{C_n^q}{\epsilon^{\frac{q}{2}}} \int_0^{\frac{1}{2}} s^{n-1+q(2-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon)} ds. \tag{2.26}$$

Agora, defina

$$q := \frac{2n}{n - 2\sqrt{n-1} - 4 + 3\epsilon}.$$

Então a integral do lado direito de (2.26) é finita para todo $\epsilon > 0$ suficiente pequeno, pois $n + q(2 - \frac{n}{2} + \sqrt{n-1} - \epsilon) > 0$. Assim, $u \in L^q(B_{\frac{1}{2}})$ para todo $q < q_0 = \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-4}$. Como u é não-decrescente, obtemos que $u \in L^q(B_1)$ e de (2.26) segue que

$$\|u\|_{L^q(B_1)} \leq C_{n,q} \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\}$$

Para obtermos a última estimativa, devemos usar (2.25) juntamente com (1.236). Assim,

$$u(s) \leq u(\frac{1}{2}) + \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} s^{2-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon}$$

Como feito anteriormente, precisaremos minimizar $\frac{s^{-\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}}$ para um dado $s \in (0, \frac{1}{2})$. Neste sentido, tome $\epsilon = \frac{-1}{2\ln s}$. Note que $\epsilon = \frac{-1}{2\ln s} \in (0,1)$ se $s \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$. Isto juntamente com (2.16) nos dá que

$$\begin{aligned} u(s) &\leq u(\frac{1}{2}) + C_n \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} s^{2-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}} |\ln s|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_n \left\{ \|u\|_{L^1(B_1)} + \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \right\} \left(|\ln s|^{\frac{1}{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos a demonstração do teorema. ■

2.2 Estimativas de Sobolev

Este próximo resultado, sob condições adicionais na g, nos dará uma estimativa $W^{k,q}$, com $k \leq 3$, para soluções semi-estáveis em H_0^1. Precisaremos definir os expoentes q_k para $k \in \{0,1,2,3\}$ por

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q_k} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} + \dfrac{k-2}{n}, & \text{para} \quad n \geq 10 \\ q_k = +\infty, & \text{para} \quad n \leq 9 \end{cases} \tag{2.27}$$

Teorema 2.2.1 ([03]) *Seja $n \geq 1$, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz e $u \in H_0^1(B_1)$ uma solução fraca semi-estavel radialmente decrescente de* (2.1)*. Temos que*

1. *Se g é não-negativa, então $u \in W^{1,q}(B_1)$ para todo $q < q_1$.*

2. *Se g e g' são não-negativas, então $u \in W^{2,q}(B_1)$ para $q < q_2$.*

3. *Se g, g' e g" são não-negativas, então $u \in W^{3,q}(B_1)$ para todo $q < q_3$. Além disso, temos a estimativa*

$$g'(u(r)) \leq C_n r^{-2} \ \textit{em}\ B_1, \tag{2.28}$$

onde C_n é uma constante dependendo apenas de n.

4. *Sob as hipóteses de (1) (respectivamente (2), (3)), para k=1 (respectivamente k=2, k=3) temos*

$$\|u\|_{W^{k,q}(B_1)} \leq C \text{ se } q < q_k \tag{2.29}$$

e que

$$\left|\partial_r^{(k)} u(r)\right| \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} r^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}+2-k} |\ln r|^{\frac{1}{2}} \tag{2.30}$$

se $r \leq \frac{1}{4}$ e $n \geq 10$, onde C é uma constante dependendo apenas de n, q e C_n é uma constante dependendo apenas de n.

Prova: Iremos inicialmente provar a estimativa do item (3). Primeiramente, como g é convexa, $g'(u(r))$ é não-decrescente em r. Portanto, é suficiente mostrar que a estimativa vale para $r < \frac{1}{2}$. Dado r com $2r < 1$, existe uma função radial $\xi \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\})$ tal que $\xi(s) = 0$ se $s \in [0, \frac{r}{4}] \cup [2r, 1]$, $\xi(s) = 1$ para $s \in [\frac{r}{2}, r]$ e $|\nabla \xi| \leq C r^{-2}$ para uma constante universal C. Agora, iremos usar a propriedade de semi-estabilidade para u com a função teste ξ de propriedades citadas anteriormente. Relembre que $g'(u(r))$ é não-negativa e não-crescente em s. Obtemos então

$$\begin{aligned}
g'(u(r)) r^n \left|B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}\right| &= g'(u(r)) \int_{B_r \setminus B_{\frac{r}{2}}} \mathrm{d}x \leq \int_{B_r \setminus B_{\frac{r}{2}}} g'(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_1} g'(u)\xi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_1} |\nabla \xi|^2 \\
&= \int_{B_{2r}} |\nabla \xi|^2 \leq C r^{-2} r^n |B_2|.
\end{aligned}$$

