Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Conjuntos Invariantes de Fluxo Decrescente na Teoria dos Pontos Críticos e Aplicações às Equações Diferenciais Não-Lineares

por

Ornan Filipe de Araújo Oliveira †

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN- UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

O48c Oliveira, Ornan Filipe de Araújo.
Conjuntos invariantes de fluxo decrescente na teoria dos pontos críticos e aplicações às equações diferenciais não-lineares / Ornan Filipe de Araújo Oliveira. - - João Pessoa : [s.n.], 2008.
111f. il.
Orientador: João Marcos Bezerra do Ó.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais não- lineares. 3. Conjuntos invariantes de fluxo.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Conjuntos Invariantes de Fluxo Decrescente na Teoria dos Pontos Críticos com Aplicações às Equações Diferenciais Não-Lineares

por

Ornan Filipe de Araújo Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu - UFMG

Prof. Dr.Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2008

Agradecimentos

Pela graça de Deus sou o que sou, e a graça que ele me deu não ficou sem resultados, a Deus seja toda a gratidão. Ao meu orientador, Prof. João Marcos Bezerra do Ó, cuja orientação, conselhos e incentivos transcendem a barreira orientador-orientando. Aos professores Everaldo Medeiros e Emersson Abreu por, gentilmente, aceitarem participar da banca examinadora. Aos meus pais Paulo Batista e Maria Cruz pelo dom da vida e apoio incessante. Aos meus irmãos pelos valiosos incentivos. Aos professores da Pós-Graduação, em especial ao professor Everaldo Medeiros, pela incansável disponibilidade. Aos meus professores da graduação: Antônio Andrade, Nélson Nery, Abdoral Oliveira, Lenimar Nunes e, em especial, a Profa Flávia Jerônimo cujo apoio e incentivo datam de meus primeiros anos no curso de Matemática. Aos colegas da Pós-Graduação pela excelente convivência e troca de experiências, em especial a Andreia Cota, cuja ajuda foi significativa para o bom êxito deste trabalho. Aos amigos dos tempos de graduação, em especial, Adriano, Alana, Aldeck, Clarissa, Moisés e Rúbia. Finalmente agradeço a CAPES pelo essencial apoio financeiro.

Dedicatória

A não sei quem e a mais alguém.

Resumo

Neste trabalho, estudamos certas propriedades de conjuntos invariantes de fluxo decrescente definidos por campos de vetores pseudo-gradientes. Esta análise nos permitiu determinar a existência e multiplicidade de pontos críticos para certos funcionais limitados inferiormente em conjuntos invariantes pelo fluxo associado.

Aplicamos esses conceitos a problemas elípticos não lineares em domínios limitados e a sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares. Em diferentes casos, pelo menos quatro soluções foram obtidas para essas equações.

Abstract

In this work, we studied a certain proprieties of invariant sets of descending flow defined by pseudogradient vector field. This analysis permit us to determine the existence and multiplicity of critical points of certain functionals bounded below in invariant sets by associate flow.

We applied this concepts to nonlinear elliptic boundary value problems and nonlinear systems of ordinary differential equations. In variant cases, at least four solutions are obtained for these equations.

Conteúdo

Notações

q.t.p.	quase toda parte,
c.i.f.d.	conjunto invariante de fluxo decrescente,
λ_1	primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$,
$\lvert \cdot \rvert$	norma euclidiana
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u,
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u,
$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$	derivada normal interior,
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	aberto,
$\partial\Omega$	fronteira de Ω,
$\blacksquare$	indica final de demonstração.

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \{u$ mensurável sobre Ω e $\int_\Omega |u|^p dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$,

$L^\infty(\Omega) = \{u$ mens. sobre Ω e existe C tal que $|u(x)| \leq C$ q.t.p. sobre $\Omega\}$,

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ semi-eixo real não negativo,

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$,

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$

$C_c(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω,

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\; g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi \, dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$,

$W_0^{1,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^1(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,

$H_0^1(\Omega)$ espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$,

$\|u\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$,

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{0,p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,p}^p \right)^{1/p}$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,

$\|u\|_{1,p} = \||\nabla u|\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}$ norma do espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

$\|\!|u|\!\|_{1,p} \ = \ \left(\||\nabla u|\|_{0,p}^p + \|u\|_{0,p}^p\right)^{1/p}$ norma do espaço $W^{1,p}(\Omega)$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Introdução

Nesta dissertação, apresentaremos um método geral para mostrar a existência de pontos críticos para uma classe de funcionais definidos em espaços de Banach. Em seguida, mostraremos como esse método é usado para estudar a existência e a multiplicidade de soluções de problemas elípticos não-lineares com condições de fronteira de Dirichlet homogênea, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e com fronteira suave; $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana. Aplicaremos também este método para estudar problemas periódicos de sistemas de EDO não-lineares, da forma

$$\begin{cases} \ddot{u} + \nabla u V(t,u) = 0, \\ \quad u(0) = u(2\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u} = \dot{u}(2\pi), \end{cases} \tag{2}$$

onde $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua, $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^N$ é 2π-periódica e $\nabla_u V$ é o gradiente de V em relação a u.

Seja $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 definido no espaço de Banach X e $W : X_0 \to X$ um campo pseudo-gradiente associado ao funcional J, onde $X_0 = \{u \in X : J'(u) \neq 0\}$. Suponha que $u_0 \in X_0$ e considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= -W(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{3}$$

Seja $u(t, u_0)$ a única solução para $t \geq 0$ com intervalo maximal de existência $[0, \eta(u_0))$. Chamamos esta solução de curva de fluxo decrescente motivado pelo fato de que a função $[0, \eta(u_0)) \ni t \mapsto J(u(t, u_0))$ é decrescente.

Usando o fluxo decrescente definido por (3), pode-se provar vários teoremas de deformação que desempenham importantes papéis na moderna teoria dos pontos críticos, por exemplo, na Teoria Minimax, na Teoria Morse e na Teoria de Lusternic-Schnirelmann. Para maiores detalhes, dentre outras, sugerimos as seguintes referências [1], [7], [23], [24] e [27]. A idéia básica dos teoremas de deformação é que se um número c não é um valor crítico de um funcional J, que satisfaz a condição de compacidade de Palais Smale, (P. S.) abreviadamente, então $J_{c-\varepsilon}$ é uma deformação forte de $J_{c+\varepsilon}$. Portanto, se J_a não é uma deformação forte de J_b então, pelo menos um número do intervalo $[a, b]$ é um valor crítico de J . Em vários argumentos de deformação, as soluções de (3) são decisivas para construir estas tais deformações. Em agluns casos, obtemos as deformações pelas soluções de problemas de valor inicial modificados

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= -h(u(t)) \cdot W(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{4}$$

onde $h(u)$ é escolhida de acordo com a necessidade dos diferentes problemas.

Nesta dissertação, ao invés de usarmos o fluxo decrescente para construir deformações, estudaremos diretamente o próprio fluxo decrescente. Analisaremos suas propriedades, atentando para a direção e destino das curvas de fluxo, e buscaremos o limite ao longo do fluxo. O foco de nossa análise será na busca de pontos de X, através dos quais o fluxo não vai para o infinito. Se encontrarmos tais pontos, então as curvas de fluxo através deles irão, finalmente, para pontos críticos.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Capítulo 1: Neste capítulo, introduziremos o conceito de conjunto invariante de fluxo decrescente para um funcional e mostraremos como esses conjuntos são utilizados para se produzir outros. Além disso, mostraremos que se um funcional é limitado inferioremente em um conjunto invariante de fluxo decrescente ele possui um ponto crítico nesse conjunto. A partir daí, vários pontos críticos podem ser encontrados, se vários conjuntos invariantes desconexos estiverem disponíveis. Provaremos ainda, via conjuntos invariantes de fluxo decrescente o famoso Teorema do Passo da Montanha bem como algumas de suas variantes;

Capítulo 2: Neste capítulo garantiremos a existência de pelo menos quatro pontos críticos para classes de funções sob condições adequadas. Especialmente, para fins de aplicação, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.1 *Suponha que J seja um funcional que satisfaz a condição* (P. S.) *no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $J'(u)$ é da forma $J'(u) = u - Au$ para $u \in \mathcal{H}$. Assuma que D_1 e D_2 são suconjuntos abertos e convexos de $\mathcal{H}$ com a propriedade que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $A(\partial D_1) \subset D_1$ e $A(\partial D_2) \subset D_2$. Se existe um caminho $h : [0,1] \to \mathcal{H}$ tal que*

$$h(0) \in D_1 \setminus D_2, h(1) \in D_2 \setminus D_1$$

e

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(h(t)),$$

então J tem pelo menos quatro pontos críticos u_1, u_2, u_3 e u_4 localizados nos conjuntos $D_1 \cap D_2$, $D_1 \setminus \overline{D}_2$, $D_2 \setminus \overline{D}_1$ e $X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$, respectivamente;

Capítulo 3: Estudaremos o problema (1) com não-linearidade superlinear ou com não-linearidade assintoticamente linear. O caso assintoticamente linear inclui o ressonante. Sob condições genéricas provamos que (1) tem três soluções não triviais ou até sete soluções não triviais;

Capítulo 4: Estudaremos o problema (2) com não linearidade superlinear ou com não linearidade assintoticamente linear. Provaremos que (2) tem ao menos três soluções não triviais.

Faremos aqui um breve histórico dos Problemas (1) e (2), bem como um paralelo com os resultados obtidos nesta dissertação:

(i) Muitos autores estudaram (1). Dentre tantos, citamos [1], [7], [27] e [29]. Ambrosetti e Rabinowitz provaram que sob condições subcríticas e superlinear (1) tem ao menos duas soluções não-triviais. Esse resultado foi melhorado por Wang [29] que provou existirem ao menos três soluções não triviais de (1). Os resultados obtidos aqui são mais gerais em dois aspectos:

- As condições de não-linearidade da f são menos restritivas;
- Obtemos mais propriedades interessantes das soluções.

Além disso, a abordagem feita aqui difere da feita por Wang em [29]. Os Teoremas 3.1, 3.2, 3.6 e 3.7 foram provados pela primeira vez em [19], por Zhaoli Liu em sua tese de doutorado.

(ii) Vários autores estudaram o problema (2), dentre eles citamos [5], [15] e [18]. Alguns deles obtiveram ao menos uma solução não-trivial para (2); outros ao menos duas soluções não triviais. Neste trabalho obtemos pelo menos três.

(iii) Os métodos para (2) são adequados para estudar também o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = \nabla_u F(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

onde $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave. Resultados similares aos do Capítulo 3, deste trabalho, podem ser obtidos nessa situação. O problema (5) bem como problemas similares têm sido estudados por alguns autores, dentre os quais citamos [3], [8], [26] e [33].

Capítulo 1

Conjuntos Invariantes de Fluxo Decrescente

1.1 Definições e Propriedades Elementares

Nesta seção, através das órbitas do problema de Cauchy, faremos a definição de Conjuntos Invariantes de Fluxo Decrescente, bem como verificaremos algumas de suas importantes propriedades.

Seja X um espaço de Banach e J um funcional de classe C^1 definido em X. Denotaremos por $J'(u)$ a derivada de J no ponto $u \in X$, $J'(u) \in X'$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a aplicação de dualidade entre X' e X. Por simplicidade denotaremos ambas as normas de X e X' por $\| \cdot \|$ e $d(u, v) = \|u - v\|$ a distância em X.

Caso X seja um espaço de Hilbert identificamos $J'(u)$ com o gradiente $\nabla J(u) \in X$. Um ponto crítico de J é um elemento $u \in X$ tal que $J'(u) = 0$ e neste caso $J(u) = c$ é um valor crítico de J. Denotamos por K o conjunto dos pontos críticos de J, isto é, $K = \{u : u \in X, J'(u) = 0\}$ e $X_0 = X \setminus K$.

Definição 1.1 *Uma aplicação lipschitziana $W : X_0 \to X$ é chamada um* ***campo pseudo-gradiente*** *para J se satisfaz:*

(i) $\langle J'(u), W(u) \rangle \geq \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2$ *para todo $u \in X_0$;*

(ii) $\|W(u)\| \leq 2\|J'(u)\|$ *para todo* $u \in X_0$.

Observação 1.1 *A noção de campo pseudo-gradiente foi introduzida por Palais em [24]. Veja o* ***Apêndice*** *na página 80 para uma prova da existência de um campo pseudo-gradiente associado a um funcional de classe* C^1.

Seja $W(u)$ um campo pseudo-gradiente de vetores para J e $u_0 \in X_0$. Considere o seguinte problema de valor inicial de Cauchy em X_0:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) & = & -W(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) & = & u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Pela teoria de EDO em espaços de Banach, o problema (1.1) tem uma única solução em X_0, denotada por $u(t, u_0)$, com intervalo maximal de existência à direita $[0, T(u_0))$. O conjunto $\{u(t, u_0) : t \in [0, T(u_0))\}$ é chamado **órbita** por u_0. Observemos que $T(u_0)$ pode ser um número positivo ou $+\infty$.

Observação 1.2 *Notemos que a função* $t \mapsto J(u(t, u_0))$ *é decrescente em* $[0, T(u_0))$. *De fato, temos que*

$$\frac{d}{dt}J(u(t, u_0)) = \langle J'(u(t, u_0)), u'(t, u_0)\rangle = -\langle J'(u(t, u_0)), W(u(t))\rangle \leq -\frac{1}{2}\|J'(u)\|^2 < 0.$$

Por essa razão, a função $t \mapsto u(t, u_0) \in X$, *para* $t \in [0, T(u_0))$ *é dita uma* ***curva de fluxo decrescente***.

Definição 1.2 *Um subconjunto* $M \subset X$, *não-vazio, é dito um* ***conjunto invariante de fluxo decrescente*** *(c.i.f.d.) para* J, *determinado por* W, *se*

$$\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset M$$

para todo $u_0 \in M \setminus K$, *isto é, as órbitas que iniciam em* M *continuam em* M.

Vejamos agora algumas importantes propriedades desses conjuntos.

Lema 1.1 *Suponha que* J *seja um funcional de classe* C^1 *em* X *e* W *um campo pseudo-gradiente para* J. *Então*

(i) X *é um conjunto invariante de fluxo decrescente;*

(ii) *para qualquer* M_μ $(\mu \in \Lambda)$, *uma classe de conjuntos invariantes de fluxo decrescente, ambos* $\bigcup_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ *e* $\bigcap_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ *são também conjuntos invariantes de fluxo decrescente;*

(iii) *para qualquer* $a \in \mathbb{R}$, *os conjuntos de nível* $J_a = \{u \in X : J(u) \leq a\}$ *e* $J_a^o = \{u \in X : J(u) < a\}$ *são, ambos, conjuntos invariantes de fluxo decrescente.*

Prova. Como X é o conjunto universo, o item **(i)** é imediato. Para o item **(ii)** tome $u(t,u_0) \in \bigcup_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ e então temos $u(t,u_0) \in M_\mu$ para algum $\mu \in \Lambda$. Como M_μ é um c.i.f.d. temos que $\{u(t,u_0) : 0 \leq t \leq u_0\} \subset M_\mu \subset \bigcup_{\mu\in\Lambda} M_\mu$, provando que $\bigcup_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ é um c.i.f.d. A prova é análoga para $\bigcap_{\mu\in\Lambda} M_\mu$. O item **(iii)** também é imediato pois se $b = u(t,u_0) \in J_a$ então $J(b) \leq a$. Como já sabemos, J é decrescente e portanto temos que $J(u(t,b)) \leq a$ para todo $t \in [0, T(b))$, isto é, $\{u(t',b) : 0 \leq t' \leq T(b)\} \subset J_a$. Para J_a^o o raciocínio é análogo. ■

1.2 Existência de um Ponto Crítico

Nesta seção veremos como, a partir dos conjuntos invariantes de fluxo decrescente fechados, podemos garantir a existência de um ponto crítico para um funcional J. Estabeleceremos, também, outras propriedades para tais conjuntos.

Definição 1.3 *Para* $M \subset X$, *diz-se que* J *satisfaz a* ***condição de Palais Smale***, *doravante denotada simplesmente por* (P. S.), *em* M *se qualquer seqüência* $(u_n) \subset M$ *tal que* $(J(u_n))$ *é limitada e* $J'(u_n) \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *possui uma subseqüência convergente.*

Teorema 1.4 *Suponha que* M *é um conjunto invariante de fluxo decrescente fechado em* X *e que* J *satisfaz à condição* (P. S.) *em* M. *Se* $c := \inf_{u\in M} J(u) > -\infty$, *então* c *é um valor crítico de* J, *isto é, existe* $u_1 \in M$ *tal que* $J(u_1) = c$ *e* $J'(u_1) = 0$.

Prova. Primeiramente provaremos a afirmação a seguir.
Afirmação: Dado $u_0 \in M \setminus K$, existe um ponto crítico u^* em M tal que $c \leq J(u^*) \leq J(u_0)$.

De fato, para $u_0 \in M \setminus K$, temos que

$$\{u(t,u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset M$$

uma vez que M é um c.i.f.d.. Desde que J é decrescente, para todo $0 \leq t < T(u_0)$, temos

$$c \leq J(u(t,u_0)) \leq J(u(0,u_0)) = J(u_0). \tag{1.2}$$

Agora, usando (1.1) temos, para $0 \leq t_1 < t_2 < T(u_0)$, que

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} u(t,u_0) dt \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} -W(u(t,u_0)) dt \right\|.$$

Assim,

$$\|u(t_2,u_0) - u(t_1,u_0)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|W(u(t,u_0))\| dt.$$

Usando a definição de campo pseudo-gradiente obtemos

$$\|u(t_2,u_0) - u(t_1,u_0)\| \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \|J'(u(t,u_0))\| dt.$$

Usando a desigualdade de Hölder e, novamente, a definição de campo pseudo-gradiente temos

$$\begin{aligned}
\|u(t_2,u_0) - u(t_1,u_0)\| \leq& 2 \left[\int_{t_1}^{t_2} \|J'(u(t,u_0))\|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \right]^{1/2} \\
\leq& 2 \left[\int_{t_1}^{t_2} 2 \Big\langle J'(u(t,u_0)), W(u(t,u_0)) \Big\rangle dt \right]^{1/2} [t_2 - t_1]^{1/2} \\
\leq& 2 \left[-2 \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle J'\left(u(t,u_0)\right), \frac{d}{dt} u(t,u_0) \Big\rangle dt \right]^{1/2} [t_2 - t_1]^{1/2} \\
\leq& 2 \left[-2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} J(u(t,u_0)) dt \right]^{1/2} [t_2 - t_1]^{1/2} \\
\leq& 2 \Big[2 \Big(J(u(t_1,u_0)) - J(u(t_2,u_0)) \Big) \Big]^{1/2} [t_2 - t_1]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, observando que segundo (1.2)

$$J(u(t_1,u_0)) \leq J(u(0,u_0)) = J(u_0)$$

e que

$$J(u(t_2,u_0)) \geq c,$$

concluímos que para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, T(u_0))$,

$$\|u(t_2, u_0) - u(t_1, u_0)\| \leq 2\sqrt{2}\,(J(u_0) - c)^{1/2}\,(t_2 - t_1)^{1/2}\,. \tag{1.3}$$

Agora dois casos podem ocorrer:

1º Caso: Se $T(u_0) < +\infty$, o critério de Cauchy aplicado à desigualdade em (1.3) implica que

$$\lim_{t \to T(u_0)^-} \|u(t, u_0) - u^*\| = 0$$

para algum $u^* \in X$. Então $u^* \in K$, isto é, u^* é um ponto crítico de J, pois do contrário, o intervalo de existência à direita de $u(t, u_0)$ seria $[0, T(u_0) + T(u^*))$ para algum $T(u^*) > 0$, mas isto contradiz a maximalidade de $[0, T(u_0))$. Desde que M é fechado temos que $u^* \in M$.

2º Caso: Se $T(u_0) = +\infty$, desde que, por (1.2), $t \mapsto J(u(t, u_0)) \in \mathbb{R}$ é limitada, $0 \leq t < +\infty$, o Teorema do Valor Médio garante que existe uma seqüência crescente (t_n) com $t_n \nearrow +\infty$ quando $n \to +\infty$ tal que

$$\left.\frac{d}{dt} J(u(t, u_0))\right|_{t = t_n} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

De fato, tomando $t_n = n$ temos que $J(u(t_{n+1}, u_0)) - J(u(t_n, u_0)) = J'(u(\xi_n, u_0))$ onde $n \leq \xi_n \leq n + 1$. Claro que $\xi_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Como $n \mapsto J(u(t_n, u_0))$ é uma seqüência de números reais decrescente e limitada inferiormente, existe $\lim\limits_{n \to +\infty} J(u(t_n, u_0))$.