Por (2.9), obtemos

$$|u_{rrr}| \leq C_n \left\{ \frac{|u_{rr}|}{r} + \frac{|u_r|}{r^2} + |g'(u) u_r| \right\} \tag{2.31}$$

Portanto, segue que

$$g'(u(r)) \leq C_n r^{-2}$$

como queríamos mostrar. Vamos terminar a prova do teorema quando $n \leq 9$. Pelo Teorema 2.1.7, temos que $u \in L^\infty(B_1)$. Portanto, pelos resultados de regularidade, temos que $u \in W^{2,q}(B_1)$, para todo $q < \infty$. Assim, $g(u) \in W^{1,q}(B_1)$ e portanto $u \in W^{3,q}(B_1)$ para todo $q < \infty$. Portanto $\|u\|_{W^{k,q}} \leq C$, com $k = 1, 2, 3$.

Agora, desde que u é radialmente decrescente, argumentamos como em (2.16) e (2.17), podemos escolher $\tilde{\rho} \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ tal que

$$0 \leq -u_r(\tilde{\rho}) \leq 4u(\frac{1}{4}) \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} \tag{2.32}$$

Relembre a expressão do problema em coordenadas radiais. Assim, para $0 < s < \frac{1}{4}$, integramos $u_{rr} = -(n-1)r^{-1}u_r - g(u) \leq -(n-1)r^{-1}u_r$ com respeito a r em $(s, \tilde{\rho})$ e usando (2.32) obtemos

$$\begin{aligned} -u_r(s) &\leq -u_r(\tilde{\rho}) + \int_s^{\tilde{\rho}} (n-1)r^{-1}(-u_r)\,\mathrm{d}r \\ &\leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} + \int_s^{\frac{1}{2}} (n-1)(-u_r)r^{-\alpha+\frac{n-1}{2}} r^{\alpha-\frac{n-1}{2}-1}\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, temos

$$-u_r(s) \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} + C_n \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} u_r^2 r^{-2\alpha}\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{2\alpha-n-1}\,\mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde tomamos α satisfazendo as hipóteses do Lema 2.1.5. Como g é não-negativa, se multiplicarmos $-\Delta u = g(u)$ por $1-r^2$. Logo, por este mesmo lema e do fato de $g \geq 0$ e integrando duas vezes por partes em B_1 para obter $\|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)}$.

Logo, pelo Lema 2.1.5 temos

$$-u_r(s) \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} + \frac{C_n \|u\|}{\sqrt{n-1-(\alpha-1)^2}} \left(\int_s^{\frac{1}{2}} r^{2\alpha-n-1}\,\mathrm{d}r \right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $0 < s < \frac{1}{4}$. Dado $\epsilon \in (0,1)$, escolha $\alpha = 1 + \sqrt{n-1} - \epsilon$. Desde que $-u_r \geq 0$, a desigualdade anterior nos dá

$$\begin{aligned} |u_r(s)| &\leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)} + \frac{C_n \|u\|_{L^1(B_1)}}{\sqrt{n-1-(\alpha-1)^2}} \left[\frac{1}{(2\alpha-n)2^{2\alpha-n}} - \frac{s^{2\alpha-n}}{2\alpha-n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \|u\|_{L^1(B_1)} s^{\alpha-\frac{n}{2}} = \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \|u\|_{L^1(B_1)} s^{1+\sqrt{n-1}-\epsilon-\frac{n}{2}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Agora, para $q \geq 1$ usaremos (2.33) para obtermos

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}} |u_r|^q \, \mathrm{d}x \leq \frac{C_n}{\epsilon^{\frac{q}{2}}} \|u\|^q_{L^1(B_1)} \int_0^{\frac{1}{2}} s^{n-1+q(-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}+1-\epsilon)} ds.$$

Tome $q = \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-2+3\epsilon}$. Assim, para cada $\epsilon > 0$ suficiente pequeno, temos que a última integral é finita. Assim, $u_r \in L^q(B_{\frac{1}{4}})$ para todo $q < q_1 = \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-2}$. Logo $u \in W^{1,q}(B_1)$.

Para obtermos (2), assuma que $g' \geq 0$. Desde que u é radialmente decrescente, para $s \leq \frac{1}{4}$, temos

$$g(u(s)) - g(u(\frac{1}{4})) = -\int_s^{\frac{1}{4}} g'(u) u_r \, \mathrm{d}r \leq C_n \int_{B_{\frac{1}{4}} \setminus B_s} g'(u) \, |u_r| \, r^{1-n} \, \mathrm{d}x.$$

Usando (2.33), temos

$$g(u(s)) \leq g(u(\frac{1}{4})) + \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \|u\|_{L^1(B_1)} \int_{B_{\frac{1}{4}} \setminus B_s} g'(u) r^{-\frac{3n}{2}+\sqrt{n-1}+2-\epsilon} \, \mathrm{d}x, \tag{2.34}$$

para $s \leq \frac{1}{4}$. Agora, devemos usar a condição de semi-estabilidade para controlar a última integral. Note que $g' \geq 0$. Tome

$$\xi(r) = \begin{cases} s^{-\frac{3n}{4}+\frac{\sqrt{n-1}}{2}+1-\frac{\epsilon}{2}} & \text{se} \quad r \leq s, \\ r^{-\frac{3n}{4}+\frac{\sqrt{n-1}}{2}+1-\frac{\epsilon}{2}} & \text{se} \quad s \leq r \leq \dfrac{1}{4}, \\ (1/4)^{-\frac{3n}{4}+\frac{\sqrt{n-1}}{2}-\frac{\epsilon}{2}} (1-r)/3 & \text{se} \quad \dfrac{1}{4} \leq r \leq 1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{4}} \setminus B_s} g'(u) r^{-\frac{3n}{2}+\sqrt{n-1}+2-\epsilon} \, \mathrm{d}x &\leq \int_{B_1} g'(u) \xi^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{B_1} |\nabla \xi|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_1 \setminus B_s} |\nabla \xi|^2 \, \mathrm{d}x \leq C_n s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon} + C_n \\ &\leq C_n s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Daí,

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}} g(u) \, \mathrm{d}x \leq \|g(u)\delta\|_{L^1(B_1)} \leq C_n \|u\|_{L^1(B_1)}$$

e como $g(u(r))$ é não-crescente em r, temos

$$g(u(\frac{1}{4})) \leq C_n \left\| u \right\|_{L^1(B_1)}. \tag{2.37}$$

Juntando as informações de (2.34), (2.36) e (2.37) obtemos

$$0 \leq g(u(s)) \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon},$$

para $s \leq \frac{1}{4}$. Assim, por (2.33) deduzimos

$$|u_{rr}(s)| = \left| (n-1)\frac{u_r(s)}{s} + g(u(s)) \right| \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-\epsilon} \tag{2.38}$$

para todo $s \leq \frac{1}{4}$. Usando (2.38) e procedendo de maneira semelhante ao item 1, obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}} |u_{rr}(s)|^q \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} \int_0^{\frac{1}{4}} s^{q\left(-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}\right)+n-1},$$

para todo $q < q_2 = \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-2\epsilon}$. Agora, para estabelecer o item 3, usaremos (2.31), (2.28), (2.33) e (2.38) para obtermos

$$\begin{aligned} |u_{rrr}(s)| \leq C_n \frac{|u_{rr}(s)|}{s} + \frac{|u_r(s)|}{s^2} + |g'(u(s))u_r(s)| \leq \\ \leq \frac{C_n}{\sqrt{\epsilon}} \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}-1-\epsilon}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

para $s \leq \frac{1}{4}$. Procedendo de maneira análoga da parte 1 e 2, obtemos que $u \in W^{3,q}(B_1)$ para $q < q_3 := \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-2-\epsilon}$. Para mostrarmos (2.30) usaremos agora (2.33), (2.38) e em (2.39) tomaremos $\epsilon = |\log s|^{-1} \in (0,1)$, para algum dado $s \leq \frac{1}{4}$, de onde segue

$$\left| \partial_r^{(k)} u(r) \right| \leq C_n \left\| u \right\|_{L^1(B_1)} s^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}+2-k} \left| \ln s \right|^{\frac{1}{2}}$$

como queríamos provar. ■

2.3 Regularidade do minimizante local radial

Nesta seção iremos obter um resultado sobre minimizantes locais radiais usando os resultados da seção anterior. De fato, o que precisamos é que mostrar que tal minimizante é de fato uma solução fraca semi-estável.