Segue de (1.1) e da definição de campo pseudo-gradiente que

$$\|J'(u(t_n, u_0))\|^2 \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|J'(u(t_n, u_0))\|^2 &\leq 2\,\langle J'(u(t_n, u_0)), W(u)\rangle \\
&= 2\left\langle J'(u(t_n, u_0)), -\frac{d}{dt}u(t)\right\rangle \\
&= -2\frac{d}{dt}J(u(t_n, u_0)) \to 0
\end{aligned}$$

Pela condição (P. S.), existe uma subseqüência convergente de $(u(t_n, u_0))$, a qual, por comodidade, denotaremos também por $(u(t_n, u_0))$. Seja

$$u^* = \lim_{n \to +\infty} u(t_n, u_0),$$

então u^* é um ponto crítico de J e $u^* \in M$. Com isto provamos nossa afirmação inicial.

Como $c = \inf_{u \in M} J(u)$, então dado $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in M$ tal que $c \leq J(u_n) \leq c + 1/n$. Agora, usando nossa afirmação inicial, podemos concluir que existe $u_n^* \in M$ com $J'(u_n^*) = 0$ e $c \leq J(u_n^*) \leq c + 1/n$. Portanto, existe uma seqüência de pontos críticos $(u_n) \subset M$ tal que $J(u_n) \to c$ quando $n \to \infty$. Novamente, pela condição (P. S.), ao longo da seqüência (u_n) obteremos um limite $\widetilde{u} \in M$ o qual é um ponto crítico de J e satisfaz $J(\widetilde{u}) = c$. Com isso concluímos a prova. ∎

Definição 1.5 *Sejam M e D conjuntos invariantes de fluxo decrescente para J, com $D \subset M$. Denotemos*

$$C_M(D) = \{u_0 \in M \quad \textit{tal que existe} \quad 0 \leq t' < T(u_0) \quad \textit{para o qual} \quad u(t', u_0) \in D\}.$$

Dizemos que D é um conjunto invariante de fluxo decrescente ***completo*** *relativo a M quando $D = C_M(D)$.*

Observação 1.3 *Sejam X um espaço topológico e Y um subespaço de X. Uma aplicação contínua $r : X \to Y$ chama-se uma* ***retração*** *quando se tem $r(y) = y$ para todo $y \in Y$, ou seja, $r|_Y = id_Y$. Uma retração $r : X \to Y$ é, portanto, uma extensão contínua a X da aplicação identidade $id : Y \to Y$. Toda retração é sobrejetiva.*

Observação 1.4 *Quando existe uma retração $r : X \to Y$, o subespaço Y chama-se um* ***retrato*** *do espaço X.*

Lema 1.2 *Notemos que: a) $D \subset C_M(D)$; b) $C_M(D)$ é o maior subconjunto de M o qual é um retrato de D; c) $C_M(D)$ é o menor de todos os c.i.f.d. completos contendo D e contidos em M.*

Prova. O item a) é imediato. Para o item b) devemos mostrar que $C_M(D)$ é um retrato de D. Para isto considere a retração $r : C_M(D) \to D$ tal que $r(p) = u(t_p, p)$, onde $t_p := \inf\{t' : u(t', p) \in D\} \geq 0$. Observemos que se $p \in D$ então $t_p = 0$, de modo que $r|_D = id_D$. Tal retração é um retrato de D. Além disso $C_M(D)$ é o maior subconjunto de M que é um retrato de D. Finalmente, para verificarmos c), primeiramente mostremos que $C_M(D)$ é completo. Para isto vejamos que $C_M(C_M(D)) = C_M(D)$. Uma inclusão é imediata pelo item a), resta-nos mostrar que $C_M(C_M(D)) \subset C_M(D)$.

Assim, seja $p \in C_M(C_M(D))$ então existe $t' \in [0, T(p))$ tal que $u(t', p) \in C_M(D)$. Logo, existe $t'' \in [0, T(u(t', p)))$ tal que $u(t'' + t', p) = u(t'', u(t', p)) \in D$ e, portanto $p \in C_M(D)$. Mostremos a minimalidade de $C_M(D)$. Seja Z um c.i.f.d. completo e tal que $D \subset Z \subset M$. Devemos mostrar que $C_M(D) \subset Z$. Por ser completo temos $C_M(Z) = Z$. Então como $D \subset Z$ temos que $C_M(D) \subset C_M(Z) = Z$, isto é, $D \subset C_M(D) \subset Z \subset M$ como queríamos demonstrar. ∎

O próximo lema é uma conseqüência direta da Definição 1.5.

Lema 1.3 *Sejam M um c.i.f.d., D_1, $D_2 \subset M$, ambos c.i.f.d. Se $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, então $C_M(D_1) \cap C_M(D_2) = \emptyset$.*

Prova. Vamos usar a contra-positiva, isto é, suponhamos que $C_M(D_1) \cap C_M(D_2) \neq \emptyset$. Seja $u_0 \in C_M(D_1) \cap C_M(D_2)$. Isto significa que existem $0 \leq t_1, t_2 < T(u_0)$ tais que $u(t_1, u_0) \in D_1$ e $u(t_2, u_0) \in D_2$, respectivamente. Mas então, desde que D_1 e D_2 são ambos c.i.f.d., para todo $\max\{t_1, t_2\} \leq t < T(u_0)$ teríamos $u(t, u_0) \in D_1 \cap D_2$, donde $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, o que é uma contradição. ∎

Para $D \subset M$ denotaremos $\partial_M D$ como a fronteira de D relativa a M e $\overline{D}^M$ como o fecho de D relativo a M.

Lema 1.4 *Seja M um c.i.f.d. conexo, $\emptyset \neq D \subset M$ c.i.f.d completo e aberto relativo a M. Se D é subconjunto próprio de M, então $\partial_M D$ é um c.i.f.d. não-vazio e completo relativo a M.*

Prova. Pela conexidade de M e o fato de que D é suconjunto próprio de M, temos que $\partial_M D \neq \emptyset$. De fato, se $\partial_M D = \emptyset$, então $\overline{D}^M = D \cup \partial_M D = D$, ou seja, D é fechado relativo a M. Portanto, sendo D um subconjunto não-vazio de M, temos $M = D \cup (M \setminus D)$ uma cisão não-trivial de M, o que é um absurdo, uma vez que M é conexo. Vamos mostrar que $\partial_M D$ é um c.i.f.d.. Tome $u_0 \in (\partial_M D) \setminus K$ e provemos que $\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset \partial_M D$. Suponhamos, por contradição, que existe $0 \leq t' < T(u_0)$ tal que $u(t', u_0) \notin \partial_M D$, então, $u(t', t_0) \in D \cup (M \setminus \overline{D}^M)$. Agora, dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $u(t', u_0) \in D$. Neste caso temos que $u_0 \in C_M(D) = D$, o que contradiz $u_0 \in \partial_M D$ e o fato de que D é aberto em M.

Caso 2: $u(t', u_0) \in M \setminus \overline{D}^M$. Desde que $u_0 \in \partial_M D$, $M \setminus \overline{D}^M$ é um subconjunto aberto de M e M é um c.i.f.d., pela continuidade do fluxo, existe uma vizinhança U de u_0 em M tal que, para qualquer $u_1 \in U$, $u(t', u_1) \in M \setminus \overline{D}^M$. Daí, escolhendo $u_2 \in U \cap D$, existe t'' tal que $u(t'', u_2) \in M \setminus \overline{D}^M$ e isto é uma contradição com o fato de D ser um c.i.f.d..

Portanto, em qualquer dos casos concluímos que $\partial_M D$ é um c.i.f.d.

Agora provaremos que $\partial_M D$ relativo a M é completo. Seja $u_0 \in C_M(\partial_M D)$. Devemos provar que $u_0 \in \partial_M D = \overline{D}^M \setminus D$. É claro que $u_0 \notin D$ pois, do contrário, desde que D é um c.i.f.d. e D é aberto em M não poderíamos ter $u(t, u_0) \in \partial_M D$. Portanto, resta-nos mostrar apenas que $u_0 \in \overline{D}^M$. Assuma, por contradição, que $u_0 \in M \setminus \overline{D}^M$. Como $u_0 \in C_M(\partial_M D)$, existe um $0 \leq t' < T(u_0)$ tal que $u(t', u_0) \in \partial_M D$. Pela continuidade do fluxo, existem vizinhanças U de u_0 e V de $u(t', u_0)$ relativas a M tais que $U \subset M \setminus \overline{D}^M$ e $\Phi = u(t', \cdot)$ é um homeomorfismo de U para V. Escolha $u^* \in V \cap D$. Então existe um $u_1 \in U \subset M \setminus \overline{D}^M$ tal que $u(t', u_1) = u^* \in D$. Portanto $u_1 \notin \overline{D}^M$ e $u_1 \in C_M(D)$, e temos uma contradição com $C_M(D) = D$. Logo $u_0 \in \partial_M D$. ■

Lema 1.5 *Suponha que M é um c.i.f.d. conexo. Seja $D \subset M$ um c.i.f.d. aberto de M. Então*

(i) *$C_M(D)$ é um subconjunto aberto de M;*

(ii) *se $C_M(D)$ é um subconjunto próprio de M e $\inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty$, então*

$$\inf_{u \in \partial_M D} J(u) \leq \inf_{u \in \partial_M C_M(D)} J(u).$$

Prova. O resultado **(i)** é óbvio pela continuidade do fluxo. De fato, dado $u_0 \in C_M(D)$, existe um $t' \in [0, T(u_0))$ tal que $u(t', u_0) \in D$. Sendo D aberto existe uma vizinhança aberta U de $u(t', u_0)$ tal que $U \subset D$. Daí, pela continuidade do fluxo, existe uma vizinhança aberta V de u_0 tal que $u(t', v) \in U$ para todo $v \in V$. Portanto $u_0 \in V \subset \mathrm{Int}(C_M(D))$, o interior de $C_M(D)$. Para **(ii)**, vamos assumir que $u_0 \in \partial_M C_M(D)$ e provar que $J(u_0) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u)$. Notemos que isto é óbvio se $u_0 \in \partial_M D$. Suponhamos então que $u_0 \notin \partial_M D$. Como D é aberto vemos claramente que $\partial_M(C_M(D)) \cap D = \emptyset$ pois se existisse $p \in \partial_M(C_M(D)) \cap D$ teríamos por um lado que existe $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset D$, já que $p \in D$, e por outro lado que para todo $r > 0$, $B_r(p) \cap (M \setminus C_M(D)) \neq \emptyset$, já que $p \in \partial_M(C_M(D))$, e isto é um absurdo. Então $u_0 \notin \overline{D}^M$. Portanto, existe uma seqüência $(u_n) \subset C_M(D) \setminus \overline{D}^M$ tal que $\lim_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Desde que $u_n \in C_M(D)$ e $u_n \notin \overline{D}^M$, o Teorema da Alfândega garante que existe um $t_n > 0$ tal que $u(t_n, u_n) \in \partial_M D$. Então segue que

$$J(u_n) = J(u(0, u_n)) \geq J(u(t_n, u_n)) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u).$$

Portanto, $J(u_0) = \lim_{n \to +\infty} J(u_n) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u)$. Em qualquer caso temos, portanto, $J(u_0) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u)$, finalizando a demonstração. ∎

Teorema 1.6 *Seja M um c.i.f.d. para J, fechado e conexo. Seja $D \subset M$ um c.i.f.d. para J, aberto. Se $C_M(D) \neq M$, $\inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty$ e J satisfaz a condição* (P. S.) *em $M \setminus D$, então*

$$\inf_{u \in \partial_M C_M(D)} J(u) \geq \inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty,$$

$c := \inf_{u \in \partial_M C_M(D)} J(u)$ é um valor crítico de J e existe ao menos um $u_1 \in \partial_M C_M(D)$ tal que $J(u_1) = c$ e $J'(u_1) = 0$.

Prova. O primeiro item do Lema 1.5 garante que $C_M(D) \subset M$ é aberto. Como por hipótese $C_M(D) \neq M$, podemos usar o Lema 1.4, aplicado ao conjunto $C_M(D)$, para garantir que $\partial_M C_M(D) \neq \emptyset$ e $\partial_M C_M(D)$ é um c.i.f.d.. Além disso, a hipótese $\inf_{u \in \partial_M D} J(u) > -\infty$ nos permite utilizar o segundo item do Lema 1.5 e obter

$$-\infty < \inf_{u \in \partial_M D} J(u) \leq \inf_{u \in \partial_M C_M(D)} J(u) := c.$$

Finalmente, podemos usar o Teorema 1.4 aplicado ao conjunto fechado $\partial_M C_M(D)$ e obter um ponto crítico em $\partial_M C_M(D)$. ∎

O Teorema 1.6 tem importantes conseqüências. A primeira delas é o bem conhecido Teorema do Passo da Montanha, o qual é devido a Ambrosetti e Rabinowitz.

Teorema 1.7 (do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição* (P. S.). *Se Ω é um conjunto aberto e existem dois pontos $u_0 \in \Omega$, $u_1 \notin \overline{\Omega}$ tais que*

$$\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \inf_{u \in \partial\Omega} J(u),$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(h(t))$$

é um valor crítico de J, onde

$$\Gamma = \{h : h : [0,1] \to X \quad \textit{é contínua, e} \quad h(0) = u_0, h(1) = u_1\}.$$

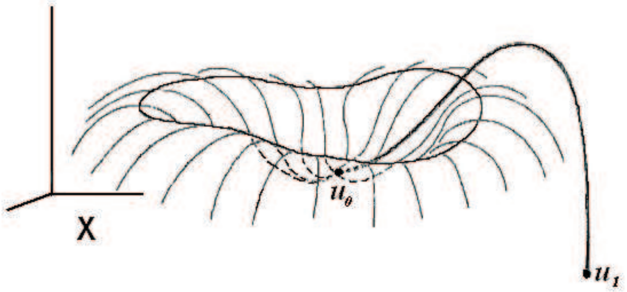

Figura 1.1: Idéia intuitiva, em $\mathbb{R}^3$, do Passo da Montanha

Prova. Sendo h contínua e o intervalo $[0,1]$ conexo, temos, pelo Teorema da Alfândega, que todo elemento de Γ intersecta $\partial\Omega$. Daí segue-se que

$$c \geq \inf_{u \in \partial\Omega} J(u).$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon > \max\{J(u_0), J(u_1)\}$. Seja D_ε a componente conexa por caminho de

$$J^0_{c-\varepsilon} = \{u : u \in X, J(u) < c - \varepsilon\}$$

contendo u_0. Note que todo caminho que começa em D_ε continua em D_ε pois as componentes conexas por caminho são sempre disjuntas. Então, para D_ε valem os seguintes fatos:

(i) D_ϵ é um conjunto invariante de fluxo decrescente. De fato, devemos mostrar que para todo $v \in D_\varepsilon$, tem-se $\{u(t,v) : 0 \leq t < T(v)\} \subset D_\varepsilon$. Se $u_0 \in D_\varepsilon \subset J^0_{c-\varepsilon}$ temos $J(u(t,v)) \leq J(u(0,v)) = J(v) < c - \varepsilon$. Logo $J(u(t,v)) \in J^0_{c-\varepsilon}$, para todo $t \in [0, T(v))$. Assim, $\lambda(t) := u(t,v)$ é um caminho em $J^0_{c-\varepsilon}$ com $\lambda(0) = u_0 \in D_\varepsilon$. Então $\lambda(t) \in D_\varepsilon$ para todo $t \in [0, T(v))$, pois D_ε é conexo por caminho.

(ii) Note que u_1 não pertence a D_ε. De fato, se supormos o contrário teríamos $u_0, u_1 \in D_\varepsilon \subset J^0_{c-\varepsilon}$. Considere $\gamma : [0,1] \to D_\varepsilon$ tal que $\gamma(0) = u_0$, $\gamma(1) = u_1$. Então $J(\gamma(0)) = J(u_0)$ e $J(\gamma(1)) = J(u_1)$, com $u_0 \in \Omega$ e $u_1 \in X \setminus \overline{\Omega}$. Pelo Teorema da Alfândega $\gamma([0,1]) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Logo existe $t_1 \in (0,1)$ tal que $\gamma(t_1) \in \partial\Omega$ e aí, usando a hipótese, $J(\gamma(t_1)) > \max\{J(u_0), J(u_1)\} > c$. Por outro lado $\gamma([0,1]) \subset D_\varepsilon$ e portanto, em particular, $J(\gamma(t_1)) < c - \varepsilon$, para todo $t \in [0,1]$, o que é uma contradição.

(iii) $\inf_{u\in\partial D_\varepsilon} J(u) = c-\varepsilon$. De fato, seja $q \in \partial D_\varepsilon$. Então, existe $(u_n)\subset X$ tal que $J(u_n) < c-\varepsilon$ e existe $(v_n)\subset X$ tal que $J(v_n) > c-\varepsilon$, com $u_n \to q$ e $v_n \to q$ (para isto, basta tomar pontos da bola $B_{\delta_n}(q)$ em que $\delta_n \to 0$). Daí $J(q) \leq c-\varepsilon$ e $J(q)\geq c-\varepsilon$ seguindo, portanto, o resultado.

Com argumento análogo ao item (ii), é fácil ver que $u_1 \notin C_X(D_\varepsilon)$. De fato, dado $u^* \in C_X(D_\varepsilon)$, se $u^*\in D_\varepsilon$ o caso é semelhante ao item (ii). Caso contrário, existe $t\in[0,T(u^*))$ tal que $u(t,u^*)\in D_\varepsilon$. Mas então $J(u^*) \leq J(u(t,u^*)) < c-\varepsilon$ e o item (ii) nos leva a mesma contradição. Portanto $C_X(D_\varepsilon)\neq X$. Pelo Teorema 1.6, tomando $M = X$ e $D = D_\varepsilon$ temos que $c_\varepsilon = \inf_{u\in\partial C_X(D_\varepsilon)} J(u)$ é um valor crítico de J e além disso, $c_\varepsilon \geq \inf_{u\in\partial D_\varepsilon} J(u) = c-\varepsilon$. Desde que $u_0 \in C_X(D_\varepsilon)$ e $u_1 \notin C_X(D_\varepsilon)$, para qualquer $h\in\Gamma$,

$$\max_{t\in[0,1]} J(h(t)) \geq \inf_{u\in\partial D_\varepsilon} J(u) = c_\varepsilon.$$

Portanto, $c-\varepsilon \leq c_\varepsilon \leq c$. Desde que ε é arbitrário, a condição (P. S.) garante que c é um valor crítico de J e , portanto, a prova está completa. ■

O próximo teorema afirma que o Teorema do Passo da Montanha é válido num subconjunto fechado de um espaço de Banach.

Teorema 1.8 *Seja X um espaço de Banach e consideremos $M\subset X$ fechado, conexo por caminho e localmente conexo por caminho. Consideremos ainda que M é um conjunto invariante de fluxo decrescente, Ω é um subconjunto aberto de M, $u_0\in\Omega$ e $u_1 \in M\setminus\overline{\Omega}$. Se*

$$\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \inf_{u\in\partial_M\Omega} J(u),$$

e J satisfaz a condição (P. S.) *em M, então*

$$c = \inf_{h\in\Gamma_M}\max_{t\in[0,1]} J(h(t))$$

é um valor crítico de J e existe ao menos um ponto crítico $u_1\in M$ tal que $J(u_1) = c$, onde

$$\Gamma_M = \{h : h : [0,1]\to M \text{ é contínua, e } h(0) = u_0,\ h(1) = u_1\}.$$

Prova. A prova é análoga a usada no Teorema 1.7. Precisamos apenas substituir X por M e ∂ por ∂_M. ■

O próximo lema será usado para obtermos uma outra conseqüência do Teorema 1.6.

Lema 1.6 *Suponha que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, M é um subconjunto fechado e convexo de $\mathcal{H}$ e $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 tal que $J'(u)$ pode ser expresso na forma $J'(u) = u - Au$ com $A(\partial M) \subset M$. Então existe um campo pseudo-gradiente de vetores W para J tal que M é um conjunto invariante de fluxo decrescente para J determinado por W.*

Prova. Seja $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \setminus K$, onde $K = \{u \in \mathcal{H} : J'(u) = 0\}$. Para $u^* \in \mathcal{H}_0$, defina

$$U(u^*) = \left\{ u \in \mathcal{H}_0 : \|Au - Au^*\| < \frac{1}{8}\|J'(u^*)\| \quad \text{e} \quad \|J'(u)\| > \frac{1}{2}\|J'(u^*)\| \right\},$$

e note que $U(u^*) \neq \emptyset$ pois $u^* \in U(u^*)$. Então, pela própria construção, a coleção $\{U(u^*) : u^* \in \mathcal{H}_0\}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{H}_0$. Pelo Teorema de Stone [28], existe uma cobertura aberta localmente finita de $\mathcal{H}_0$, $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, que é um refinamento da cobertura $\{U(u^*) : u^* \in \mathcal{H}_0\}$.