Teorema 2.3.1 ([03]) *Assuma que $n \geq 2$ e que $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é C^2. Seja $u \in H^1(B_1)$ um minimizante local radial. Temos então que*

1. *Se $n \leq 9$, então $u \in L^\infty(B_1)$.*
2. *Se $n = 10$, então $|u(r)| \leq C \|u\|_{H^1(B_1)} |\log r|$ para $r < \frac{1}{2}$ e onde C é uma constante universal.*
3. *Se $n \geq 11$ e $q < q_0 := \frac{2n}{n-2\sqrt{n-1}-4}$, então $u \in L^q(B_1)$. Mais que isso, vale*

$$|u(r)| \leq C_n \|u\|_{H^1(B_1)} r^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-1}+2} |\log r|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.40}$$

   para $r < \frac{1}{2}$ e onde C_n é uma constante dependendo apenas de n.
4. *Para todo n, ou u é constante, ou radialmente decrescente, ou radialmente crescente em B_1.*

Prova: Desde que $u \in H^1(B_1)$ é radial, afirmamos que $u \in L^\infty_{loc}(\overline{B_1} \setminus \{0\})$. De fato, seja $x \in \overline{B_1} \setminus \{0\}$ tal que $B_\delta(x) \subset\subset \overline{B_1} \setminus \{0\}$. Como u é radial,

$$u \in H^1(\|x\|, \|x\| + \delta).$$

Pelo Teorema de Imersão de Sobolev em dimensão 1, segue que

$$u \in L^\infty_{loc}(\overline{B_1} \setminus \{0\}).$$

Agora, como u é minimizante local radial, podemos usar a densidade de C^1_0 em H^1 para obter que u é solução fraca de

$$-\Delta u = g(u)$$

em $B_1 \setminus \{0\}$, onde $g = G'$. Desde que u é limitada longe da origem, temos que

$$u \in C^2_{loc}(\overline{B_1} \setminus \{0\}).$$

Além disso, a definição de minimizante local radial nos dá que u é semi-estável. Para mostrar isto basta proceder da mesma maneira que fizemos no Capítulo 1. Agora, observe que não sabemos se u é solução fraca numa vizinhança da origem. Relembremos que na prova do Teorema 2.1.7 usamos (2.21), a qual não usamos a hipótese de u ser radialmente decrescente. Daí, usamos o Lema 2.1.6, podemos obter

$$u(s) \leq u(1/2) + \frac{C_n}{\sqrt{n-1-(\alpha-1)^2}} \left\{ \int_s^{1/2} r^{2\alpha+1-n}\, \mathrm{d}r \right\}^{1/2} \|u\|^2_{H^1(B_1)}.$$

A partir daí o resto da prova permanece a mesma. Note que $|u(1/2)|$ é limitada por $\|u\|_{H^1}$ por causa da Imersão de Sobolev em uma dimensão. Deste modo, obtemos (1), (2) e (3). Para provar (4) sobre monotonicidade radial, é suficiente mostrar que se u_r não é identicamente nulo, então u_r nunca se anula em $(0,1)$. Vamos argumentar com o objetivo de contradição. Assuma que

$$u_r(r_0) = 0 \text{ para algum } r_0 \in (0,1).$$

Tome $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função radial tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi = 0$ em B_1 e $\xi = 1$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_2$ e defina

$$\xi_\delta(\cdot) = \xi(\frac{\cdot}{\delta})$$

para $0 < \delta < \frac{r_0}{2}$. Desde que $u_r(r_0) = 0$, a função $u_r\xi_\delta$ se anula em B_δ e pertence a $H^1_0(B_{r_0} \setminus \overline{B_\delta})$, pois $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(B_1 \setminus \{0\})$. Assim podemos aproximar $u_r\xi_\delta$ por funções em $C^\infty_c(B_{r_0} \setminus \{0\})$ e da propriedade de semi-estabilidade, obtemos

$$\int_{B_{r_0}} \left\{ |\nabla(u_r\xi_\delta)|^2 - g'(u)(u_r\xi_\delta)^2 \right\} \mathrm{d}x \geq 0.$$

Com isto, iremos proceder como na prova do Lema 2.1.4, isto é, desenvolvendo o gradiente, temos

$$\int_{B_{r_0}} |\nabla(u_r\xi_\delta)|^2 - g'(u)(u_r\xi_\delta)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{B_{r_0}} |\xi_\delta\nabla u_r + u_r\nabla\xi_\delta|^2 - g'(u)(u_r\xi_\delta)^2 \,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{B_{r_0}} \left\{\xi_\delta^2 |\nabla u_r| + 2u_r\xi_\delta\nabla\xi_\delta\nabla u_r + u_r^2 |\nabla\xi_\delta|^2\right\} \,\mathrm{d}x - \int_{B_{r_0}} \left\{g'(u)(u_r\xi_\delta)^2\right\} \,\mathrm{d}x \geq 0. \quad (2.41)$$

Por outro lado, observe que multiplicando (2.9) por $u_r\xi_\delta^2$ e integrando, obtemos

$$\int_{B_{r_0}} \left\{(u_r\xi_\delta^2)\Delta u_r - \frac{n-1}{r^2}(u_r\xi_\delta)^2\right\} \,\mathrm{d}x = -\int_{B_{r_0}} g'(u)(u_r\xi_\delta)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Usando a Fórmula de Green e que $u_r(r_0) = 0$, segue

$$\int_{B_{r_0}} \left\{-\nabla u_r\nabla(u_r\xi_\delta^2) - \frac{n-1}{r^2}(u_r\xi_\delta)^2\right\} \,\mathrm{d}x = -\int_{B_{r_0}} g'(u)(u_r\xi_\delta)^2 \,\mathrm{d}x. \quad (2.42)$$

Observe que

$$\nabla u_r\nabla(u_r\xi_\delta^2) = \xi_\delta^2 |\nabla u_r|^2 + 2u_r\xi_\delta\nabla\xi_\delta\nabla u_r + u_r^2 |\nabla\xi_\delta|^2 - u_r^2 |\nabla\xi_\delta|^2 . \quad (2.43)$$

Juntando (2.43), (2.42) e (2.41), segue

$$\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} u_r^2 |\nabla\xi_\delta|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{B_{r_0}} \frac{n-1}{r^2} u_r^2\xi_\delta^2 \,\mathrm{d}x \geq 0. \quad (2.44)$$

A menos de constante, a primeira integral acima é limitada por

$$\int_{B_{2\delta}\setminus B_\delta} u_r^2 |\nabla\xi_\delta|^2 \,\mathrm{d}x \leq C\int_{B_{2\delta}} u_r^2 r^{-2} \,\mathrm{d}x.$$

Pelo Lema 2.1.6, usando $\alpha = 1$, temos

$$\int_{B_{2\delta}} u_r^2 r^{-2} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Portanto, fazendo $\delta \to 0$ em (2.44), obtemos uma contradição. ∎

2.4 Regularidade da Solução Extremal

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.45}$$

Nesta seção iremos aplicar os Teoremas 2.1.7 e 2.2.1 para podermos obter um resultado de regularidade da solução extremal do problema (2.45). Para tanto, precisaremos impor as seguintes condições sobre a não-linearidade

$$f \in C^1, \text{ não-decrescente, } f(0) > 0, \text{ e } \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty. \tag{2.46}$$

Teorema 2.4.1 ([03]) *Assuma que $\Omega = B_1$, $n \geq 2$ e que f satisfaça (2.46). Seja u^* a solução extremal de (2.45). Então*

1. *Se $n \leq 9$, então $u^* \in L^\infty(B_1)$.*

2. *Se $n = 10$, então $u^*(r) \leq C\,|\log r|$ em B_1 para alguma constante C.*

3. *Se $n \geq 11$, então*

$$u^*(r) \leq C r^{-n/2+\sqrt{n-1}+2}\,|\log r|^{1/2} \text{ em } B_1 \tag{2.47}$$

para alguma constante C. Em particular, $u^* \in L^q(B_1)$ para todo $q < q_0$.