Consideremos, para $\lambda \in \Lambda$, as funções $\alpha_\lambda, \phi_\lambda : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}$ dadas por,

$$\alpha_\lambda(u) = d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda)$$

e

$$\phi_\lambda(u) = \frac{\alpha_\lambda(u)}{\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(u)}.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

(i) α_λ é uma contração fraca, isto é,

$$|d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) - d(v, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda)| \leq d(u, v).$$

De fato, devemos mostrar que

$$-d(u, v) \leq d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) - d(v, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) \leq d(u, v).$$

Ora, para todo $x \in \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda$, temos

$$d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) \leq d(u, x) \leq d(u, v) + d(v, x),$$

ou seja,

$$d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) - d(u, v) \leq d(v, x).$$

Esta desigualdade valendo para todo $x \in \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda$, concluímos que

$$d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) - d(u,v) \leq d(v, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda),$$

ou, o que é o mesmo,

$$d(u, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) - d(v, \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda) \leq d(u,v).$$

Este é um dos lados da desigualdade que queríamos demonstrar. O outro lado decorre daí, invertendo os papéis entre u e v.

(ii) Claramente $0 \leq \phi_\lambda(u) \leq 1$ e, particularmente, se $u \in \mathcal{H}_0 \setminus W_\lambda$ então $\phi_\lambda(u) = 0$.

(iii) ϕ_λ é uma aplicação localmente Lipschitziana. De fato, dado $u_0 \in \mathcal{H}_0$, tome V_0 vizinhança de u_0 e $W_{k_1}, \cdots, W_{k_m}$ os elementos da cobertura $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que intersectam V_0. Sejam $u, v \in V_0$. Note que $\alpha_\lambda(u) = 0$ se $\lambda \notin \{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$. Caso contrário temos

$$\begin{aligned} |\phi_\lambda(u) - \phi_\lambda(v)| &= \left| \frac{\alpha_\lambda(u)}{\sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(u)} - \frac{\alpha_\lambda(v)}{\sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(v)} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha_\lambda(u) \cdot \sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(v) - \alpha_\lambda(v) \cdot \sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(u)}{\sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(u) \cdot \sum\limits_{k\in\Lambda} \alpha_k(v)} \right|. \end{aligned}$$

Por comodidade façamos

$$P := \left(\sum_{k\in\Lambda} \alpha_k(u) \cdot \sum_{k\in\Lambda} \alpha_k(v) \right)^{-1}.$$

E daí segue-se

$$\begin{aligned} |\phi_\lambda(u) - \phi_\lambda(v)| &\leq P \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_\lambda(u)\alpha_k(v) - \alpha_\lambda(v)\alpha_k(u)| \\ &= P \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_\lambda(u)\alpha_k(v) - \alpha_\lambda(v)\alpha_k(v) + \alpha_\lambda(v)\alpha_k(v) - \alpha_\lambda(v)\alpha_k(u)| \\ &= P \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_k(v)[\alpha_\lambda(u) - \alpha_\lambda(v)] + \alpha_\lambda(v)[\alpha_k(v) - \alpha_k(u)]|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |\phi_\lambda(u) - \phi_\lambda(v)| &\leq P \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_k(v)[\alpha_\lambda(u) - \alpha_\lambda(v)]| + P \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_\lambda(v)[\alpha_k(v) - \alpha_k(u)]| \\ &= P|\alpha_\lambda(u) - \alpha_\lambda(v)| \cdot \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_k(v)| + P\alpha_\lambda(v) \cdot \sum_{k\in\Lambda} |\alpha_k(v) - \alpha_k(u)|. \end{aligned}$$

Agora usamos o fato de α_λ, com $\lambda \in \Lambda$, ser uma contração fraca vem

$$
\begin{aligned}
|\phi_\lambda(u)-\phi_\lambda(v)| &\leq P|u-v|\cdot\sum_{k\in\Lambda}|\alpha_k(v)|+P\alpha_\lambda(v)\cdot\sum_{k\in\Lambda}|v-u|\\
&=P|u-v|\cdot\sum_{k\in\Lambda}|\alpha_k(v)|+P|u-v|\cdot\sum_{k\in\Lambda}\alpha_\lambda(v)\\
&=|u-v|\cdot P\sum_{k\in\Lambda}[\alpha_k(v)+\alpha_\lambda(v)]\\
&=C\cdot|u-v|.
\end{aligned}
$$

Para $\lambda\in\Lambda$ tal que $W_\lambda\cap\partial M\neq\emptyset$, fixe $a_\lambda\in W_\lambda\cap\partial M$ e defina $B:\mathcal{H}_0\to H$ como

$$
Bu=\sum_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(u)Aa_\lambda,\quad u\in\mathcal{H}_0.
$$

Então B é localmente Lipschitz e portanto $W:=I-B$ também satisfaz (pois I e B satisfazem). Para qualquer $u\in\mathcal{H}_0$, existe apenas um número finito de W_λ, que denotaremos W_{λ_i} $(i=1,2,...,n(u))$, os quais contém u. Para cada λ_i $(i=1,2,...,n(u))$, existe $u^*_{\lambda_i}\in\mathcal{H}_0$, tal que $W_{\lambda_i}\subset U(u^*_{\lambda_i})$. Portanto, para $i=1,2,...,n(u)$, temos

$$
\|Au-Aa_{\lambda_i}\|\leq\|Au-Au^*_{\lambda_i}\|+\|Au^*_{\lambda_i}+Aa_{\lambda_i}\|<\frac{1}{4}\|J'(u^*_\lambda)\|,
$$

isto é,

$$
\|Au-Aa_{\lambda_i}\|\leq\frac{1}{2}\|J'(u)\|. \tag{1.4}
$$

Desta desigualdade e usando que $\sum_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(u)=1$ obtemos

$$
\begin{cases}
\|W(u)\|\leq 2\|J'(u)\|, u\in\mathcal{H}_0,\\
2\langle J'(u),W(u)\rangle\geq\|J'(u)\|^2, u\in\mathcal{H}_0.
\end{cases}
$$

De fato, para provarmos a primeira desigualdade, notemos que

$$
\|W(u)\|=\|(I-B)(u)\|=\|u-Bu\|.
$$

Usando a desigualdade triangular obtemos

$$
\|W(u)\|\leq\|u-Au\|+\|Au-Bu\|=\|u-Au\|+\left\|Au-\sum_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(u)\right\|,
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\|W(u)\| &\leq \|u - Au\| + \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)Au - \sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)Aa_\lambda \right\| \\
&= \|u - Au\| + \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} [\phi_\lambda(u)Au - \phi_\lambda(u)Aa_\lambda] \right\| \\
&= \|u - Au\| + \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)[Au - Aa_\lambda] \right\|.
\end{aligned}
$$

Novamente pela desigualdade triangular obtemos

$$
\|W(u)\| \leq \|u - Au\| + \sum_{\lambda\in\Lambda} \|\phi_\lambda(u)[Au - Aa_\lambda]\|
$$

e finalmente, usando (1.4) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|W(u)\| &\leq \|u - Au\| + \sum_{\lambda\in\Lambda} \left\| \phi_\lambda(u)\frac{1}{2}\|J'(u)\| \right\| \\
&\leq \|J'(u)\| + \frac{1}{2}\|J'(u)\| \sum_{\lambda\in\Lambda} |\phi_\lambda(u)| \\
&= \frac{3}{2}\|J'(u)\| \\
&\leq 2\|J'(u)\|.
\end{aligned}
$$

Para obtermos a segunda vejamos que,

$$
\begin{aligned}
\|J'(u)\|^2 =& \langle J'(u), J'(u)\rangle \\
=& \langle J'(u), u - Au\rangle \\
=& \langle J'(u), u - Bu + Bu - Au\rangle \\
=& \langle J'(u), u - Bu\rangle + \langle J'(u), Bu - Au\rangle \\
=& \langle J'(u), W(u)\rangle + \left\langle J'(u), \sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)(Aa_\lambda - Au) \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade triangular e (1.4), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}\|J'(u)\|^2 \leq & \langle J'(u), W(u)\rangle + \|J'(u)\| \cdot \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)(Aa_\lambda - Au) \right\| \\ \leq & \langle J'(u), W(u)\rangle + \|J'(u)\| \cdot \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u)\|Aa_\lambda - Au\| \right) \\ \leq & \langle J'(u), W(u)\rangle + \|J'(u)\| \cdot \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \phi_\lambda(u) \cdot \frac{1}{2} \cdot \|J'(u)\| \right) \\ = & \langle J'(u), W(u)\rangle + \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2\end{aligned}$$

e daí segue a segunda parte. Assim, mostramos que W é, de fato, um campo pseudo-gradiente de vetores para J.

Agora consideremos o seguinte problema de valor inicial associado ao campo pseudo-gradiente W:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= -W(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u(t_2, u_0). \end{cases}$$

A seguir, provaremos que M é um c.i.f.d. para J determinado por W. Para tanto faremos uso do seguinte fato:

$$B(\partial M \cap \mathcal{H}_0) \subset M. \tag{1.5}$$

Consideremos que $u_0 \in M \setminus K$. Se existisse $0 < t_1 < T(u_0)$ tal que $u(t_1, u_0) \notin M$ então existiria um número $t_2 : 0 \leq t_2 \leq t_1$ tal que $u(t_2, u_0) \in \partial M$ e $u(t, u_0) \notin M$ para $t_2 \leq t \leq t_1$. Desde que

$$u + \lambda(-W(u)) = (1-\lambda)u + \lambda Bu \in M$$

para $u \in \partial M \cap \mathcal{H}_0$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, de acordo com [11], existe um número $\delta > 0$ tal que $u(t, u(t_2, u_0)) \in M$ para $0 \leq t < \delta$. Segue-se que $u(t, u_0) \in M$ para $t_2 \leq t < t_2 + \delta$, contradizendo a definição de t_2. Portanto, para $u_0 \in M \setminus K$, temos que $\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset M$, mostrando que M é um c.i.f.d.

Finalmente, vamos mostrar que (1.5) ocorre. Com efeito, se $u \in \partial M \cap \mathcal{H}_0$ e $\phi_\lambda(u) \neq 0$ para algum $\lambda \in \Lambda$, então $\alpha_\lambda(u) \neq 0$, isto é, $u \in W_\lambda$ e assim $u \in W_\lambda \cap \partial M$. Isto significa que $W_\lambda \cap \partial M \neq \emptyset$ e portanto $a_\lambda \in W_\lambda \cap \partial M$. Mas desde que $A(\partial M) \subset M$

temos que $Aa_\lambda \in M$. Então, sendo $\sum_{\lambda\in\Lambda}\phi_\lambda(u) = 1$, Bu é uma combinação convexa de elementos de M e desde que M é convexo concluímos que $Bu \in M$. ■

Teorema 1.9 *Considere $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, M um subconjunto fechado e convexo de $\mathcal{H}$ e $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que $J'(u)$ pode ser expresso na forma $J'(u) = u - Au$, com $A(\partial M) \subset M$. Consideremos também que J satisfaz a condição* (P. S.) *em M, que Ω é um subconjunto aberto de M e existem dois pontos, $u_0 \in \Omega$, $u_1 \in M \setminus \overline{\Omega}$ tais que*

$$\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \inf_{u\in\partial_M\Omega} J(u).$$

Então

$$c = \inf_{h\in\Gamma_M} \max_{t\in[0,1]} J(h(t))$$

é um valor crítico de J e existe ao menos um ponto crítico $\widetilde{u} \in M$ tal que $J(\widetilde{u}) = c$ e $J'(\widetilde{u}) = 0$, onde

$$\Gamma_M = \{h : h : [0,1] \to M \text{ é contínua, e } h(0) = u_0,\ h(1) = u_1\}.$$

Prova. O Lema 1.6 garante a existência de um campo pseudo-gradiente W para J tal que o conjunto M é invariante de fluxo decrescente para J determinado por W. Portanto, o Teorema 1.8 garante a existência de pelo menos um ponto crítico $\widetilde{u} \in M$ tal que $J(\widetilde{u}) = c$ e $J'(\widetilde{u}) = 0$. ■

Capítulo 2

Multiplicidade dos Pontos Críticos

Neste capítulo, daremos algumas condições suficientes para garantir a existência de pelo menos quatro pontos críticos para um funcional J de classe C^1. Analisaremos separadamente os casos em que J está definido em um espaço de Banach X e o em que está definido em um espaço de Hilbert H. Suporemos também, que W é um campo pseudo-gradiente de vetores para J.

O seguinte resultado técnico será útil na prova do próximo teorema.

Lema 2.1 *Sejam* $\widetilde{X} = \{(t,s) : 0 \leq t, s \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{O}$ *um subconjunto aberto de* $\widetilde{X}$ *tal que*

$$\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{O},$$

$$\{(t,1) : 0 \leq t \leq 1\} \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Então existe uma componente conexa Γ *de* $\partial\mathcal{O}$*, a fronteira de* $\mathcal{O}$ *em* $\widetilde{X}$*, intersectando ambos* $\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\}$ *e* $\{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\}$*, isto é,*

$$\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma \neq \emptyset,$$

$$\{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Prova. Para a demonstração deste resultado vide o **Apêndice**, na página 90. ∎

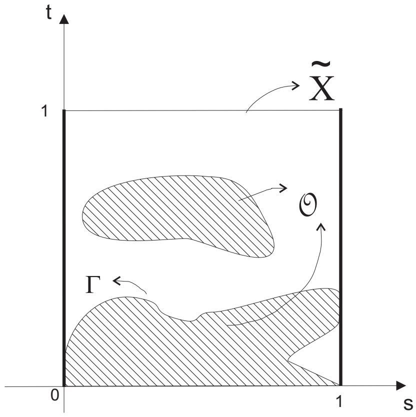

Figura 2.1: Ilustração do Lema 2.1

2.1 Caso Banach

Teorema 2.1 *Seja X um espaço de Banach e suponhamos que:*

- *o funcional J satisfaz a condição* (P. S.) *em X;*
- *D_1 e D_2 são subconjuntos abertos e conexos de X, invariantes de fluxo decrescente para J determinado por W;*
- $\partial D_1 \subset C_X(D_1)$
- $\partial D_2 \subset C_X(D_2)$
- $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Além disso, suponhamos que existem um caminho $h : [0,1] \to X$ e um ponto $w \in D_1 \cap D_2$ tais que

$$h(0) \in D_1 \setminus D_2,\ h(1) \in D_2 \setminus D_1,$$
$$sh(0) + (1-s)w \in D_1,\ sh(1) + (1-s)w \in D_2, \quad se \quad 0 \leq s \leq 1,$$

e

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(h(t)). \tag{2.1}$$

Então J tem ao menos quatro pontos críticos, u_1, u_2, u_3 e u_4, localizados do seguinte modo: $u_1 \in D_1 \cap D_2$, $u_2 \in D_1 \setminus \overline{D}_2$, $u_3 \in D_2 \setminus \overline{D}_1$ e $u_4 \in X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$.

Prova. Começaremos provando as quatro afirmações a seguir:

Afirmação 1: Os conjuntos $\overline{D}_1$ e $\overline{D}_2$ são fechados, conexos e invariantes de fluxo decrescente para J.

Com efeito, desde que os conjuntosD_1 e D_2 são invariantes de fluxo decrescente, basta mostrar que dado $u_0 \in \partial D_1$ temos $\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset \overline{D}_1$. Para isso, suponha que existe $t' \in [0, T(u_0))$ tal que $u(t', u_0) \notin \overline{D}_1$, isto é, $u(t', u_0) \in X \setminus \overline{D}_1$. Então, desde que $X \setminus \overline{D}_1$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u(t', u_0)) \subset X \setminus \overline{D}_1$. Pela continuidade do fluxo, existe uma vizinhança B_δ, $\delta > 0$ de u_0 e um homeomorfismo $\Phi := u(t, \cdot)$ de B_δ em B_ε, tal que $\Phi(B_\delta(u_0)) \subset B_\varepsilon(u(t', u_0))$. Daí, como $u_0 \in \partial D_1$, podemos tomar $u^* \in B_\delta \cap D_1$ e, portanto, existe t' tal que $u(t', u^*) \in X \setminus \overline{D}_1$. Mas isto é uma contradição, pois D_1 é um c.i.f.d. Para D_2 a demonstração é análoga.

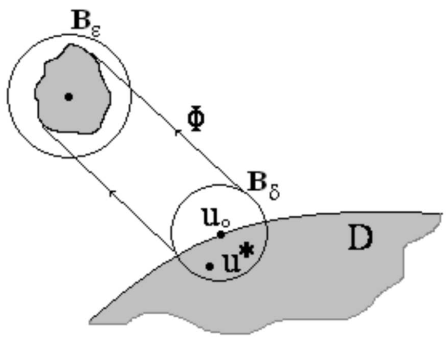

Figura 2.2: Idéia da contradição.

Afirmação 2: Se D_1 e D_2 são ambos c.i.f.d. então $D_1 \cap D_2$ também o é.

De fato, dado $u_0 \in D_1 \cap D_2$, temos que, $u_0 \in D_1$ e $u_0 \in D_2$. Então

$$\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset D_1 \text{ e } \{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset D_2.$$

Logo $\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset D_1 \cap D_2$.

Afirmação 3: Se D_1 e D_2 são ambos c.i.f.d. então $C_X(D_1 \cap D_2) = C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$.

Com efeito, dado $u_0 \in C_X(D_1 \cap D_2)$ temos que existe $t' \in [0, T(u_0))$ tal que $u(t', u_0) \in D_1 \cap D_2$, isto é, $u(t', u_0) \in D_1$ e $u(t', u_0) \in D_2$. Daí $u_0 \in C_X(D_1)$ e $u_0 \in C_X(D_2)$, ou seja, $u_0 \in C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$, mostrando que $C_X(D_1 \cap D_2) \subset C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$. Para a outra inclusão, dado $u_0 \in C_X(D_1) \cap C_X(D_2)$ temos que $u_0 \in C_X(D_1)$ e $u_0 \in C_X(D_2)$. Daí existem $t_1, t_2 \in [0, T(u_0))$ tais que $u(t_1, u_0) \in D_1$ e $u(t_2, u_0) \in D_2$. Logo, para $\max\{t_1, t_2\} \leq t < T(u_0)$ temos $u(t, u_0) \in D_1 \cap D_2$, isto é,

$u_0 \in C_X(D_1 \cap D_2)$.

Afirmação 4: Não existem pontos críticos em ∂D_1 e nem em ∂D_2, isto é, $\partial D_1 \cap K = \emptyset$ e $\partial D_2 \cap K = \emptyset$. Com efeito, para $i \in \{1, 2\}$, se fosse $\partial D_i \cap K \neq \emptyset$, existiria algum $u_0 \in \partial D_i \cap K$ ponto crítico de J. Então o fluxo em u_0 seria nulo, não existindo $0 \leq t < T(u_0)$ tal que $u(t, u_0) \in D_i$. Mas isto é uma contradição com a hipótese $\partial D_i \subset C_X(D_i)$.

Agora mostraremos a existência dos quatro pontos críticos. Para isto nos valeremos de quatro etapas, em cada uma das quais chegaremos a um ponto crítico numa localização especificada na figura abaixo:

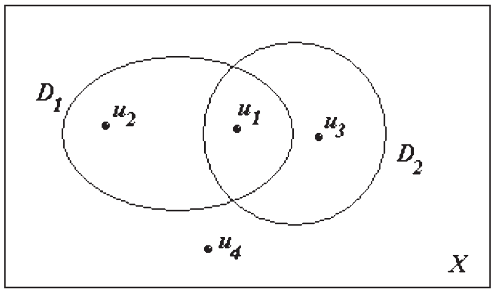

Figura 2.3: Localização dos Pontos Críticos.

1ª Etapa: Vamos mostrar que J tem um ponto crítico $u_1 \in D_1 \cap D_2$.

Pelas Afirmações 1 e 2, $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ é um c.i.f.d. fechado. Por hipótese,

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > -\infty.$$

Logo, pelo Teorema 1.4, J tem um ponto crítico $u_1 \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$ e $\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u)$ é o valor crítico associado.

Pela Afirmação 4, J não tem pontos críticos em $\partial D_1 \cup \partial D_2$. E dessa forma concluímos que $u_1 \in D_1 \cap D_2$.

2ª Etapa: Vamos mostrar que f tem um ponto crítico $u_2 \in D_1 \setminus D_2$.

Nossa intenção é usar o Teorema 1.6 com $M = \overline{D}_1$, $D = \overline{D}_1 \cap D_2$. Neste intuito, precisamos mostrar os seguintes fatos, que são as hipóteses do Teorema 1.6:

(i) $C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2) \neq \overline{D}_1$. Com efeito, temos que $\overline{D}_1 \cap D_2$ é um aberto de $\overline{D}_1$. Novamente, pelas Afirmações 1 e 2, $\overline{D}_1 \cap D_2$ é um c.i.f.d. Desde que, por hipótese, $h(0) \in D_1 \setminus D_2$ e, em particular,

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > J(h(0)) \tag{2.2}$$

afirmamos que

$$h(0) \in \overline{D}_1 \setminus C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2).$$

De fato, suponha que existisse t tal que $u(t, h(0)) \in \overline{D}_1 \cap D_2$. Então, usando a Observação 1.2, teríamos

$$J(h(0)) = J(u(0, h(0))) > J(u(t, h(0))) \geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u)$$

que é uma contradição com (2.2). Portanto, $C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2) \neq \overline{D}_1$.