4. *Assuma que f seja convexa. Então temos que $u^* \in W^{k,q}(B_1)$ para todo $k \in \{1,2,3\}$ e $q < q_k$. Em particular, $u^* \in H^3(B_1)$ para todo n. Mais ainda, para todo $n \geq 10$ e $k \in \{1,2,3\}$,*

$$\left|\partial_r^{(k)} u^*(r)\right| \leq C r^{-n/2+\sqrt{n-1}+2-k} \left(|\log r|^{1/2} + 1\right) \text{ em } B_1 \tag{2.48}$$

para alguma constante C.

Prova: Sabemos que $u^* \in L^1(B_1)$ é uma solução fraca semi-estável de (2.45) a qual é limite, na topologia do L^1, das u_λ. Para obtermos o resultado desejado, basta aplicar os Teoremas 2.3.1 e 2.2.1 com $u = u^*$ e $g = \lambda^* f$. Para tanto, precisamos mostrar que $u^* \in H_0^1(B_1)$ e que u^* é radialmente decrescente. Com este objetivo, aplicaremos (2.2.1) para $\lambda < \lambda^*$ e $u = u_\lambda$. Relembre que u_λ é suave. A estimativa (2.29) aplicada com $k = 1$ e $q = 2 < q_1$ nos dá que $\|u_\lambda\|_{H_0^1(B_1)} \leq C$, para alguma constante $C > 0$ independente de λ, pois temos $\|u_\lambda\| \leq \|u^*\| < \infty$ para todo λ. Pela Compacidade Fraca, sabemos que u_λ possui uma subsequencia fracamente convergente para uma função $v \in H_0^1(B_1)$. Porém, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, u_λ converge forte para v em L^1. Pela unicidade do limite, temos que $u^* = v \in H_0^1(B_1)$. Como cada u_λ é radialmente decrescente, pelo resultado de Gidas-Ni-Nirenberg, o limite u^* é radialmente não-crescente. Porém, o Princípio do Máximo e o Lema de Hopf nos dizem que u^* deve ser decrescente. Agora estamos nas hipóteses necessárias para aplicarmos os teoremas e o resultado segue. ∎

Capítulo 3

Apêndice

Os resultados apresentados neste apêndice podem ser encontrados em livros clássicos, como por exemplo [02], [14], [15] e [16].

Teorema 3.0.2 (Caracterização de $W^{1,\infty}$) *Seja U aberto e limitado, com ∂U de classe C^1. Então $u : U \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana se e somente se $u \in W^{1,\infty}(U)$.*

Teorema 3.0.3 (Gauss-Green) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, tal que sua fronteira ∂U seja C^1. Suponha $u \in C^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\nu^i dS, \qquad (i = 1, ..., n).$$

Corolário 3.0.4 (Integração por Partes) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, tal que sua fronteira ∂U seja C^1. Seja $u, v \in C^1(\overline{U})$. Então*

$$\int_U u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_U u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} uv\nu^i dS, \qquad (i = 1, ..., n).$$

Teorema 3.0.5 (Fórmula de Green) *Seja $u, v \in C^2(\overline{U})$. Então*

1. $\int_U \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial v} dS.$

2. $\int_U Du \cdot Dv\,\mathrm{d}x = -\int_U u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial U} \frac{\partial v}{\partial v} dS.$

3. $\int_U u\Delta v - v\Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial v} - v\frac{\partial u}{\partial v} dS.$

Teorema 3.0.6 (Sard [02]) *Se $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave então o conjunto de valores críticos possui medida nula.*

Teorema 3.0.7 (Coarea [02]) *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua e assuma que para quase todo $\mathbb{R}$, o conjunto de nível*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) = r\}$$

é uma hipersuperfície $(n-1)$-dimensional em $\mathbb{R}^n$. Suponha também que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e somável. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,|Du|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{u=r\}} f dS \right) \mathrm{d}r.$$

Teorema 3.0.8 *Seja L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \geq 0$, e seja f e os coeficientes de L pertencentes a $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que Ω é um domínio $C^{2,\alpha}$ e que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f(u) \ \textit{em} \ \Omega \\ \\ u = \varphi \ \textit{sobre} \ \partial\Omega. \end{cases}$$

possui única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.0.9 *Seja Ω um domínio $C^{k+2,\alpha}$, $k \geq 0$ e seja $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz*

$$\begin{cases} Lu = f(u) \ \textit{em} \ \Omega \\ \\ u = \varphi \ \textit{sobre} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f e os coeficientes do operador estritamente elíptico L pertencem a $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.0.10 (Convergência Monótona) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* L^1 *que satisfaz*

1. $f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ...$ *quase sempre em* Ω
2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

Então $f_n(x)$ *converge quase sempre em* Ω *a um limite finito, o qual denotamos por* $f(x)$. *Além disso, a função* f *pertence a* L^1 *e* $\|f_n - f\| \to 0$.