(ii) $\inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right]} J(u) > -\infty$. Com efeito, fazendo $M = \overline{D}_1$ e $D = \overline{D}_1 \cap D_2$ no Lema 1.5 temos que

$$C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2) \quad \text{é um subconjunto aberto de} \quad \overline{D}_1 \tag{2.3}$$

e mais,

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right]} J(u) &\geq \inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)} J(u) \\ &\geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) \\ &> -\infty. \end{aligned}$$

Observamos que a segunda desigualdade acima é verdadeira porque aumentamos o conjunto.

Agora podemos usar o Teorema 1.6, com $M = \overline{D}_1$ e $D = \overline{D}_1 \cap D_2$, obtendo

$$\inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right]} J(u) > \inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)} J(u) > -\infty$$

e mais, $\inf_{u \in \partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right]} J(u)$ é valor crítico de J e existe ao menos um ponto crítico u_2 em $\partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right]$. Vamos mostrar que $u_2 \notin \overline{D}_1 \cap D_2$. Com efeito, observemos que como

$$\partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right] \subset \overline{D}_1 \quad \text{e} \quad \partial D_1 \cap K = \emptyset.$$

temos que $u_2 \in D_1$. Além disso, (2.3) garante que pelo primeiro item do Lema 1.5 temos

$$\partial_{\overline{D}_1}\left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right] \cap \left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right] = \emptyset,$$

e por definição,

$$\overline{D}_1 \cap D_2 \subset \left[C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2)\right].$$

Portanto, concluímos que

$$\left[\partial_{\overline{D}_1}(C_{\overline{D}_1}(\overline{D}_1 \cap D_2))\right] \cap (\overline{D}_1 \cap D_2) = \emptyset.$$

Somando-se a isso que, pela Afirmação 4, $\partial D_2 \cap K = \emptyset$ concluímos que $u_2 \in D_1 \setminus \overline{D}_2$, como queríamos demonstrar.

3ª Etapa: Para mostrar que J tem um ponto crítico $u_3 \in D_2 \setminus \overline{D}_1$ usamos um raciocínio análogo ao da 2ª Etapa.

4ª Etapa: Vamos mostrar que J tem um ponto crítico em $X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$.

Seja $\widetilde{X}$ o quadrado definido no Lema 2.1 e defina a aplicação $G : \widetilde{X} \to X$ como

$$G(t,s) = sh(t) + (1-s)w; \quad 0 \leq s \leq 1; \quad 0 \leq t \leq 1$$

onde $h(t)$ e w são como nas hipóteses. Notemos que G associa a cada $t \in [0,1]$ o segmento que une os pontos $h(t)$ e w. Então G é contínua de $\widetilde{X}$ em X, pois $h(t)$, s e $(1-s)$ são contínuas.

Consideremos

$$V = \left\{(t,s) \in \widetilde{X} : G(t,s) \in C_X(D_1 \cap D_2)\right\} = G^{-1}\left(C_X(D_1 \cap D_2)\right).$$

No intuito de usar o Lema 2.1, mostraremos que para V valem os seguintes fatos:

(i) V é subconjunto aberto de $\widetilde{X}$. De fato, pelo Lema 1.5, o conjunto $C_X(D_1 \cap D_2)$ é um subconjunto aberto de X. Como $V = G^{-1}\left(C_X(D_1 \cap D_2)\right)$ e a aplicação G é contínua de $\widetilde{X}$ em X, temos que V é a imagem inversa de um aberto por uma aplicação contínua.

(ii) $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset V$. Com efeito, como

$$G(t,0) = 0h(0) + (1-0)w = w \in D_1 \cap D_2$$

e $D_1 \cap D_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$ temos que $(t,0) \in V$, para todo $0 \leq t \leq 1$.

(iii) $\{(t,1) : 0 \leq t \leq 1\} \cap V = \emptyset$. Com efeito, observemos que pela condição (2.1), existe $\eta > 0$ tal que

$$\inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > \sup\{J(G(t,s)) : (t,s) \in [0,1] \times [1-\eta, 1]\}.$$

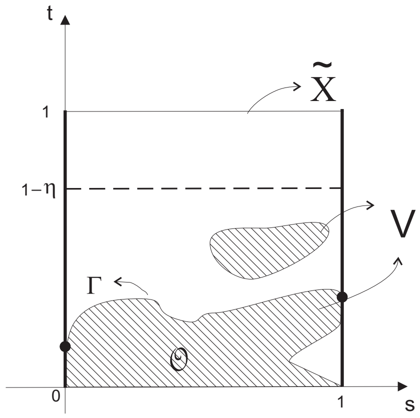

Figura 2.4: Idéia da Componente Conexa

De fato, notemos que $[0,1]\times[0,1]$ é um compacto e $J(G(t,s))$ é contínua. Então $J(G(t,s))$ é uniformemente contínua. Além disso, $J(h(t)) = J(G(t,1))$. Sendo J contínua em $G(t,1)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ (note que pela continuidade uniforme, η não depende de ε) tal que para $s \in [1-\eta, 1]$ e $t \in [0,1]$ tem-se

$$|J(G(t,s)) - J(G(t,1))| < \varepsilon.$$

Daí segue-se que

$$J(G(t,s)) < J(G(t,1)) + \varepsilon \leq \sup_{t\in[0,1]} J(G(t,1)) + \varepsilon$$

e portanto, tomando o supremo para $(t,s) \in [0,1]\times[1-\eta,1]$, otemos

$$\begin{aligned}\sup\{J(G(t,s)) : (t,s) \in [0,1]\times[1-\eta,1]\} &\leq \sup_{t\in[0,1]} J(G(t,1)) + \varepsilon\\ &= \sup_{t\in[0,1]} J(h(t)) + \varepsilon\\ &< \inf_{u\in\overline{D}_1\cap\overline{D}_2} J(u) + \varepsilon,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\{J(G(t,s)) : (t,s) \in [0,1]\times[1-\eta,1]\} < \inf_{u\in\overline{D}_1\cap\overline{D}_2} J(u). \tag{2.4}$$

Afirmamos que

$$V \cap \{(t,s) : t \in [0,1], s \in [1-\eta,1]\} = \emptyset.$$

Com efeito, suponha que existisse $u^* = (t^*, s^*) \in V$ com $t^* \in [0,1]$ e $s^* \in [1-\eta, 1]$. Então $G(u^*) \in C_X(D_1 \cap D_2)$, ou seja, existiria $t' \in [0, T(G(u^*)))$ tal que

$u(t', G(u^*)) \in D_1 \cap D_2$. Mas então, lembrando que J é monótona decrescente e usando 2.4, obteríamos

$$\begin{aligned} J(G(u^*)) = J(u(0, G(u^*)) &\geq J(u(t', G(u^*))) \\ &\geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) \\ &> \sup\{J(G(t,s)) : (t,s) \in [0,1] \times [1-\eta, 1]\} \end{aligned}$$

e isso é uma contradição. Daí resulta claramente que $V \cap \{(t,s) : t \in [0,1], s \in [1-\eta, 1]\} = \emptyset$, como queríamos demonstrar.

Seja $\mathcal{O}$ a componente conexa de V contendo $(0,0)$. Então $\mathcal{O}$ é um subconjunto aberto de $\widetilde{X}$ e satisfaz $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{O}$ uma vez que as componentes conexas são disjuntas e o segmento $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$ é conexo. Além disso, $\{(t,1) : 0 \leq t \leq 1\} \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Portanto, pelo Lema 2.1, existe uma componente conexa Γ de $\partial\mathcal{O}$ intersectando ambos $\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\}$ e $\{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\}$. Além disso, valem os seguintes fatos:

(a) $G(\Gamma)$ é conexo pois é a imagem de um conexo por uma aplicação contínua;

(b) $G(\Gamma) \cap \{sh(0) + (1-s)w : 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$, isto é, $G(\Gamma) \cap \{G(0,s) : 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$;

(c) $G(\Gamma) \cap \{sh(1) + (1-s)w : 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$, isto é, $G(1,s) : 0 \leq s \leq 1\} \neq \emptyset$.

Nosso próximo objetivo é mostrar que $G(\Gamma) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$. Considerando que, por hipótese, $w \in D_1 \cap D_2$, $h(0) \in D_1$, $h(1) \in D_2$ e que D_1, D_2 são conjuntos convexos, temos que

$$\{sh(0) + (1-s)w : 0 \leq s \leq 1\} \subset D_1 \quad \text{e} \quad \{sh(1) + (1-s)w : 0 \leq s \leq 1\} \subset D_2.$$

Logo, os itens (b) e (c) acima garantem que $G(\Gamma)$ intersecta ambos, D_1 e D_2, isto é,

$$G(\Gamma) \cap D_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad G(\Gamma) \cap D_2 \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Desde que $\mathcal{O}$ é uma componente conexa de V, temos que $\partial\mathcal{O} \subset \partial V$ e consequentemente $\Gamma \subset \partial\mathcal{O} \subset \partial V$ e, portanto,

$$G(\Gamma) \subset G(\partial V). \tag{2.6}$$

Afirmação 5: $G(\partial V) \subset \partial(G(V))$. De fato, dado $u_0 \in G(\partial V)$ devemos mostrar que $u_0 \in \partial(G(V))$, isto é, qualquer bola centrada em u_0 intersecta tanto $G(V)$ quanto seu complementar. Mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(u_0) \cap G(V) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_\varepsilon(u_0) \cap (X \setminus G(V)) \neq \emptyset.$$

Ora, se $u_0 \in G(\partial V)$, então existe $p \in \partial V$ tal que $G(p) = u_0$. Como G é contínua, dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $G(B_\delta(p)) \subset B_\eta(u_0)$. Como $p \in \partial V$, dois casos podem ocorrer:

Caso 1: $q_1 \in B_\delta(p) \setminus \overline{V}$. Nesta situação temos que $G(q_1) \notin C_X(D_1 \cap D_2)$, ou seja, $G(q_1) \in X \setminus G(V)$, isto é, $B_\eta(u_0) \cap (X \setminus G(V)) \neq \emptyset$;

Caso 2: se $q_2 \in B_\delta(p) \cap V$, temos que $G(q_2) \in C_X(D_1 \cap D_2)$, isto é, $B_\eta(u_0) \cap G(V) \neq \emptyset$. Isto prova a Afirmação.

Usando a Afirmação 5 e a definição de V temos que

$$G(\partial V) \subset \partial(G(V)) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2).$$

Então, por (2.6) temos que $G(\Gamma) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$, como queríamos mostrar. Notemos que isto implica que $G(\Gamma) \cap C_X(D_1 \cap D_2) = \emptyset$, pois $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto.

Os dois itens abaixo são conseqüências diretas do que fizemos até aqui e fornecem propriedades do conjunto $G(\Gamma)$.

(i) $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$. Com efeito, desde que, por hipótese, $\partial D_1 \subset C_X D_1$ e $\partial D_2 \subset C_X D_2$ usando a Afirmação 3, temos

$$\begin{aligned} \partial D_1 \cap \partial D_2 &\subset C_X(D_1) \cap C_X(D_2) \\ &= C_X(D_1 \cap D_2) \end{aligned}$$

e por definição temos $D_1 \cap D_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$.

(ii) $G(\Gamma) \cap (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = \emptyset$. Para isto basta lembrar que $G(\Gamma) \cap C_X(D_1 \cap D_2) = \emptyset$.

De (2.5) temos que $G(\Gamma) \cap D_1 \neq \emptyset$ e pelo item (ii) acima, $G(\Gamma) \cap (\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = \emptyset$. Daí vemos que $G(\Gamma) \cap (D_1 \setminus \overline{D}_2) \neq \emptyset$, isto é, $G(\Gamma)$ intersecta $D_1 \setminus \overline{D}_2$. Analogamente podemos provar que $G(\Gamma)$ intersecta $D_2 \setminus \overline{D}_1$.

Suponha que Λ seja a componente conexa de $\partial C_X(D_1 \cap D_2)$ que contém $G(\Gamma)$. Então, claramente Λ intersecta ambos $D_1 \setminus \overline{D}_2$ e $D_2 \setminus \overline{D}_1$. Agora consideremos os

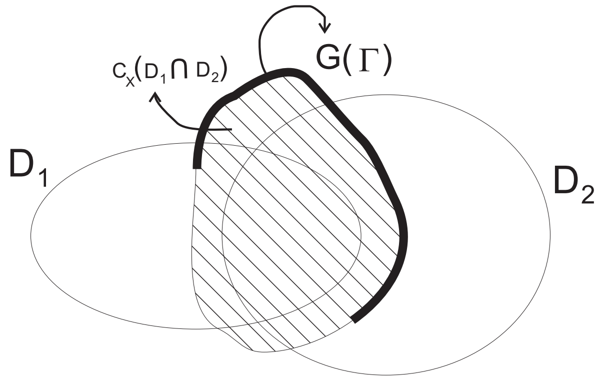

Figura 2.5: Idéia intuitiva do ponto exterior a $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$

conjuntos dos pontos de Λ que estão ou estarão em $D_1 \setminus D_2$ ou $D_2 \setminus D_1$. Mais precisamente

$$\Lambda_1 = \big\{u_0 \in \Lambda : u(t', u_0) \in D_1 \setminus \overline{D}_2 \quad \text{para algum} \quad t' \in \big[0, T(u_0)\big)\big\}$$

$$\Lambda_2 = \big\{u_0 \in \Lambda : u(t', u_0) \in D_2 \setminus \overline{D}_1 \quad \text{para algum} \quad t' \in \big[0, T(u_0)\big)\big\}$$

Notemos que Λ_1 e Λ_2 são subconjuntos não vazios uma vez que $G(\Gamma)$ intersecta $D_1 \setminus \overline{D}_2$ e $D_2 \setminus \overline{D}_1$. Além disso, Λ_1 e Λ_2 são disjuntos. De fato, se existisse $u^* \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ teríamos uma contradição para qualquer das seguintes possibilidades:

(a) $u_0 \in D_1 \setminus \overline{D}_2$ e $u_0 \in D_2 \setminus \overline{D}_1$ é uma contradição óbvia;

(b) Existem t' e t'' tais que $u(t', u_0) \in D_1 \setminus \overline{D}_2$ e $u(t'', u_0) \in D_2 \setminus \overline{D}_1$. Para $t = max\{t', t''\}$ temos um contradição. Por exemplo, se $t = t'$ então $u(t'', u_0) \in D_2 \setminus \overline{D}_1$ e derveríamos ter $u(t', u_0) \in D_2$ pois D_2 é um c.i.f.d.;

(c) $u_0 \in D_1 \setminus \overline{D}_2$ e existe t' tal que $u(t', u_0) \in D_2 \setminus \overline{D}_1$. Contradição pois D_1 é, por hipótese, um c.i.f.d.

Desde que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ e Λ é conexo, temos que

$$\Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \neq \emptyset.$$

Tome, então, $u_0 \in \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$. Se $u_0 \in K$ então a demonstração está finalizada pois u_0 é ponto crítico e $u_0 \in X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$. Se, porém, $u_0 \notin K$ então, vamos mostrar que

$$\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2).$$

De fato, pela própria construção, $\Lambda \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$ bastando mostrar a seguinte afirmação

Afirmação 6: $\partial C_X(D_1 \cap D_2)$ é um c.i.f.d. para J. Com efeito, dado $u_0 \in \partial C_X(D_1 \cap D_2)$, se existisse t' tal que $u(t', u_0) \notin \partial C_X(D_1 \cap D_2)$ então dois casos poderiam ocorrer:

Caso 1 : $u(t', u_0) \in C_X(D_1 \cap D_2)$. Lembramos que, pelo Lema 1.5, $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto. Daí, pela continuidade do fluxo, a imagem de uma vizinhança aberta V_1 de u_0 está contida numa vizinhança aberta V_2 de $u(t', u_0)$ e além disso, $V_2 \subset C_X(D_1 \cap D_2)$. A imagem dessa vizinhança pelo fluxo, está contida, por sua vez, numa vizinhança aberta V_3 totalmente contida em $D_1 \cap D_2$. Portanto, se tomarmos $u^* \in V \setminus \overline{C_X(D_1 \cap D_2)}$ temos, pela continuidade do fluxo, que existe t'' tal que $u(t'', u^*) \in D_1 \cap D_2$, isto é, $u^* \in C_X(D_1 \cap D_2)$ o que é uma contradição.

Caso 2 : $u(t', u_0) \in X \setminus \overline{C_X(D_1 \cap D_2)}$. Novamente, pela continuidade do fluxo, a imagem de uma vizinhança aberta V_1 de $u(t', u_0)$ está contida numa vizinhança aberta V_2 de u_0. Tomemos $u^* \in V_1$ tal que sua imagem pelo fluxo esteja em $V_2 \cap [C_X(D_1 \cap D_2)]$. Analogamente ao Caso 1, existe t'' tal que $u(t'', u^*) \in D_1 \cap D_2$, isto é, $u^* \in C_X(D_1 \cap D_2)$ o que é uma contradição, provando a Afirmação 6.

Então, pelo Lema 1.5 temos

$$\inf_{u \in \partial C_X(D_1 \cap D_2)} J(u) \geq \inf_{u \in \partial (D_1 \cap D_2)} J(u) \geq \inf_{u \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2} J(u) > -\infty.$$

Portanto, para todo $t \in [0, T(u_0))$ temos

$$J(u_0) = J(u(0, u_0)) \geq J(u(t, u_0)) \geq \inf_{u \in D_1 \cap D_2} J(u) > -\infty.$$

Daí, o argumento do Teorema 1.4 mostra que existe uma seqüência crescente (t_n) com $t_n \nearrow T(u_0)$ quando $n \to +\infty$ tal que o limite de $(u(t_n, u_0))$ é um ponto crítico. Denotemos $u_4 = \lim_{n \to \infty} u(t_n, u_0)$. Finalmente basta observarmos que:

(i) $u_4 \notin D_1 \cap D_2$. De fato, basta notar que $(u(t_n, u_0)) \subset \partial C_X(D_1 \cap D_2)$ e $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto;

(ii) $u_4 \notin (D_1 \setminus \overline{D}_2) \cup (D_2 \setminus \overline{D}_1)$. De fato, como basta notar que $u_0 \in \Lambda \setminus (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ e $u_0 \notin \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Para ver isto, basta observar as definições de Λ_1 e Λ_2;

(iii) $u_4 \notin \partial D_1$ e $u_4 \notin \partial D_2$. A ausência de pontos críticos em ∂D_1 e ∂D_2 foi mostrada na Afirmação 4.

Portanto $u_4 \notin \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$, ou seja, $u_4 \in X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$. ∎

2.2 Caso Hilbert

No que segue, $\mathcal{H}$ denota um espaço de Hilbert e $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. O próximo resultado garante, sob certas condições, a existência de um campo pseudo-gradiente para um funcional J.

Lema 2.2 *Seja $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que $J'(u)$ pode ser expresso na forma $J'(u) = u - Au$. Suponha que D_1 e D_2 são conjuntos tais que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $A(\partial D_1) \subset D_1$ e $A(\partial D_2) \subset D_2$. Então, existe um campo pseudo-gradiente de vetores W para J, o qual torna os conjuntos D_1 e D_2 invariantes de fluxo decrescente. Além disso, tem-se $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$.*

Prova. Seja $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \setminus K$. Para $u^* \in \mathcal{H}_0$, defina

$$\mathcal{U}(u^*) = \left\{ u \in \mathcal{H}_0 : \|Au - Au^*\| < \frac{1}{8}\|J'(u)\| \quad \text{e} \quad \|J'(u)\| > \frac{1}{2}\|J'(u^*)\| \right\}$$

Então $\{\mathcal{U}(u^*) : u^* \in \mathcal{H}_0\}$ é uma cobertura aberta de $\mathcal{H}_0$. Por ser paracompacto (Ver [28]), $\mathcal{H}_0$ tem uma cobertura $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que é localmente finita e é um refinamento de $\{\mathcal{U}(u^*) : u^* \in \mathcal{H}_0\}$.

Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, se $W_\lambda \cap \partial D_1 \neq \emptyset$, $W_\lambda \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ e $W_\lambda \cap \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$ então substituímos este tal conjunto W_λ da classe $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ por $W_{\lambda_1} = W_\lambda \setminus \partial D_2$ e $W_{\lambda_2} = W_\lambda \setminus \partial D_1$, isto é, trocamos W_λ por W_{λ_1} e W_{λ_2} em $\{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ (veja a Figura 2.2). Essa substituição é feita a fim de garantirmos que $W_\lambda \cap \partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ sempre que $W_\lambda \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ e $W_\lambda \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ para qualquer $\lambda \in \Lambda$.

Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, escolhemos um ponto $a_\lambda \in W_\lambda$ que satisfaz

(a) Se $W_\lambda \cap \partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$ então $a_\lambda \in W_\lambda$ é escolhido arbitrariamente;

(b) Se $W_\lambda \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ e $W_\lambda \cap \partial D_2 = \emptyset$ então $a_\lambda \in W_\lambda \cap \partial D_1$;

(c) Se $W_\lambda \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ e $W_\lambda \cap \partial D_1 = \emptyset$ então $a_\lambda \in W_\lambda \cap \partial D_2$;

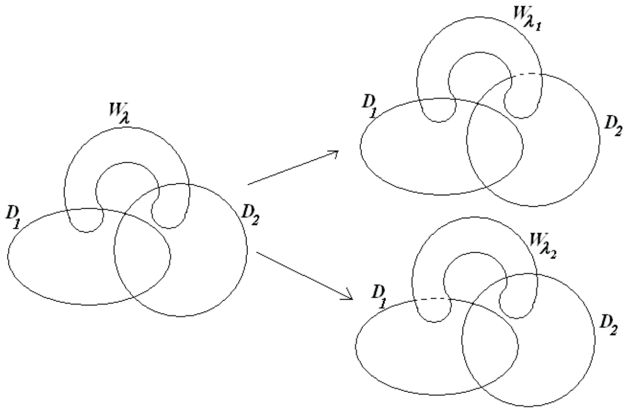

Figura 2.6: Idéia da situação em que o W_λ será substituído

(d) Se $W_\lambda \cap \partial D_1 \neq \emptyset$ e $W_\lambda \cap \partial D_2 \neq \emptyset$ então $a_\lambda \in W_\lambda \cap \partial D_1 \cap \partial D_2$.

Definamos as funções $\phi_\lambda : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}$, $B : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$ e $W(u) = u - Bu$, como no Lema 1.6. Então, o mesmo lema garante que W é um campo pseudo-gradiente de vetores para J.
Afirmação 1: $B(\partial D_1) \subset D_1$ e $B(\partial D_2) \subset D_2$.
Com efeito, observemos primeiramente que como, por hipótese, $A(\partial D_1) \subset D_1$ temos que $\partial D_1 \subset \mathcal{H}_0$, isto é, não há pontos críticos em ∂D_1 pois, se existisse $u_0 \in \partial D_1$ com $u_0 \in K$ então $J'(u_0) = 0$ e como $J'(u_0) = u_0 - Au_0$, teríamos $Au_0 = u_0 \in \partial D_1$ o que é uma contradição com a hipótese $A(\partial D_1) \subset D_1$ e o fato de D_1 ser aberto. Mostremos agora que dado $u \in \partial D_1$, temos que $B(u) \in D_1$. Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\phi_\lambda(u) \neq 0$, isto é, $\alpha_\lambda(u) \neq 0$, ou ainda, $u \in \mathcal{H}_0 \cap W_\lambda$. Então $u \in W_\lambda \cap \partial D_1$, ou seja, $W_\lambda \cap \partial D_1 \neq \emptyset$. Pelo caso (b) temos que $a_\lambda \in \partial D_1$. Por hipótese $A(\partial D_1) \subset D_1$ e isto implica que $Aa_\lambda \in D_1$. Desde que D_1 é convexo, temos que

$$Bu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(u) A a_\lambda \in D_1,$$

isto é, Bu é uma combinação convexa de elementos de D_1, uma vez que $\sum_\lambda \phi_\lambda(u) = 1$. Logo $B(\partial D_1) \subset D_1$, como queríamos demonstrar. Analogamente, usando o caso (c), conclui-se que $B(\partial D_2) \subset D_2$, provando a Afirmação 1.

Como na prova do Lema 1.6, $\overline{D}_1$ e $\overline{D}_2$ são c.i.f.d. para J determinado por W. Mostremos que, a partir daí, os conjuntos D_1 e D_2 são invariantes de fluxo decrescente para J determinado por W. De fato, se, por exemplo, D_1 não fosse um c.i.f.d., existiria $u_0 \in D_1$ e $t' \in [0, T(u_0))$ tal que $u(t', u_0) \notin D_1$. Pela teoria de EDO em espaços de Banach existem uma vizinhança U_1 de u_0 com $U_1 \subset D_1$ e uma vizinhança U_2 de $u(t', u_0)$ tal que a aplicação $\Phi = u(t', \cdot)$ é um homeomorfismo de U_1 em U_2. Desde que $u(t', u_0) \notin D_1$, existe algum $z \in U_2 \setminus \overline{D}_1$. Escolhamos $u_1 \in U_1$ tal que $\Phi(u_1) = u(t', u_1) = z$. Então $u_1 \in U_1 \subset \overline{D}_1$ e $u(t', u_1) = z \notin \overline{D}_1$, o que é uma contradição pois o conjunto $\overline{D}_1$ é invariante de fluxo decrescente. De modo análogo D_2 é um c.i.f.d..

Finalmente, resta-nos mostrar que $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$. Considere $u_0 \in \partial D_1$ e vamos verificar que $u_0 \in C_{\mathcal{H}}(D_1)$. Se $u_0 \notin C_{\mathcal{H}}(D_1)$ então $\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \nsubseteq D_1$ e, como vimos que $\overline{D}_1$ é um c.i.f.d. então

$$\{u(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset \partial D_1. \tag{2.7}$$

Daí, como já mostramos que $B(\partial D_1) \subset D_1$, segue-se que

$$\{Bu(t, u_0) : 0 \leq t < T(u_0)\} \subset D_1.$$

Afirmação 2: O o fluxo $u(t, u_0)$ associado ao problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= -W(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

satisfaz a fórmula

$$u(t, u_0) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-t+s}Bu(s, u_0)ds \quad \text{para} \quad 0 \leq t < T(u_0). \tag{2.8}$$

De fato, temos claramente que

$$u(0, u_0) = e^0 u_0 + \int_0^0 e^{0+s}Bu(s, u_0)ds = u_0.$$

Além disso, podemos reescrever $u(t, u_0)$ assim

$$u(t, u_0) = e^{-t}u_0 + e^{-t}\int_0^t e^s Bu(s, u_0)ds, \text{ para } \quad 0 \leq t < T(u_0),$$

de modo que derivando em t obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, u_0) &= - e^{-t}u_0 + (-e^{-t})\int_0^t e^s Bu(s, u_0)ds + e^{-t} \cdot e^t Bu(t, u_0) \\ &= - u(t, u_0) + Bu(t, u_0) \\ &= - W(u(t, u_0)). \end{aligned}$$

Pela unicidade segue o resultado, como queríamos demonstrar.

Afirmação 3: A função $u(t,u_0)$ em (2.8) também pode ser escrita, com $0 \leq t < T(u_0)$, do seguinte modo

$$u(t,u_0) = e^{-t}u_0 + (1-e^{-t})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Bu\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}(e^t-1)\right), u_0\right).$$

Com efeito, façamos a seguinte mudança de variável na integral de (2.8)

$$s = \ln(1 + r(e^t - 1)).$$

Um cálculo direto nos dá

$$r = \frac{e^s - 1}{e^t - 1}$$

derivando obtemos

$$dr = \frac{e^s}{e^t - 1}ds$$

e portanto

$$e^{-t}dr = \frac{e^{-t+s}}{e^t-1}ds \Rightarrow e^{-t+s}ds = \frac{e^t-1}{e^t}dr \Rightarrow e^{-t+s}ds = (1-e^{-t})dr.$$

Com esta mudança de variável, a integral de (2.8) fica

$$\int_0^t e^{-t+s}Bu(s,u_0)ds = (1-e^{-t})\int_0^1 Bu\left(\ln[1+r(e^t-1)], u_0\right)dr.$$

Considerando a função $r \mapsto Bu\left(\ln[1+r(e^t-1)], u_0\right)$, façamos uma partição do intervalo $[0,1]$, com norma $\frac{1}{n}$, isto é,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1 \quad \text{onde} \quad t_k = \frac{k}{n},$$

com $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Desse modo, obtemos a seguinte aproximação para $u(t,u_0)$

$$e^{-t}u_0 + (1-e^{-t})\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} Bu\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}(e^t-1)\right), u_0\right).$$

Tomando a soma de Riemann quando $n \to \infty$ obtemos

$$u(t,u_0) = e^{-t}u_0 + (1-e^{-t})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Bu\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}(e^t-1)\right), u_0\right),$$

provando a Afirmação 3.

Mostraremos por fim que o termo

$$y =: \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Bu\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}(e^t-1)\right), u_0\right)$$

é um elemento de D_1. Para qualquer $0 < t < T(u_0)$ fixo temos que $\{Bu(s, u_0) : 0 \leq s \leq t\}$ é um subconjunto de D_1 compacto. A distância d_B entre esse conjunto e a fronteira ∂D_1 é positiva pois do contrário, existiria um $\widetilde{u} \in \partial D_1$ tal que $d(B(\widetilde{u}), \partial D_1) = 0$, ou seja, $B(\widetilde{u}) \in \partial D_1$ contradizendo a Afirmação 1. Seja

$$G = \{u \in D_1 : d(u, \partial D_1) \geq d_B\}.$$

Então G é um conjunto fechado, convexo e $\{Bu(s, u_0) : 0 \leq s \leq t\} \subset G$. Portanto

$$y =: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Bu\left(\ln\left(1 + \frac{k}{n}(e^t - 1)\right), u_0\right) \in G \subset D_1.$$

Isto significa que

$$u(t, u_0) = e^{-t}u_0 + (1 - e^{-t})y \in D_1$$

o que é uma contradição com (2.7). Portanto, $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$. Analogamente mostra-se que $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$. ■

Teorema 2.2 *Suponhamos que*

- *o funcional J satisfaz a condição* (P. S.) *em $\mathcal{H}$;*
- *$J'(u)$ é da forma $J'(u) = u - Au$ para $u \in \mathcal{H}$;*
- *D_1 e D_2 são suconjuntos abertos e convexos de $\mathcal{H}$;*
- *$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$;*
- *$A(\partial D_1) \subset D_1$ e $A(\partial D_2) \subset D_2$.*

Se existe um caminho $h : [0, 1] \to \mathcal{H}$ tal que

$$h(0) \in D_1 \setminus D_2, \quad h(1) \in D_2 \setminus D_1$$

e

$$\inf_{u\in \overline{D}_1\cap\overline{D}_2} J(u) > \sup_{t\in[0,1]} J(h(t)),$$

então J tem ao menos quatro pontos críticos, u_1, u_2, u_3 e u_4, localizados do seguinte modo: $u_1 \in D_1 \cap D_2$, $u_2 \in D_1 \setminus \overline{D}_2$, $u_3 \in D_2 \setminus \overline{D}_1$ e $u_4 \in X \setminus (\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2)$. Veja a Figura 2.1.

Prova. O Lema 2.2 garante a existência de um campo pseudo-gradiente W para J, que torna os conjuntos D_1 e D_2 invariantes de fluxo decrescente. Mais ainda, $\partial D_1 \subset C_{\mathcal{H}}(D_1)$ e $\partial D_2 \subset C_{\mathcal{H}}(D_2)$. Com isso, nosso teorema fica nas mesmas hipóteses do Teorema 2.1, decorrendo daí o resultado segue. ∎

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e X um espaço de Banach tal que $X \hookrightarrow \mathcal{H}$, isto é, X está imerso continuamente em $\mathcal{H}$. Seja J um funcional C^{2-0} definido em $\mathcal{H}$, isto é, a derivada J' de J é Lipschitz de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}$. Consideremos J' um operador contínuo de X em X que tem a forma $J'(u) = u - Au$. Consideremos também que $K = \{u \in \mathcal{H} : J'(u) = 0\} \subset X$.

Sejam $u(t, u_0)$ e $\widetilde{u}(t, u_0)$ as únicas soluções do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) &= -u(t) + Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

considerados em $\mathcal{H}$ e em X, respectivamente, com $[0, \eta(u_0))$ e $[0, \widetilde{\eta}(u_0))$ sendo os intervalos maximais de existência. Pela imersão contínua $X \hookrightarrow \mathcal{H}$ temos que,

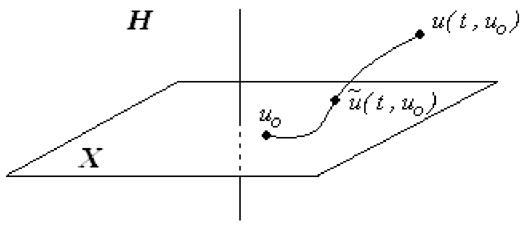

Figura 2.7: Imersão $X \hookrightarrow \mathcal{H}$

$$\widetilde{\eta}(u_0) \leq \eta(u_0) \quad \text{e} \quad \widetilde{u}(t, u_0) = u(t, u_0) \quad \text{para} \quad 0 \leq t < \eta(u_0),$$

e se $\lim_{t \to \eta(u_0)} u(t, u_0) = u^*$ em $\mathcal{H}$ para algum u^* em X então $\lim_{t \to \eta(u_0)} u(t, u_0) = u^*$ em X. Finalmente, denotaremos por $\partial_X D$ e $\overline{D}^X$, respectivamente, a fronteira e o fecho de D relativos a X. Considerando estes fatos, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3 *Suponha que J satisfaz a condição* (P. S.) *em $\mathcal{H}$ e existem dois abertos convexos , $D_1, D_2 \subset X$ tais que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $A(\partial_X D_1) \subset D_1$ e $A(\partial_X D_2) \subset D_2$. Se existe um caminho $h : [0, 1] \to X$ tal que*

$$h(0) \in D_1 \setminus D_2, h(1) \in D_2 \setminus D_1$$

e

$$\inf_{u \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(h(t)).$$

Então, J tem ao menos quatro pontos críticos distintos u_1, u_2, u_3 e u_4, localizados do seguinte modo: $u_1 \in D_1 \cap D_2$, $u_2 \in D_1 \setminus \overline{D}_2^X$, $u_3 \in D_2 \setminus \overline{D}_1^X$ e $u_4 \in X \setminus (\overline{D}_1^X \cup \overline{D}_2^X)$. Veja a Figura 2.1.

Prova. Sem perda de generalidade, vamos assumir que J tem apenas um número finito de pontos críticos. Usando um argumento como o da prova do Lema 2.2 deduzimos que os conjuntos D_1 e D_2 são invariantes de fluxo decrescente para J, isto é, mostramos que $\overline{D}_1$ e $\overline{D}_2$ são c.i.f.d. e depois que D_1 e D_2 também o são. Além disso, $\partial_X D_1 \subset C_X(D_1)$ e $\partial_X D_2 \subset C_X(D_2)$. Notemos que $\overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X$ é um c.i.f.d. fechado na topologia de X uma vez que é a intersecção de dois c.i.f.d. fechados de X. Fixemos um ponto $u_0 \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X$ e consideremos a curva de fluxo $u(t, u_0)$ para $t \in [0, \eta(u_0))$ definida por (2.9). Como $u_0 \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X$ temos que

$$\{u(t, u_0) : 0 \leq t < \eta(u_0)\} \subset \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X \quad \text{e} \inf_{u \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X} J(u) > -\infty.$$

Essas duas informações garantem que $\{J(u(t, u_0)) : 0 \leq t < \eta(u_0)\}$ é limitado. Com efeito, J é monótona decrescente ao longo dessa curva de fluxo. Sendo $\inf_{u \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X} J(u)$ finito, segue-se que $\{J(u(t, u_0))\}$ é limitado. Além disso, vale a seguinte

Afirmação: Temos que $\lim_{t \to T(u_0)} J(u(t, u_0))$ existe e é finito. De fato,

$$\lim_{t \to T(u_0)} J(u(t, u_0)) = \inf_{t \in [0, T(u_0))} J(u(t, u_0)) := a.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon \in [0, T(u_0))$ tal que $J(u(t_\varepsilon, u_0)) < a + \varepsilon$. Como $t \mapsto J(u(t, u_0))$ é decrescente segue-se que, para todo $t \in [t_\varepsilon, T(u_0))$ temos

$$a \leq J(u(t, u_0)) \leq J(u(t_\varepsilon, u_0)) \leq a + \varepsilon,$$

e isto prova a afirmação.

Então o mesmo argumento usado na prova do Teorema 1.4, mostra que existe uma seqüência crescente (t_n), com $t_n \to \eta(u_0)$ quando $n \to \infty$ tal que $\lim_{n \to \infty} u(t_n, u_0)$ existe na topologia de $\mathcal{H}$ e o $\mathcal{H}$-limite $u := \lim_{n \to \infty} u(t_n, u_0)$ é um ponto crítico de J. Um argumento padrão pode ser usado para mostrar que o limite $\lim_{n \to \eta(u_0)} u(t, u_0)$

existe na topologia de $\mathcal{H}$. De fato, se esse limite não existisse na topologia de $\mathcal{H}$, existiriam duas seqüências crescentes

$$(t'_n) \quad \text{e} \quad (t''_n) \quad \text{com} \quad t'_n < t''_n \quad \text{e} \quad t'_n \to \eta(u_0), \quad t''_n \to \eta(u_0) \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e dois números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tais que, para $n = 1, 2, \cdots$

$$\|u(t'_n, u_0) - u_1\|_{\mathcal{H}} = 2\delta_1;$$

$$\|u(t''_n, u_0) - u_1\|_{\mathcal{H}} = \delta_1;$$

$$\|J'(u(t, u_0))\|_{\mathcal{H}} \geq \delta_2 \quad \text{para} \quad t'_n \leq t \leq t''_n. \tag{2.10}$$

Então, isso significa que, para $n = 1, 2, \cdots$, temos

$$\begin{aligned}
\delta_1 =& \|u(t'_n, u_0) - u_1\|_{\mathcal{H}} - \|u(t''_n, u_0) - u_1\|_{\mathcal{H}} \\
\leq& \|u(t''_n, u_0) - u(t'_n, u_0)\|_{\mathcal{H}} \\
=& \left\| \int_{t'_n}^{t''_n} u'(t, u_0) dt \right\|_{\mathcal{H}} \\
\leq& \int_{t'_n}^{t''_n} \|u'(t, u_0)\|_{\mathcal{H}} dt \\
=& \int_{t''_n}^{t'_n} -\|u'(t, u_0)\|_{\mathcal{H}} dt.
\end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\frac{d}{dt} J(u(t, u_0)) = \langle J'(u(t, u_0)), u'(t, u_0) \rangle \leq \|J'(u(t, u_0))\| \cdot \|u'(t, u_0)\|$$

o que implica claramente, com o uso de (2.10), em

$$\begin{aligned}
-\|u'(t, u_0)\| &\leq \frac{1}{\|J'(u(t, u_0))\|} \cdot \left(-\frac{d}{dt} J(u(t, u_0)) \right) \\
&\leq \frac{1}{\delta_2} \cdot \left(-\frac{d}{dt} J(u(t, u_0)) \right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\delta_1 \leq& \frac{1}{\delta_2} \int_{t''_n}^{t'_n} \left(-\frac{d}{dt} J(u(t, u_0)) \right) dt \\
\leq& \frac{1}{\delta_2} [J(u(t'_n, u_0)) - J(u(t''_n, u_0))],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[J(u(t'_n, u_0)) - J(u(t''_n, u_0))] \geq \delta_1 \delta_2.$$

Mas isto é uma contradição com a nossa afirmação anterior, pois vimos que o limite $\lim_{t\to\eta(u_0)} J(u(t,u_0))$ existe e é finito. De

$$\lim_{t\to\eta(u_0)} u(t,u_0) = u_1 \quad \text{em} \quad \mathcal{H}$$

temos que

$$\lim_{t\to\eta(u_0)} u(t,u_0) = u_1 \quad \text{em} \quad X$$

pois $u_1 \in K \subset X$. Então $u_1 \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X$. Como $\partial_X D_1 \subset C_X(D_1)$ e $\partial_X D_2 \subset C_X(D_2)$ concluímos que $u_1 \in D_1 \cap D_2$.