Definição 3.0.11 *Uma função* F *é dita de variação limitada se a variação de* F *sobre qualquer partição de* $[a, b]$ *é limitada, isto é, existe* $M < \infty$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq M$$

para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$.

Observação 11 *Se* F *é uma função real monótona e limitada em* $[a, b]$, *então* F *é de variação limitada.*

Teorema 3.0.12 *Se* F *é de variação limitada em* $[a, b]$, *então* F *é diferenciável quase sempre em* (a, b).

Teorema 3.0.13 *Seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *uma solução fraca da equação* $Lu = f$ *em* Ω, *onde* L *é um operador estritamente elíptico em* Ω *com os coeficientes* a_{ij}, b_i, $i, j = 1, ..., n$ *uniformemente Lipschitz contínuas em* Ω, *os coeficientes* c_i, d, $i = 1, ..., n$ *essencialmente limitados em* Ω *e a função* $f \in L^2(\Omega)$. *Então para qualquer subdomínio* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *temos* $u \in W^{1,2}(\Omega')$ *e*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C \left\{ \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right\}$$

para $C = C(n, \lambda, K, d')$, *onde* $K{=}\max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)}, \|c_i\|_{L^\infty \Omega}, \|d\|_{L^\infty \Omega} \right\}$ *e* $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Teorema 3.0.14 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a propriedade do cone interior.Se $p \geq 1$ e $k < \frac{n}{p}$ então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $p \leq q \leq p^*$.

Teorema 3.0.15 (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a propriedade do cone interior. Se $p \geq 1$ e $k = \frac{n}{p}$ então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

onde $p \leq q < \infty$.

Teorema 3.0.16 (Lema da Fronteira de Hopf) *Suponha que $V \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $v \in C^2(\overline{V})$ e que $c \in L^\infty(V)$. Assuma*

$$\begin{cases} -\Delta v + cv \geq 0 \ \text{em } V \\ \qquad\quad v \geq 0 \ \text{em } V. \end{cases}$$

Suponha também $v \neq 0$. Se $x_0 \in \partial V$, $v(x_0) = 0$ e V satisfaz a condição da bola interior em x_0, então

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Além disso,

$$v > 0 \ \text{em } V.$$

Teorema 3.0.17 (Princípio do Máximo) *Seja $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) em Ω e suponha que exista um ponto $y \in \Omega$ para o qual*

$$u(y) = \sup_\Omega u \ (\inf_\Omega u).$$

Então u é constante.

Teorema 3.0.18 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet) *Dado $\varphi \in H$ existe uma única função $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

Precisaremos definir e enunciar mais alguns resultados que irão nos permitir construir aproximações suaves para uma função dada. Usaremos a seguinte notação: se $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $\epsilon > 0$, escrevemos $U_\epsilon := \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Defina $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) \text{ se } \|x\| < 1 \\ \\ 0 \text{ se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante C é escolhida de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1$.

Definição 3.0.19 (Mollifier) *Para cada $\epsilon > 0$, defina*

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta(\frac{x}{\epsilon}).$$

Chamamos η de mollifier padrão. As funções η_ϵ são C^∞ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, \mathrm{d}x = 1, \ supp(\eta_\epsilon) \subset B(0, \epsilon).$$

Definição 3.0.20 *Se $f : U \to \mathbb{R}$ é localmente integrável, definimos sua suavização*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \ \text{ em } U_\epsilon.$$

De outra maneira,

$$f^\epsilon(x) = \int_U \eta_\epsilon(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y) f(x - y) \, \mathrm{d}y$$

para $x \in U_\epsilon$.

Teorema 3.0.21 (Propriedades dos mollifiers) *Usando a mesma notação acima, valem as seguintes propriedades:*

1. *$f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.*

2. *$f^\epsilon \to f$ quase sempre quando $\epsilon \to 0$.*

3. *Se $f \in C(U)$, então $f^\epsilon \to f$ uniformemente em compactos de U.*

4. *Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$, então $f^\epsilon \to f$ em $L^p_{loc}(U)$.*

Precisamos também de um resultado que basicamente nos diz que se pudermos encontrar uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$ para um certo problema elíptico, com $\underline{u} \leq \overline{u}$, então existe uma solução satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Vamos tornar estas palavras mais precisas.