Observemos que o conjunto $\partial_X C_X(D_1 \cap D_2) \cap \overline{D}_1^X$ é invariante de fluxo decrescente fechado na topologia de X. Além disso, usando o Lema 1.5 temos

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in\partial_X C_X(D_1\cap D_2)\cap\overline{D}_1^X} J(u) &\geq \inf_{u\in\partial_X C_X(D_1\cap D_2)} J(u) \\
&\geq \inf_{u\in\partial_X(D_1\cap D_2)} J(u) \\
&\geq \inf_{u\in\overline{D}_1^X\cap\overline{D}_2^X} J(u) \\
&> -\infty.
\end{aligned}$$

Daí, o mesmo argumento usado anteriormente garante que J tem um ponto crítico

$$u_2 \in \partial_X C_X(D_1 \cap D_2) \cap \overline{D}_1^X.$$

É claro que $u_2 \in \overline{D}_1^X$. Por outro lado, sabemos que $\partial_X D_1 \subset C_X(D_1)$ e isto implica que $u_2 \in D_1$. Notemos que $u_2 \notin C_X(D_1 \cap D_2)$ pois $u_2 \in \partial_X C_X(D_1 \cap D_2)$ e, pelo Lema 1.5, $C_X(D_1 \cap D_2)$ é aberto. Portanto $u_2 \notin D_1 \cap D_2$. Como $u_2 \notin D_2$ e $\partial_X D_2 \subset C_X(D_2)$ temos que $u_2 \notin \overline{D}_2^X$ e consequentemente que $u_2 \in D_1 \setminus \overline{D}_2^X$. De modo análogo podemos mostrar que J tem um ponto crítico $u_3 \in D_2 \setminus \overline{D}_1^X$.

Como na prova do Teorema 2.1, usando o Lema 2.1 temos que

$$\partial_X C_X(D_1 \cap D_2) \setminus (C_X(D_1) \cup C_X(D_2)) \neq \emptyset.$$

Como o conjunto $\partial_X C_X(D_1 \cap D_2) \setminus (C_X(D_1) \cup C_X(D_2))$ é invariante de fluxo decrescente para J, fechado na topologia de X obtemos, pelos mesmos argumentos anteriores, um ponto crítico

$$u_4 \in \partial_X C_X(D_1 \cap D_2) \setminus (C_X(D_1) \cup C_X(D_2)).$$

Como $u_4 \notin C_X(D_1) \cup C_X(D_2)$, $\partial_X(D_1) \subset C_X(D_1)$ e $\partial_X(D_2) \subset C_X(D_2)$ concluímos que $u_4 \notin \overline{D}_1^X \cup \overline{D}_2^X$. ∎

Observação 2.1 *Se adicionarmos, às condições de qualquer dos Teoremas 2.1, 2.2 ou 2.3, que o funcional J é limitado por baixo em todo espaço, então J terá pelo menos seis pontos críticos. Vemos isso pois os pontos críticos u_2 e u_3 obtidos são do tipo passo da montanha e que J tem um ponto crítico em $D_1 \setminus \overline{D}_2$ distinto de u_2 e um ponto crítico em $D_2 \setminus \overline{D}_1$ distinto de u_3.*

Capítulo 3

Aplicação a um Problema Elíptico Semilinear

Neste capítulo vamos aplicar a teoria desenvolvida anteriormente para garantir soluções do problema elíptico semilinear a seguir. Consideremos

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad x \in \Omega \\ \quad u &= \quad 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é lipschitziana. Denotemos por $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ os autovalores de $-\Delta$ com condição de fronteira homogênea de Dirichlet e por $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \cdots$ as correspondentes autofunções. É bem conhecido que (ϕ_n) é uma base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$, $\lambda_1 > 0$ é simples e $\phi_1 > 0$ não muda de sinal em Ω.

As seguintes condições serão usadas neste capítulo:

(H3.1) Existem ϕ, $\psi \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$, com $\phi \leq \psi$, tais que ϕ e ψ são **subsolução** e **supersolução** de (3.1), respectivamente, isto é,

$$-\Delta\phi \leq f(x,\phi) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

$$-\Delta\psi \geq f(x,\psi) \quad \text{em} \quad \Omega$$

e, além disso, ϕ e ψ são soluções estritas, ou seja, não são soluções de (3.1);

(H3.2) Existe um número $m > 0$ tal que $f(x,t) + mt$ é crescente;

(H3.3) A função $f(x,t)$ tem **Crescimento Subcrítico**, isto é, existem $a > 0$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ tais que $|f(x,t)| \leq a(1 + |t|^p)$, $x \in \overline{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}$;

(H3.4) A função $f(x,t)$ satisfaz a **Condição de Ambrosetti-Rabinowitz**. Mais precisamente, existe $R > 0$ e $0 < \theta < 1/2$ tal que

$$0 < F(x,t) \leq \theta t f(x,t), \ |t| \geq R, \text{ onde } F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds;$$

(H3.5) Existem números α, β com $\lambda_k < \alpha < \beta < \lambda_k + 1$ para algum $k \geq 2$ e R_1 tais que $\alpha \leq f'_t(x,t) \leq \beta$, para todo $x \in \Omega$, $|t| \geq R_1$;

(H3.6) $\lim_{|t|\to\infty} f'_t(x,t) = \lambda_k$ para algum $k \geq 2$, $\phi(x,t) =: f(x,t) - \lambda_k t$ é limitado e sastisfaz a **Condição de Landesman-Lazer**

$$\int_\Omega \Phi\left(x, \sum_{j=1}^m T_j\psi_j(x)\right) dx \to \infty, \text{ quando } \sum_{j=1}^m t_j^2 \to \infty$$

onde $\Phi(x,t) = \int_0^t \phi(x,s)ds$ e $span\{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m\} = \ker(-\Delta - \lambda_k I)$

(H3.7) $\lim_{|t|\to\infty} f'_t(x,t) = \lambda_k$ para algum $k \geq 3$, $\phi(x,t) =: f(x,t) - \lambda_k t$ satisfaz a **Condição de Ressonância Forte**: para todo $\xi_j \in \mathbb{R}^m, |\xi_j| \to \infty$, para todo $u_j \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \phi\left(x, u_j(x) + \sum_{i=1}^m \xi_j^i \psi_i(x)\right) v(x)dx = 0$$

e

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(x, u_j(x) + \sum_{i=1}^m \xi_j^i \psi_i(x)\right) v(x)dx = 0$$

onde $\xi_j = (\xi_j^1, \xi_j^2, \cdots, \xi_j^m)$.

Observação 3.1 *Observemos que a função $f(x,u) = |u|^p$, com $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, é uma função que satisfaz às condições descritas acima.*

Observação 3.2 *Existem vários casos em que (H3.1) é satisfeita, isto é, impondo certas condições sobre a função f, podemos exibir as funções ψ e ϕ que satisfazem (H3.1). Dentre estes, os seguintes são bem conhecidos:*

(a) $f(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) := f'_t(x,0) < \lambda_1$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

De fato, como f *é de classe* C^1 *temos* $f'_t(x,t) < \lambda_1$, *para todo* $t \in [0,\delta)$. *Então, pelo Teorema do Valor Médio,*

$$f(x,t) = f(x,t) - f(x,0) = f'_t(x,\xi) \cdot t < \lambda_1 t, \text{ para todo } t \in [0,\delta).$$

Portanto, tomando $\psi = \phi_1$ *temos* $-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, \quad \phi_1 > 0$ *e para* $\|\phi_1\| < \delta$ *temos* $-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1 > f(x,\phi_1)$. *Por outro lado, fazendo* $\phi = 0$ *temos* $-\Delta\phi = 0 = f(x,0)$. *É claro que temos* $\phi \leq \psi$.

(b) *Existem* $t_1 < 0 < t_2$ *tais que* $f(x,t_1) \geq 0 \geq f(x,t_2)$, *para todo* $x \in \overline{\Omega}$.

De fato, basta tomarmos $\phi \equiv t_1$ *e* $\psi \equiv t_2$. *Claramente* $\phi \leq \psi$ *e mais,* $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$. *Daí,*

$$f(x,\phi(x)) = f(x,t_1) \geq 0 = -\Delta\phi \quad e \quad f(x,\psi(x)) = f(x,t_2) \leq 0 = -\Delta\psi.$$

(c) *Existe um número* k *tal que* $|f(x,t)| \leq k$, *para* $t \in [-c_k, c_k]$, *onde* $c_k = \max_{x\in\Omega} e_k(x)$ *e* e_k *satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta e_k &= k, \quad em \quad \Omega \\ e_k &= 0, \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Com efeito, temos $-k \leq f(x,t) \leq k$, *para todo* $t \in [-c_k, c_k]$ *com* $c_k = \max_{x\in\Omega} e_k(x)$. *Então, tomando* $\psi = e_k$ *temos*

$$-\Delta e_k = k \geq f(x, e_k(x)).$$

Além disso, tomando $\phi = -e_k$ *temos*

$$-\Delta(-e_k) = -k \geq f(x, -e_k(x)).$$

(d) f *satisfaz as três condições seguintes:*

(i) $f(x,0) = 0$,

(ii) $f'_t(x,0) > \lambda_1$,

(iii) *para todo* $x \in \overline{\Omega}$, *existe* $t > 0$ *tal que* $f(x,t) \leq 0$ *ou existe um* $t' < 0$ *tal que* $f(x,t') \geq 0$.

Com efeito, analogamente ao item (a) tomemos $\phi = 0$ *e então* $-\Delta\phi = 0 = f(x,0)$. *Suponha que existe* $t^* > 0$ *tal que* $f(x,t^*) \leq 0$, *isto é,* $f(x,t) \leq 0$ *para todo* $t \in [0,\eta)$. *Como* f *é de classe* C^1, *a condição (ii) significa que existe* $\delta > 0$ *tal que* $f'(x,t) > \lambda_1$ *para todo* $t \in [0,\delta)$. *Usando o Teorema do Valor Médio temos*

$$f(x,t) = f(x,t) - f(x,0) = f'(x,\xi) \cdot t > \lambda_1 t, \quad \forall t \in [0,\delta).$$

Daí, $-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1$, $\phi_1 > 0$ *e para* $\|\phi_1\|_\infty < \min\{\eta,\delta\}$ *temos* $-\Delta(-\phi_1) = -\lambda_1\phi_1 > f(x,\phi_1)$. *Portanto tomemos* $\psi = \phi_1$. *Para o outro caso temos* $f(x,t') \geq 0$ *para todo* $t' \in (-\eta, 0]$ *e* $f'_t(x,0) > \lambda_1$ *para todo* $t \in [0,\delta)$. *Usando novamente o Teorema do Valor Médio obtemos* $f(x,t) > \lambda_1 t$, *para todo* $t \in [0,\delta)$.

Observação 3.3 *Tanto (H3.5) quanto (H3.6) implicam (H3.2), como mostraremos nos próximos dois lemas. Nos argumentos seguintes, as condições de (H3.3) até (H3.7) são usadas apenas para deduzir a condição* (P. S.) *e a existência de um caminho* h *que satisfaz as condições do Teorema 2.3. De fato, a desigualdade*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} > \lambda_2$$

é suficiente para deduzir a existência de um tal caminho. Além disso, essas condições podem ser trocadas por qualquer outra que implique na condição (P. S.) *e na existência do caminho* h.

Lema 3.1 *Se* f *satisfaz (H3.5), então* f *também satisfaz (H3.2).*

Prova. Com efeito, temos que

$$f'_t(x,t) \geq \alpha, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega, \ |t| \geq R_1.$$

Devemos mostrar que $f(x,t) + mt$ é crescente, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + m \geq 0, \quad \text{ou seja,} \quad f'_t(x,t) + m \geq 0. \tag{3.3}$$

Como $f'_t(x,t) - \alpha \geq 0$, façamos então $m := -\alpha$. Isto significa que (3.3) é verdadeiro para $|t| \geq R_1$. Para $t \in [-R_1, R_1]$ temos que $\overline{\Omega} \times [-R_1, R_1]$ é compacto e, portanto, o funcional contínuo f'_t tem um mínimo, isto é, $f_t(x,t) \geq \widetilde{\alpha}$, para todo $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [-R_1, R_1]$. Tomando então $m = \min\{-\alpha, \widetilde{\alpha}\}$ temos que (3.3) é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. ∎

Lema 3.2 *Se f satisfaz (H3.6), então f também satisfaz (H3.2).*

Prova. Como no lema anterior devemos mostrar que existe $m > 0$ tal que (3.3) é satisfeito. Temos por hipótese que

$$\lim_{|t|\to\infty} f_t'(x,t) = \lambda_k \quad \text{para algum} \quad k \geq 2.$$

É claro que $f_t'(x,t) \geq \dfrac{\lambda_k}{2}$, sendo suficiente, portanto, tomarmos $m = -\dfrac{\lambda_k}{2}$. Com essa escolha temos que f satisfaz (H3.2). ■

Os próximos dois lemas nos serão úteis mais tarde.

Lema 3.3 *A condição (H3.4) implica que existem dois números $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tais que para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$F(x,t) \geq C_1|t|^{1/\theta} - C_2.$$

Prova. Suponhamos $F(x,t) \neq 0$ e $t \neq 0$. Vamos separar a demonstração em duas etapas. Na primeira delas trataremos o problema para $|t| \geq R$ e na segunda etapa para $|t| \leq R$.

1ª Etapa: Devemos considerar as duas possibilidades seguintes

(i) Se $t \geq R$ e $x \in \overline{\Omega}$. Neste caso a desigualdade $0 < F(x,t) \leq \theta t f(x,t)$, em (H3.4), pode ser escrita assim

$$0 < \frac{1}{\theta t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}$$

Integrando obtemos

$$\frac{1}{\theta}\int_R^t \frac{1}{\xi}\, d\xi \;\leq\; \int_R^t \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)}\, d\xi,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\theta}\left(\ln t - \ln R\right) \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,R),$$

isto é,

$$\ln\left(\frac{t}{R}\right)^{1/\theta} \leq \ln\frac{F(x,t)}{F(x,R)}.$$

Como ln é uma função crescente temos

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,R)}{R^{1/\theta}} \cdot t^{1/\theta}.$$

Desde que F é contínua em x e $\overline{\Omega}$ é compacto, podemos considerar $M = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} F(x,R)$. Logo, existe $C = \dfrac{M}{R^{1/\theta}} > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq Ct^{1/\theta}$$

(ii) Se $t \leq -R$ e $x \in \overline{\Omega}$. Neste caso temos

$$\frac{1}{\theta t} \geq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}$$

Integrando obtemos

$$\frac{1}{\theta}\int_t^{-R} \frac{1}{\xi}\, d\xi \;\geq\; \int_t^{-R} \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)}\, d\xi,$$

isto é,

$$\ln\frac{F(x,-R)}{F(x,t)} \leq \ln\left|\frac{-R}{t}\right|^{1/\theta}.$$

Finalmente obtemos

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-R)}{|-R|^{1/\theta}} \cdot |t|^{1/\theta}.$$

Desde que F é contínua em x e $\overline{\Omega}$ é compacto, podemos considerar $N = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} F(x,-R)$. Logo, existe $\widetilde{C} = \dfrac{N}{|-R|^{1/\theta}} > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq \widetilde{C}|t|^{1/\theta}$$

Pelos itens (i) e (ii), se tomarmos $C_1 = \min\{C, \widetilde{C}\}$ obtemos

$$F(x,t) \geq C_1|t|^{1/\theta}$$

e portanto

$$F(x,t) \geq C_1|t|^{1/\theta} - C_2 \tag{3.4}$$

para qualquer constante $C_2 > 0$.

2ª Etapa: Suponhamos agora $|t| \leq R$. Desde que $\overline{\Omega} \times [-R,R]$ é compacto e F é contínua, podemos considerar para $t \in [-R,R]$

$$M_1 = \min_{x\in\overline{\Omega}} F(x,t).$$

Logo

$$F(x,t) \geq M_1 \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-R,R]. \tag{3.5}$$

Como a constante C_2, em (3.4), é arbitrária, vamos escolhê-la de modo a também satisfazer (3.5). Para isto, basta impormos que $M_1 \geq C_1|t|^{1/\theta} - C_2$, para $t \in [-R, R]$, isto é

$$C_2 \geq C_1|R|^{1/\theta} - M_1 > 0,$$

provando o lema. ■

Lema 3.4 *Se f satisfaz (H3.7), então f também satisfaz (H3.3).*

Prova. De (H3.7) afirmamos que existe uma constante c_0 tal que $f_t'(x,t) \leq c_0$. Com efeito temos que $\lim_{|t|\to\infty} f_t'(x,t) = \lambda_k$, para algum $k \geq 3$ e isto significa que

$$f_t'(x,t) \leq \lambda_k + \varepsilon := c_1 \quad \text{para} \quad |t| \geq R \quad \text{e} \quad \varepsilon > 0.$$

Para $|t| \leq R$, como f é de classe C^1 e está definida num compacto, temos que $f(x,t) \leq c_2$. Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe uma constante $c_0 := \min\{c_1, c_2\}$ tal que $f_t'(x,t) \leq c_0$, como havíamos afirmado. Aplicando o Teorema do Valor Médio segue-se que

$$f(x,s) - f(x,0) = f_t'(x,\theta)s,$$

ou seja

$$f(x,s) = f_t'(x,\theta)s \leq c_1 s \leq c_1 s^2 \leq c_1 s^2 + c_1$$

concluindo a prova. ■

Sejam m como em (H3.2) e o espaço de Hilbert $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + muv)dx \quad \text{para} \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

e da norma a ele associada

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + mu^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

É fato bem conhecido que as soluções fracas de (3.1) correspondem aos pontos críticos do funcional definido em $H_0^1(\Omega)$

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right] dx. \tag{3.6}$$

É claro que $J \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, o gradiente de J no ponto u tem a seguinte expressão

$$J'(u) = u - (-\Delta + m)^{-1}(f(x,u) + mu). \tag{3.7}$$

Observação 3.4 *Neste item iremos justificar a expressão em (3.7). Entendemos por solução fraca de (3.1), uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi = 0, \quad \forall\ \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

O funcional $J(u) = 1/2 \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)$ tem derivada

$$J'(u)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{J(u+t\varphi) - J(u)}{t} = \int \nabla u \nabla \varphi - \int f(x,u)\varphi,$$

ou seja,

$$J'(u) = -\Delta u - f(x,u). \tag{3.8}$$

Nosso objetivo aqui é mostrar que (3.7) e (3.8) são equivalentes. De fato, de (3.8) temos

$$J'(u) = -\Delta u + mu - mu - f(x,u),$$

isto é,

$$J'(u) = (-\Delta + m)(u) - [f(x,u) + mu].$$

Por outro lado, como $J'(u)$ está em $H_0^1(\Omega)$ o Teorema da Representação de Riesz garante que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J'(u)\varphi = \langle v, \varphi \rangle. \tag{3.9}$$

Então, vamos determinar v usando a definição do produto interno e substituindo (3.8) em (3.9), ou seja,

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi - f(x,u)\varphi] = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi + mv\varphi.$$

Adicionando e subtraindo a parcela, $\int_\Omega mu\varphi$ temos:

$$\int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi + mu\varphi] - \int_\Omega [f(x,u)\varphi + mu\varphi] = \int_\Omega [\nabla v \nabla \varphi + mv\varphi],$$

ou seja,

$$\int\limits_{\Omega} \nabla(u-v)\nabla\varphi + m(u-v)\varphi = \int\limits_{\Omega} [f(x,u)\varphi + mu\varphi].$$

Isto significa que $w := u - v$ é uma solução do problema

$$-\Delta w + mw = -(f(x,u) + mu),$$

e isto implica em

$$u - v = w = (-\Delta + m)^{-1}(f(x,u) + mu)$$

que finalmente nos dá

$$v = u - (-\Delta + m)^{-1}(f(x,u) + mu).$$

Portanto, $J'(u) = u - (-\Delta + m)^{-1}(f(x,u) + mu)$ e (3.7) está justificada.

Nos próximos cinco lemas, vamos mostrar que J satisfaz a condição (P. S.) sob (H3.3), (H3.4), (H3.5), (H3.6) e (H3.7).

Lema 3.5 *Sob a condição (H3.3), o funcional J satisfaz* (P. S.).

Prova. Sejam $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma seqüência (P. S.), isto é, $(J(u_n))$ é limitada e $J'(u_n) \to 0$, onde J é o funcional definido em (3.6), isto é,

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right] dx,$$

com $F(x,t) = \int_0^t f(x,t)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ e f satisfazendo (H3.3). Notemos que $J \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e

$$J'(u)\phi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} f(x,u)\phi dx, \quad \text{com} \quad J'(u) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)'.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, temos ainda, pelo Teorema da Reprsentação de Riesz, que

$$J'(u)\phi = \langle \nabla J(u), \phi \rangle \quad \text{e} \quad \|J'(u)\| = \|\nabla J(u)\|.$$

Considerando ainda $I(u) = \int_{\Omega} F(x,u)dx$ temos que $I'(u)\phi = \int_{\Omega} f(x,u)\phi dx$ e, novamente pelo Teorema da Representação de Riesz temos que

$$I'(u)\phi = \langle \nabla I(u), \phi \rangle \quad \text{e} \quad \|I'(u)\| = \|\nabla I(u)\|.$$

Portanto

$$J'(u)\phi = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - I'(u)\phi$$

pode ainda ser escrito da seguinte forma

$$\langle \nabla J(u), \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle - \langle \nabla I(u), \phi \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla J(u), \phi \rangle = \langle u - \nabla I(u), \phi \rangle$$

donde concluímos que

$$\nabla J(u) = u - \nabla I(u). \tag{3.10}$$

Definamos o operador $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ dado por $T(u) = \nabla I(u)$ e provemos a afirmação seguinte.

Afirmação: O operador T é compacto.

Com efeito, consideremos $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma seqüência limitada e mostremos que $T(u_{n_j}) \to T(u)$ em $H_0^1(\Omega)$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão compacta de Sobolev, temos que

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \quad L^r(\Omega), \quad \text{para todo} \quad r \in [1, 2^*), \text{ onde } 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

Fixemos r tal que $s + 1 \leq r < 2^*$ e consideremos q o conjugado de r, isto é, $q = \dfrac{r}{r-1}$, vamos provar que

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot)) \quad \text{em} \quad L^q(\Omega).$$

De fato, a menos de subseqüência temos que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ onde } g \in L^r(\Omega).$$

Como $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, então

$$f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde concluímos que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{r/s} \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

e mais,

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{r/s} \leq C\left(|f(x,u_n(x))|^{r/s} + |f(x,u(x))|^{r/s}\right).$$

Usando a condição (H3.3) vem

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{r/s} \leq C\left[(a + a|u_n|^s)^{r/s} + (a + a|u|^s)^{r/s}\right].$$

donde obtemos

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{r/s} \leq C_1|u_n|^r + C_2|u|^r + C_3.$$

Desde que (u_n) é limitada q.t.p. por g, segue-se que

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{r/s} \leq (C_1|g|^r + C_2|u|^r + C_3) \in L^1(\Omega).$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{r/s}dx = 0,$$

o que implica

$$f(\cdot,u_n(\cdot)) \to f(\cdot,u(\cdot)) \quad \text{em} \quad L^{r/s}(\Omega).$$

Mas desde que $1 < q < r/s$ e Ω é limitado, temos

$$f(\cdot,u_n(\cdot)) \to f(\cdot,u(\cdot)) \quad \text{em} \quad L^q(\Omega),$$

ou seja,

$$\|f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{3.11}$$

Por outro lado, temos que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|I'(u_n) - I'(u)\| = \sup_{\|\phi\|\leq 1}|(I'(u_n) - I'(u))\phi|.$$

Mas,

$$|[I'(u_n) - I'(u)]\phi| \leq \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|\phi|dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$|[I'(u_n) - I'(u)]\phi| \leq \|f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\|\phi\|_{L^r(\Omega)}.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev temos

$$|[I'(u_n) - I'(u)]\phi| \leq C\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}\|\phi\|,$$

e, portanto,

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \leq C\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq C\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.12}$$

Portanto, por (3.11) e (3.12) temos, a menos de subseqüência, que

$$\|T(u_n) - T(u)\| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

e isto significa que T é um operador compacto, como queríamos demonstrar.

Isto singifica que $I'(u_n)$ tem uma subseqüência convergente. Então, por (3.10) temos que $\nabla J(u_n) = u_n - \nabla I(u_n)$, isto é,

$$u_n = \nabla J(u_n) + \nabla I(u_n).$$

Como $J'(u_n) \to 0$, temos que $\|J'(u_n)\| \to 0$ e, desde que $\|J'(u_n)\| = \|\nabla J(u_n)\|$, vem que $\|\nabla J(u_n)\| \to 0$ isto é, $\nabla J(u_n) \to 0$. Portanto, tomando o limite ao longo de uma subseqüência convergente de $I'(u_n)$, existe uma subseqüência (u_{n_j}) que é convergente, provando o lema. ■

Lema 3.6 *Sob a condição (H3.4), o funcional J satisfaz* (P. S.).

Prova. Seja (u_n) uma seqüência (P. S.), ou seja,

$$|J(u_n)| \leq M, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

e $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Vamos mostrar que (u_n) possui uma subseqüência (u_{n_k}) convergente. Dividiremos a prova em duas etapas. Na primeira delas mostraremos que a seqüência (u_n) é limitada e na segunda que ela possui uma subseqüência que converge.

1ªEtapa: A seqüência (u_n) é limitada.

Observemos que como $J'(u_n) \to 0$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|J'(u_n)\| < \varepsilon$, sempre que $n \geq n_0$, isto é,

$$\sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{|J'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Portanto
$$\frac{|J'(u_n)\varphi|}{\|\varphi\|} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\},$$
ou seja,
$$|J'(u_n)\varphi| \leq \varepsilon \|\varphi\|, \text{ para todo } n \geq n_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$
Desde que $u_n \in H_0^1(\Omega)$ concluímos que
$$|J'(u_n)u_n| \leq \varepsilon \|u_n\|, \quad n \geq n_0. \tag{3.14}$$
Observemos agora que, pela condição (H3.4), temos
$$\begin{aligned} J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n = &\left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx \right) \\ &- \theta \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega f(x, u_n) u_n dx \right), \end{aligned}$$
ou seja,
$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \int_\Omega \left[\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx.$$
Consideremos $\Omega_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \geq R\}$. Então temos
$$\begin{aligned} J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n = &\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \int_{\Omega_n} \left[\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \\ &+ \int_{\Omega_n^C} \left[\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx. \end{aligned}$$
A condição (H3.4) garante que
$$\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Omega_n,$$
e portanto,
$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \|u_n\|_{H_0^1}^2 + \int_{\Omega_n^C} \left[\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx.$$
Desde que
$$F(x, u_n) - \theta f(x, u_n) u_n \leq |F(x, u_n) - \theta f(x, u_n) u_n| = |\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n)|$$
temos
$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \theta \right) \|u_n\|_{H_0^1}^2 - \int_{\Omega_n^C} |\theta f(x, u_n) u_n - F(x, u_n)| \, dx.$$

Como f e F são, por hipótese, funções contínuas, a função $g(x,t) := |\theta f(x,t)t - F(x,t)|$ é, também, uma função contínua. Assim, desde que $\overline{\Omega} \times [-R,R]$ é um conjunto compacto, segue-se que g é limitada nesse compacto, existindo, portanto um $C > 0$ tal que $|g(x,t)| \leq C$ para todo par $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [-R,R]$. Daí, segue-se que

$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_n\|^2_{H^1_0} - \int_{\overline{\Omega^C_n}} C dx,$$

e como $|\overline{\Omega^C_n}| \leq |\Omega|$ temos

$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_n\|^2_{H^1_0} - C|\Omega|,$$

isto é,

$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_n\|^2_{H^1_0} - C_2. \tag{3.15}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \leq & |J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n| \\ \leq & |J(u_n)| + \theta |J'(u_n)u_n|. \end{aligned}$$

Usando (3.13) e (3.14) temos

$$J(u_n) - \theta J'(u_n)u_n \leq M + \theta\varepsilon \|u_n\|_{H^1_0}, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16) temos

$$M + \theta\varepsilon \|u_n\|_{H^1_0} \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_n\|^2_{H^1_0} - C_2, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Esta última desigualdade pode ser claramente escrita na forma

$$a + b\|u_n\| \geq c\|u_n\|^2,$$

com a, b e c positivos, para todo $n \geq n_0$. Isto mostra que (u_n) é limitada em $H^1_0(\Omega)$, concluindo a primeira etapa.

2ªEtapa: A seqüência (u_n) possui uma subseqüência convergente.

Esse fato segue imediatamente do resultado obtido na 1ªEtapa. ∎

Lema 3.7 *O funcional J satisfaz a condição* (P. S.) *sob (H3.5).*

Prova. Denotemos $\overline{\lambda} = \dfrac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}$. Então, para $u \in H_0^1(\Omega)$ afirmamos que,

$$J'(u) = (-\Delta - \overline{\lambda})(-\Delta + m)^{-1}\left\{u - (-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\left[f(x,u) - \overline{\lambda}u\right]\right\}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} J'(u) =& u - (-\Delta + m)^{-1}(f(u) + mu) \\ =& (-\Delta - \overline{\lambda})\left\{(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}u - (-\Delta + m)^{-1}(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\left[f(x,u) + mu\right]\right\}. \end{aligned}$$

Pondo $(-\Delta + m)^{-1}$ em evidência obtemos

$$J'(u) = (-\Delta - \overline{\lambda})(-\Delta + m)^{-1}\left\{(-\Delta + m)(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}u - (-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\left[f(x,u) + mu\right]\right\}.$$

Agora, colocando o termo $(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}$ em evidência, vem

$$J'(u) = (-\Delta - \overline{\lambda})(-\Delta + m)^{-1}(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\left\{(-\Delta + m)u - \left[f(x,u) + mu\right]\right\},$$

ou seja,

$$J'(u) = (-\Delta + m)^{-1}\left\{-\Delta u + mu - f(x,u) - mu\right\}.$$

Daí, podemos escrever

$$J'(u) = (-\Delta + m)^{-1}\left\{-\Delta u + \overline{\lambda}u - f(x,u) - \overline{\lambda}u\right\},$$

obtendo finalmente

$$J'(u) = (-\Delta - \overline{\lambda})(-\Delta + m)^{-1}\left\{u - (-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\left[f(x,u) - \overline{\lambda}u\right]\right\},$$

como havíamos afirmado. Então, para $u \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$u = (-\Delta + m)(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}J'(u) + (-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}[f(x,u) - \overline{\lambda}u],$$

e desde que $m + \overline{\lambda} = (m - \Delta) + (\Delta + \overline{\lambda})$ a última igualdade resulta em

$$u = J'(u) + (m + \overline{\lambda})(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}J'(u) + (-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}[f(x,u) - \overline{\lambda}u].$$

Se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma seqüência (P. S.), isto é, $|J(u_n)|$ é limitado e $\|J'(u_n)\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ quando $n \to \infty$ então

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq& \|J'(u_n)\|_{L^2(\Omega)} + \\ &+ (m + \overline{\lambda})\|(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))}\|J'(u_n)\|_{L^2(\Omega)} + \\ &+ \|(-\Delta - \overline{\lambda})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))}\|f(x,u_n) - \overline{\lambda}u_n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\|(-\Delta-\overline{\lambda})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))}=\frac{2}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}.$$

Afirmação: A condição (H3.5) garante que existem $C>0$ e $\delta>0$ tais que

$$|f(x,t)-\overline{\lambda}t|<\left(\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}-\delta\right)|t|+C,\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

De fato, pelo Teorema do Valor Médio, temos $f(x,t)-f(x,R)=f_t(x,\xi)(t-R)$, para $t\geq R$. Portanto, fazendo $\sup_{\overline{\Omega}} f(x,R)=\widetilde{C}$, obtemos

$$\begin{aligned}f(x,t)&=f(x,R)+f_t(x,\xi)(t-R)\\&\leq f(x,R)+\beta(t-R)\\&\leq \sup_{\overline{\Omega}} f(x,R)+\beta(t-R)\\&=\widetilde{C}+\beta(t-R),\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}f(x,t)-\overline{\lambda}t\leq&\beta t-\beta R-\overline{\lambda}t+\widetilde{C}\\=&(\beta-\overline{\lambda})t-\beta R+\widetilde{C},\end{aligned}$$

Tomando $\delta=\lambda_{k+1}-\beta>0$, ou seja, $\beta=\lambda_{k+1}-\delta$, e lembrando que $\overline{\lambda}=\dfrac{\lambda_k+\lambda_{k+1}}{2}$, vem

$$f(x,t)-\overline{\lambda}t\leq\left(\lambda_{k+1}-\delta-\frac{\lambda_{k+1}+\lambda_k}{2}\right)t+\beta R+\widetilde{C},$$

donde

$$f(x,t)-\overline{\lambda}t\leq\left(\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}-\delta\right)t+\beta R+\widetilde{C}. \tag{3.17}$$

Para $t\leq -R$ o raciocínio é análogo. Para $t\in[-R,R]$, temos que $\overline{\Omega}\times[-R,R]$ é compacto. Portanto $f(x,t)\leq C^*$, para algum $C^*\in\mathbb{R}$. Basta, portanto, como no Lema 3.3, escolher um $\widetilde{C}$ conveniente a C^*, provando a afirmação.

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}\leq&\|J'(u_n)\|_{L^2(\Omega)}+2(m+\overline{\lambda})(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{-1}\|J'(u_n)\|_{L^2(\Omega)}\\&+2(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{-1}\left(\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}-\delta\right)\|u_n\|_{L^2(\Omega)}+C_1,\end{aligned}$$

e desde que

$$1-2(\lambda_{k+1}-\lambda_k)^{-1}\left(\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}-\delta\right)=\frac{2\delta}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}>0,$$

vemos que $(\|u_n\|_{L^2(\Omega)})$ é limitado. Então, por um argumento padrão $(\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)})$ é limitado e (u_n) tem uma subseqüência convergente. ∎

Lema 3.8 *O funcional J satisfaz a condição* (P. S.) *sob (H3.6).*

Lema 3.9 *O funcional J satisfaz a condição* (P. S.) *sob (H3.7).*

Prova. (dos Lemas 3.8 e 3.9) Para a demonstração desses lemas, veja a seção 3 do terceiro capítulo de [7]. ∎

Seja $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$ e $X = C_0^1(\overline{\Omega})$. A teoria L^p de operadores elípticos e os teoremas de imersão de Sobolev, garantem que o operador

$$A := (-\Delta + m)^{-1}(f(x,\cdot) + m\cdot)$$

é Lipschitz tanto como um operador de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ quanto como um operador de X em X. Com efeito, vamos mostrar que A é um operador Lipschitz de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. Façamos, por comodidade, $g(x,u) := f(x,u) + mu$ que, desde que f é Lipschitz, também é um operador Lipschitz. Então, sejam

$$w := Au = (-\Delta + m)^{-1}(g(u)) \quad \text{e} \quad z := Av = (-\Delta + m)^{-1}(g(v)),$$

isto é,

$$-\Delta w + mw = g(u) \quad \text{e} \quad -\Delta z + mz = g(v)$$

Subtraindo essa duas equações obtemos

$$-\Delta(w - z) + m(w - z) = g(u) - g(v), \tag{3.18}$$

isto é,

$$w - z = (-\Delta + m)^{-1}(g(u) - g(v)).$$

Daí segue-se que

$$\|w - z\| \leq \|(-\Delta + m)^{-1}\|\|g(u) - g(v)\|$$

Usando $w - z$ como função teste para (3.18) obtemos

$$\|w - z\|^2 = \int |\nabla(w - z)|^2 dx + m\int (w - z)^2 dx = \int (g(u) - g(v))(w - z)dx,$$

isto é,

$$\|Au - Av\|^2 \leq \int \widetilde{C}|u - v||w - z|.$$

Usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\|Au - Av\|^2 \leq & \widetilde{C}\left(\int |u-v|^2\right)^{1/2}\left(\int |w-z|^2\right)^{1/2}\\ \leq & \widetilde{C}\|u-v\|_{L^2}\|w-z\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando a imersão de Sobolev obtemos

$$\|Au - Av\|^2 \leq C\|u-v\|_{H_0^1}\|w-z\|_{H_0^1} = C\|u-v\|_{H_0^1}\|Au-Av\|_{H_0^1}$$

e finalmente

$$\|Au - Av\|_{H_0^1} \leq C\|u-v\|_{H_0^1}.$$

Para a prova dessa propriedade em X usa-se estimativas a priori (Veja Teorema IX.33 em [4]).

Tomemos $u_0 \in X$ e consideremos o problema de valor inicial tanto em H quanto em X.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) & = & -u(t) + Au(t), \\ u(0) & = & u_0 \end{cases} \tag{3.19}$$

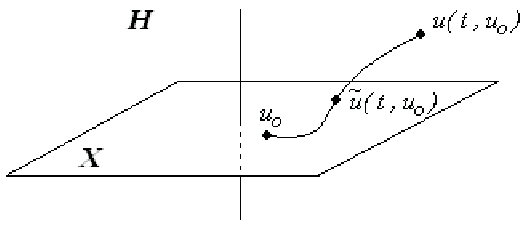

Figura 3.1: Imersão $X \hookrightarrow H$

Suponhamos que $u(t,u_0)$ e $\widetilde{u}(t,u_0)$ são as únicas soluções de (3.19) consideradas em $\mathcal{H}$ e em X respectivamente, com intervalo maximal de existência $[0,T(u_0))$ e $[0,\widetilde{T}(u_0))$ (veja a Figura 3). Temos então o seguinte resultado:

Lema 3.10 **(i)** *$T(u_0) = \widetilde{T}(u_0)$ e $u(t,u_0) = \widetilde{u}(t,u_0)$, para todo $0 \leq t < T(u_0)$;*

(ii) *Se tivermos*

$$\lim_{t \to T(u_0)} u(t,u_0) = u^*$$

na topologia de $\mathcal{H}$ para algum $u^* \in K$, onde K é o conjunto crítico de J, então o limite é também válido na topologia de X.

Prova. Usaremos aqui a mesma técnica usada em [6]. A imersão $X \hookrightarrow \mathcal{H}$ implica que $\widetilde{T}(u_0) \leq T(u_0)$ e $u(t,t_0) = \widetilde{u}(t,u_0)$ para $0 \leq t < \widetilde{T}(u_0)$. Note que $u(t,u_0)$ satisfaz

$$u(t,u_0) = e^{-t}u_0 + \int_0^t e^{-t+s}Au(s,u_0)ds \quad \text{para} \quad 0 \leq t < T(u_0) \tag{3.20}$$

em que a integral é tomada em $\mathcal{H}$. Pelas estimativas L^p para operadores elípticos podemos obter uma sequência de espaços de Banach reais da forma

$$C_0^1(\overline{\Omega}) \;=\; E_0 \;\hookrightarrow\; E_2 \;\hookrightarrow\; \cdots \;\hookrightarrow\; E_{n+1} \;=\; H_0^1(\Omega)$$

tal que A aplica E_i em E_{i-1} e é contínua e limitada de E_i em E_{i-1} para $i = 1,\ 2, \cdots, n+1$. De fato, podemos escolher E_i como sendo $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ para uma sequência conveniente $p_1 > p_2 > \cdots > p_{n+1} = 2$ (veja [14]). Daí, de (3.20) obtemos sucessivamente que

$$u(t,u_0) \in E_i \quad \text{para} \quad i = 0,1,\cdots,n \quad \text{e} \quad 0 \leq t < T(u_0)$$

e (3.20) é ainda correto para $0 \leq t < T(u_0)$ quando a integral é tomada na topologia de E_i para $i = 0,1,\cdots,n$. Portanto, para $0 \leq t < T(u_0)$ temos que $u(t,u_0)$ é também solução de (3.19) em $C_0^1(\Omega)$. Portanto, $T(u_0) = \widetilde{T}(u_0)$.

Para a segunda parte temos que o conjunto $C =: \{u(t,u_0) : 0 \leq t < \eta(u_0)\}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$. De (3.20) temos sucessivamente que C é limitado em E_i para $i = 0,1,\cdots,n$. Fixe $0 < \alpha < 1$. Desde que a função $A = (-\Delta + m)^{-1}(f(\cdot) + m\cdot)$ que aplica $C_0^1(\overline{\Omega})$ em $C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é limitada e contínua, temos que

$$\left\{ \int_0^t e^{t+s}Au(s,u_0)ds : 0 \leq t < T(u_0) \right\}$$

é um subconjunto limitado de $C_0^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então um argumento de compacidade mostra que $\lim_{t\to\eta(u_0)} u(t,u_0) = u^*$ na topologia de $C_0^1(\overline{\Omega})$. ■

Observação 3.5 *Observemos que a Figura 3 tem caráter meramente ilustrativo e que o Lema anterior garante que as órbitas que iniciam em X permanecem em X.*

Teorema 3.1 *Suponhamos que (H3.1), (H3.2), (H3.3) e (H3.4) são satisfeitas. Então (3.1) tem pelo menos quatro soluções.*

Prova. Nossa intenção é utilizar o Teorema 2.3. Para isto, consideremos os conjuntos D_1 e D_2 dados por

$$D_1 = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u > \phi \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\right\}$$

e

$$D_2 = \left\{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u < \psi \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} > \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\right\}$$

onde η é um vetor normal e unitario em $\partial\Omega$. Vamos verificar que D_1 e D_2 satisfazem as exigências do Teorema 2.3.

Afirmação 1: D_1 e D_2 são conjuntos abertos.