Iremos investigar o problema para a equação não-linear de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \text{ em } U \\ \quad u = 0 \text{ sobre } \partial U, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suave, com

$$\left\| f' \right\| \leq C,$$

para alguma constante positiva $C \in \mathbb{R}$.

Definição 3.0.22 (Subsolução e supersolução)

1. *Dizemos que $\overline{u} \in H^1(U)$ é uma supersolução fraca do problema (3) se*

$$\int_U D\overline{u} \cdot Dv \, \mathrm{d}x \geq \int_U f(\overline{u}) v \, \mathrm{d}x$$

para cada $v \in H^1_0(U)$, com $v \geq 0$ quase sempre.

2. *De maneira análoga, $\underline{u} \in H^1(U)$ é uma subsolução fraca de (3) se*

$$\int_U D\underline{u} \cdot Dv \, \mathrm{d}x \leq \int_U f(\underline{u}) v \, \mathrm{d}x$$

para cada $v \in H^1_0(U)$, com $v \geq 0$ quase sempre.

3. Diremos que $u \in H_0^1$ *é uma solução fraca de* (3) *se*

$$\int_U Du \cdot Dv \, \mathrm{d}x = \int_U f(u)v \, \mathrm{d}x$$

para cada $v \in H_0^1(U)$.

Teorema 3.0.23 (Existência de solução entre sub e supersolução) *Assuma que existam uma subsolução fraca* $\underline{u}$ *e uma supersolução fraca* $\overline{u}$ *do problema* (3), *satisfazendo*

$$\underline{u} \leq 0, \overline{u} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ no sentido do traço, } \underline{u} \leq \overline{u} \text{ quase sempre em } U.$$

Então existe uma solução fraca de (3) *tal que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ quase sempre em } U.$$

Teorema 3.0.24 *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Temos*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \text{ se } p < N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in [p, +\infty), \text{ se } p = N$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \text{ se } p > N$$

e todas as imersões são contínuas.

Teorema 3.0.25 (Simetria Radial) *Seja* $u \in C^2(\overline{B_1})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{em} & B_1 \\ u &= 0 & \text{em} & \partial B_1, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é localmente Lipschitziana. Então* u *é radial, isto é,*

$$u(x) = v(r), (r = |x|)$$

para alguma função decrescente $v : [0, 1] \to [0, +\infty]$.

Referências Bibliográficas

[01] Xavier Cabré. Regularity of minimizers of semilinear elliptic problems up to dimension four. *arXiv:0909.4696v2*, 2009.

[02] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* AMS, 1998.

[03] A. Capella X. Cabré. Regularity of radial minimizers and extremal solutions of semi-linear elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 238:709–733, 2006.

[04] L. Nirenberg H. Brezis. h^1 versus c^1 local minimizers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317:465–472, 1993.

[05] K. Zumbrun P. Sternberg. Connectivity of phase boundaries in strictly convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141:375–400, 1998.

[06] K. Zumbrun P. Sternberg. A poincaré inequality with applications to volume-constrained area-minimizing surfaces. *J. Reine Angew Math*, 503:63–85, 1998.

[07] Michel Willem. *Minimax Theorems.* Birkhäuser Boston, 1995.

[08] L. Simon J.H. Michael. Sobolev and meanvalue inequalities on generalized submanifolds of R^n. *Comm. Pure Appl. Math.*, 26:361–379, 1973.

[09] W.K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. Math.*, 95:417–491, 1972.

[10] R.D. Nussbaum D.G. de Figueiredo, P.-L. Lions. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl.*, 61:41–63, 1982.

[11] L. Nirenberg B. Gidas, W.M. Ni. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.*, 68:209–243, 1979.

[12] X. Cabré H. Brezis. Some simple nonlinear pde's without solutions. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez.*, B 1:223–262, 1998.

[14] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE.* Universitext, 2010.

[15] Rami Shakarchi Elias M. Stein. *Real Analysis - Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, 2005.

[16] Neil S. Trudinger David Gilbarg. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* 1998.