Com efeito

Afirmação 2: $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

De fato, sabemos que ϕ é uma sub-solução e ψ é uma super-solução do problema (3.1). Então, pelo Teorema A.10, existe $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, com

$$\phi \leq u \leq \psi \tag{3.21}$$

que é solução do problema. Desde que ϕ e ψ são sub- e super-solução estritas, elas não são soluções de (3.1). Pelo Princípio do Máximo, a desigualdade anterior é estrita. Além disso, o Lema de Hopf garante que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{\partial \phi}{\partial \eta}.$$

Com efeito, vamos mostrar, por exemplo, que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}$ e $u > \phi$. Como ϕ é uma sub-solução, temos que

$$-\Delta u + \Delta \phi \geq f(x, u) - f(x, \phi),$$

ou seja,

$$-\Delta(u - \phi) + m(u - \phi) = [(f(x, u) + mu) - (f(x, \phi) + m\phi)].$$

Pela condição (H3.2), a função $f(x, u) + mu$ é crescente. Portanto, desde que $u > \phi$, segue-se que

$$-\Delta(u - \phi) + m(u - \phi) \geq 0.$$

Como sabemos que $m > 0$, o Lema de Hopf garante que $\dfrac{\partial}{\partial \eta}(u - \phi) < 0$, donde obtemos $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}$, como havíamos afirmado. Além disso, o Princípio do Máximo garante que

$u - \phi$ é constante em Ω, isto é,

$$u(x) - \phi(x) = K, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega,$$

onde K é uma constante. Assim, se admitirmos que existe pelo menos um $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \phi(x_0)$ então $K = 0$ e teríamos $u(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \Omega$. Isto, entretanto, contradiz o fato de ϕ ser sub-solução estrita e portanto, concluímos que $u > \phi$. Analogamente, mostra-se que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} < \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ e $\psi > u$. Do que foi afirmado anteriormente, concluímos que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, provando a Afirmação 2.

Afirmação 3: D_1 e D_2 são convexos.

De fato, sejam $u, v \in D_1$. Então $u > \phi$ e $v > \phi$. Então

$$tu + (1-t)v > t\phi + (1-t)\phi = \phi.$$

Além disso, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}$ e também que $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} < \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta}[tu + (1-t)v] &= t\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + (1-t)\,\frac{\partial v}{\partial \eta} \\ &< t\,\frac{\partial \phi}{\partial \eta} + (1-t)\,\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Para D_2 o procedimento é análogo, e isto prova a Afirmação 3.

Se $u \in \partial_X D_1$ e $v = Au$ então,

$$\begin{aligned} -\Delta v + mv =& (-\Delta + m)v \\ =& (-\Delta + m)Au \\ =& (-\Delta + m)(-\Delta + m)^{-1}(f(x,u) + mu) \\ =& f(x,u) + mu, \end{aligned}$$

e portanto, desde que $u \in \partial_X D_1$

$$-\Delta v + mv = f(x,u) + mu \geq f(x,\phi) + m\phi \gneqq -\Delta\phi + m\phi.$$

Novamente, pelo Princípio do Máximo e o Lema de Hopf, temos

$$v > \phi \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

e isto implica que $v \in D_1$. Portanto, $A(\partial_x D_1) \subset D_1$. De maneira análoga $A(\partial_x D_2) \subset D_2$. Agora vamos mostrar a existência do caminho h. Pelo Lema 3.3

a condição (H3.4) garante a existência de dois números $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tais que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F(x,t) \geq C_1|t|^{1/\theta} - C_2$$

Para qualquer subespaço de dimensão finita X_1 de X, se $u \in X_1$ temos,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

ou seja, para algum $C_3 > 0$

$$J(u) \leq C_3\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_1\|u\|^{1/\theta}_{L^{1/\theta}} + C_2|\Omega|.$$

Desde que $0 < \theta < 1/2$ existem dois números $C_4 > 0$ e $C_5 > 0$ tais que se $u \in X_1$, então:

$$J(u) \leq -C_4\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_5$$

Portanto, existe um caminho $h : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $h(0) \in D_1 \setminus D_2, h(1) \in D_2 \setminus D_1$ e

$$\inf_{u \in D_1^X \cap D_2^X} J(u) > \sup_{t \in [0,1]} J(h(t)).$$

Segue então o resultado usando o Teorema 2.3. ∎

Teorema 3.2 *Suponhamos que (H3.1) e (H3.5) (ou (H3.6)) são satisfeitos. Então (3.1) tem pelo menos quatro soluções.*

Prova. Já vimos nos Lemas 3.1 e 3.2 que ambos (H3.5) e (H3.6) implicam (H3.2). Definamos D_1 e D_2 como na prova do Teorema 3.1. Então, novamente, D_1 e D_2 são subconjuntos de X abertos e convexos com as propriedades $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $A(\partial_X D_1) \subset D_1$ e $A(\partial_X D_2) \subset D_2$. É fácil ver que sob as condições (H3.5) ou (H3.6) com $k > 2$, existe um caminho como no Teorema 3.1. Assumindo (H3.6) com $k = 2$, isto é, $\lim f'_t(x,t) = \lambda_2$; defina

$$h_R(s) = [R\cos(\pi s)]\,\phi_1 + [R\sin(\pi s)]\,\phi_2 \quad \text{para} \quad R > 0 \text{ e } 0 \leq s \leq 1.$$

Então $h_R(0) = R\phi_1 \in D_1 \setminus D_2$, $h_R(1) = -R\phi_1 \in D_2 \setminus D_1$ e

$$J(h_R(s)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) R^2\cos^2(\pi s) - \int_\Omega \Phi(x, R\cos(\pi s)\phi_1(x) + R\sin(\pi s)\phi_2(x))dx$$

De fato,
$$J(h_R(s)) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla(h_R(s))|^2\, dx - \int\limits_{\Omega} F(x, h_R(s))dx.$$
Calculando separadamente, cada parcela temos:
$$\nabla h_R(s) = R\cos(\pi s)\nabla\phi_1 + R\sin(\pi s)\nabla\phi_2,$$
ou seja,
$$|\nabla h_R(s)|^2 = R^2\cos^2(\pi s)\,|\nabla\phi_1|^2 + R^2\sin^2(\pi s)\,|\nabla\phi_2|^2\,.$$
Daí,
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla h_R(s)|^2\, dx &= \frac{1}{2}(R^2\cos^2(\pi s))\int\limits_{\Omega} |\nabla\phi_1|^2 dx + \frac{1}{2}(R^2\sin^2(\pi s))\int\limits_{\Omega} |\nabla\phi_2|^2 dx\\ &= \frac{1}{2}(R^2\cos^2(\pi s))\lambda_1\int \phi_1^2 dx + \frac{1}{2}(R^2\sin^2(\pi s))\lambda_2\int \phi_2^2 dx\\ &= \frac{1}{2}\left[R^2\cos^2(\pi s)\lambda_1 + R^2\sin^2(\pi s)\lambda_2\right]\end{aligned}$$
por outro lado temos que $\phi(x,t) := f(x,t) - \lambda_2 t$. Integrando essa igualdade obtemos
$$\Phi(x,t) := F(x,t) - \frac{\lambda_2^2 t}{2}.$$
E portanto
$$\int\limits_{\Omega} F(x, h_R(s))dx = \int\limits_{\Omega}\left[\Phi(x, h_R(s)) + \frac{\lambda_2(h_R(s))^2}{2}\right] dx.$$
Como $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, um cálculo direto mostra que
$$\lim_{R\to\infty}\sup_{s\in[0,1]} J(h_R(s)) = -\infty.$$
Portanto, para R suficientemente grande, h_R tem as propriedades do caminho h. ■

Corolário 3.3 *Em adição às condições dos Teoremas 3.1 e 3.2 assumiremos que $f(x,0) = 0$, $\phi < 0$ e $\psi > 0$. Então (3.1) possui uma solução positiva, uma negativa e uma que muda de sinal.*

Prova. Uma checagem cuidadosa das provas dos Teoremas 2.1 ao 2.3 nos dá o resultado. ■

Teorema 3.4 *Assuma que $f(x,0) = 0$ e que (a) e (H3.7) são satisfeitos. Então, (3.1) tem pelo menos três soluções não triviais, uma positiva, uma negativa e uma que muda de sinal.*

Prova. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno , sejam

$$\phi = -\delta\phi_1 \quad \text{e} \quad \psi = \delta\phi_1$$

e defina D_1 e D_2 como na prova do Teorema 3.1. Então,

$$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset, \quad A(\partial_x\partial_1) \subset D_1 \quad \text{e} \quad A(\partial_x\partial_1) \subset D_2.$$

Pela condição $f(x,0) = 0$ e (a), temos, para $\delta > 0$ escolhido convenientemente

$$\alpha := \inf_{u\in\partial_x(D_1\cap D_2)} J(u) > 0.$$

Portanto pelo Lema 1.5

$$\inf_{u\in\partial_x(D_1\cap D_2)} J(u) \geq \alpha > 0.$$

Desde que J satisfaça a condição $(\mathrm{P.\,S.})_c$ para qualquer $c \neq 0$, temos o resultado checando as provas dos Teoremas 2.1 ao 2.3. ■

Observação 3.6 *Denote por u_1, u_2, u_3 as três soluções não triviais garantidas pelo Teorema 3.4. Então é fácil ver que $J(u_1) > 0$, $J(u)_2 > 0$ e $J(u_3) > 0$.*

Observação 3.7 *Resultados na direção dos Teoremas 2.1 ao 2.3 forma obtidos pela primeira vez por Wang em [29]. Resultados relacionados a isso, podem ser encontrados em [9] e [19].*

Se impusermos outras condições adequadas a f em $t = 0$, obteremos mais soluções. Como primeiro exemplo temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5 *Assuma que (H3.5) (ou (H3.6)) e (b) (ou (c)) são satisfeitos e que $f(x,0) = 0$, $\lambda_j < f'_t(x,0) < \lambda_{j+1}$ para algum $j \geq 2$. Então, (3.1) tem pelo menos sete soluções não triviais.*

Prova. Desde que (b) (ou (c)) implicam (H3.1) com $\phi < 0$ e $\psi > 0$ em Ω, o Teorema 3.2 fornece três soluções fora de $D_1 \cap D_2$. Um resultado em [14] fornece quatro soluções não triviais dentro de $D_1 \cap D_2$. ■

Observação 3.8 *Para os resultados descritos no Teorema 3.5, veja [9], [10] e [19].*

Como um outro exemplo, vamos assumir que B é uma bola unitária em $\mathbb{R}^N$ centrada na origem e considere

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & x \in B, \\ u = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \tag{3.22}$$

Um cálculo direto mostra que

Lema 3.11 *A função $u(|r|) \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ é uma solução radialmente simétrica de (3.22) se, e somente se, $u(r) \in C[0,1]$ é uma solução da equação integral de Hammenstain*

$$u(r) = \int_0^1 K(r,s) f(u(s)) ds$$

onde

$$K(r,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{N-2}\, s^{N-1}\left(\dfrac{1}{r^{N-2}} - 1\right), & 0 \leq s \leq r \leq 1 \\ \dfrac{1}{N-2}\, s^{N-1}\left(\dfrac{1}{s^{N-2}} - 1\right), & 0 \leq r \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{3.23}$$

Lema 3.12 *Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $p > 1$. Se existe um número $t_0 > 0$ tal que $at_0^p + b \leq 2Nt_0$, então*

$$\begin{cases} -\Delta u = au^p + b, & x \in B, \\ u = 0, & x \in \partial B \end{cases} \tag{3.24}$$

tem uma solução positiva radialmente simétrica.

Prova. Seja $A : C[0,1] \to C[0,1]$ dado por

$$Au(r) = \int_0^1 K(r,s)\big[a|u(s)|^p + b\big] ds$$

Afirmação 1: A é completamente contínuo. Com efeito, seja (y_n) uma seqüência em $A(B)$, e provemos que ela possui uma subseqüência convergente. Ora, $y_n \in A(B)$ significa que existe (u_n), seqüência em $C[0,1]$, com $\|u_n\| \leq 1$ e $y_n = Au_n$, ou seja,

$$y_n(t) = \int_0^1 K(t,s)\big[a|u_n(s)|^p + b\big] ds.$$

Assim, temos que

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| = \left| \int\limits_0^1 K(t,s)\big[a|u_n(s)|^p + b\big] - K(\tau,s)\big[a|u_n(s)|^p + b\big] ds \right|,$$

ou seja,

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| = \left| a \int\limits_0^1 \big(K(t,s) - K(\tau,s)\big)|u_n(s)|^p ds + b \int\limits_0^1 \big(K(t,s) - K(\tau,s)\big) ds \right|.$$

Portanto, chegamos a

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| \leq a \int\limits_0^1 \big|\big(K(t,s) - K(\tau,s)\big)\big| \, |u_n(s)|^p ds + b \int\limits_0^1 \big|K(t,s) - K(\tau,s)\big| ds,$$

e finalmente temos que

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| \leq \big(a\|u\|^p + b\big) \int\limits_0^1 \big|\big(K(t,s) - K(\tau,s)\big)\big| \, ds.$$

Usando o Lema 3.11, concluímos que (y_n) é equicontínua e equilimitada. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, (y_n) possui uma subseqüência (y_{n_k}) que converge, provando a Afirmação 1.

Afirmação 2: Para a função $K(r,s)$ dada no Lema 3.12 é válida a seguinte desigualdade

$$\int_0^1 K(r,s) ds \leq \frac{1}{2N}.$$

Com efeito, usando a definição de $K(r,s)$, temos que

$$\int\limits_0^1 K(r,s) ds = \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right) \int\limits_0^r s^{N-1} ds + \frac{1}{N-2} \int\limits_r^1 s^{N-1}\left(\frac{1}{s^{N-2}} - 1\right) ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 K(r,s) ds &= \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right) \frac{s^N}{N}\bigg|_0^r + \frac{1}{N-2}\left[\frac{s^2}{2}\bigg|_r^1 - \frac{s^N}{N}\bigg|_r^1\right] \\ &= \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right) \frac{r^N}{N} + \frac{1}{N-2}\left[\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} - \left(\frac{1}{N} - \frac{r^N}{N}\right)\right].\end{aligned}$$

Simplificando essa última expressão chegamos a

$$\int\limits_0^1 K(r,s) ds = \frac{1}{N-2}\left[\frac{1-r^2}{2} - \frac{1-r^2}{N}\right],$$

ou seja,

$$\int_0^1 K(r,s)ds = \frac{1-r^2}{N-2}\cdot\frac{N-2}{2N}$$

$$= \frac{1-r^2}{2N}.$$

Esta última expressão claramente implica em,

$$\int_0^1 K(r,s)ds \leq \frac{1}{2N},$$

provando a Afirmação 2.

Seja $G = \{u \in C[0,1] : \|u\| \leq t_0\}$. Se $u \in G$, então, para $0 \leq r \leq 1$ temos,

$$\begin{aligned}
|Au(r)| =& \left|\int_0^1 K(r,s)\big(a|u(s)|^p + b\big)ds\right| \\
\leq& \left|\int_0^1 K(r,s)(at_0^p + b)ds\right| \\
\leq& (at_0^p + b)\int_0^1 |K(r,s)|ds \\
=& (at_0^p + b)\int_0^1 K(r,s)ds.
\end{aligned}$$

Usando a Afirmação 2 e nossa hipótese, concluímos que

$$|Au(r)| \leq \frac{(at_0^p + b)}{2N} \leq t_0.$$

Isto significa que $A(G) \subset G$. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (ver Teorema A.1), temos o resultado. ∎

Como uma aplicação, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u &= f(x,u), \quad x \in B, \\ u &= 0, \qquad\quad x \in \partial B \end{cases} \tag{3.25}$$

Teorema 3.6 *Em adição a (H3.2), (H3.3) e (H3.4) suponhamos que*

$$f(x,0) = 0,\ \lambda_j < f_t'(x,0) < \lambda_{j+1}$$

para todo $x \in \Omega$ e para algum $j \geq 2$. Se existir $t_0 > 0$ tal que $|f(x,t_0)| \leq 2Nt_0$ para todo $x \in \Omega$ e $|t| \leq t_0$ então (3.25) tem pelo menos sete soluções não triviais.

Teorema 3.7 *Em adição a (H3.5) (ou (H3.6)), vamos supor que*

$$f(x,0) = 0,\ \ \lambda_j < f_t'(x,0) < \lambda_{j+1}$$

para todo $x \in \Omega$ *e para algum* $j \geq 2$*. Se existe* $t_0 > 0$ *tal que* $|f(x,t_0)| \leq 2Nt_0$ *para todo* $x \in \Omega$ *e* $|t| \leq t_0$ *então (3.25) tem pelo menos sete soluções não triviais.*

Prova. (dos Teoremas 3.6 e 3.7) Fixemos um número $p > 1$ e sejam

$$a = b = \frac{2Nt_0}{1 + t_0^P}.$$

Pelo Lema 3.12, o problema (3.25) tem uma solução radialmente simétrica u_0 satisfazendo $0 < u_0 \leq t_0$ em Ω. Então, $-u_0$ e u_0 são rigorosamente sub- e super-solução de (3.25). Então, o resultado segue dos Teoremas 3.1 e 3.2. ∎

Capítulo 4

Aplicação a Sistemas de Equações Diferenciais

Seja $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ uma função contínua, 2π-periódica na variável t. Consideremos o seguinte sistema não-autônomo de segunda ordem:

$$\ddot{u} + \nabla u V(t, u) = 0 \tag{4.1}$$

Estamos interessados na existência e multiplicidade de soluções 2π-periódicas desse problema. O sistema apresentado em (4.1) foi estudado por muitos autores, citamos aqui, por exemplo [18] e [5].

Vamos estabelecer algumas notações. Para duas funções $u, v : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^N$, definiremos uma ordem parcial dada por

$$u \leq v \;\Leftrightarrow\; u_i(t) \leq v_i(t) \text{ para todo } t \in [0, 2\pi] \;\text{ e }\; i = 1, 2, \cdots, N.$$

No caso em que $u_i(t) < v_i(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ e $i = 1, 2, \cdots, N$, a relação entre u e v será denotada por $u \ll v$. Além disso, para duas matrizes simétricas A e B, diremos que $A \leq B$ se, e somente se, $B - A$ é positiva semidefinida, isto é, sua forma quadrática é não-negativa.

As seguintes condições serão usadas no decorrer deste capítulo.

(H5.1) Existem duas funções 2π-periódicas, $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tais que $\phi \ll \psi$ e

$$-\ddot{\phi} \leq \nabla u V(t, \phi),$$

$$-\ddot{\psi} \geq \nabla u V(t, \psi),$$

para qualquer $i = 1, \cdots, N$. Além disso, existe $t_i \in [0, T]$ tal que

$$-\ddot{\phi}_i(t_i) < \frac{\partial}{\partial u_i} V(t_i, \phi(t_i)),$$

para qualquer $i = 1, \cdots, N$. Existe, ainda, $t_i' \in [0, T]$ tal que

$$-\ddot{\psi}_i(t_i') > \frac{\partial}{\partial u_i} V(t_i', \psi(t_i')).$$

(H5.2) Existe um número $K > 0$ tal que, se u é uma função satisfazendo $u \geq \phi$ ou $u \leq \psi$ então toda entrada da matriz

$$\nabla_{uu} V(t, u) + K^2 I$$

é não negativa, onde $\nabla_{uu} V(t, u)$ é a matriz Hessiana de V e I é a matriz identidade de ordem $N \times N$.

(H5.3) Existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que, para $|u| \geq R$,

$$0 < \mu V(t, u) \leq u \cdot \nabla_u V(t, u)$$

onde $\cdot$ significa o produto interno e $|u|$ significa a norma euclidiana de u em $\mathbb{R}^N$.

(H5.4) Existem $R_1 > 0$ e matrizes constantes, positivamente definidas, A e B, com $AB = BA$, tais que

$$A \leq \nabla_{uu} V(t, u) \leq B, \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbb{R}^N, |u| \geq R_1.$$

Desde que $AB = BA$, existe uma matriz ortogonal T (isto é, a inversa de T coincide com sua transposta) tal que TAT' e TBT' são simultaneamente matrizes diagonais. Sejam

$$TAT' = \text{diag}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\} \quad \text{e} \quad TBT' = \text{diag}\{\beta_1, \cdots, \beta_N\}.$$

Consideraremos ainda que $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2, \cdots, N$ e que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N} [\alpha_i, \beta_i] \right) \cap \{n^2 : n = 0, 1, 2, \cdots\} = \emptyset.$$

Observação 4.1 *Há um caso simples no qual (H5.1) é satisfeita. Isto é*

$$\nabla_u V(t,u) g(\gamma) 0 \quad e \quad \nabla_u V(t,v) \ll 0$$

para constantes $u, v \in \mathbb{R}^N$ com $u \ll v$.

Observação 4.2 *As condições [(H5.1), (H5.2) e (H5.3)] ou [(H5.1), (H5.2) e (H5.4)] a serem utilizadas nos Teoremas 4.1 e 4.2, a seguir, podem ser satisfeitas por funções genéricas. Como exemplo, prova-se que*

$$V = \sum_{i=1}^{N} u_i^4 + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j + \frac{2N}{1+|u|^2}$$

satisfaz todas as condições do Teorema 4.1 enquanto que

$$V = 4|u|^2 + 2\sum_{i \neq j} u_i u_j + \frac{1}{(1+|u|^2)^{2N}}$$

satisfaz àquelas do Teorema 4.2. Nestes exemplos devemos tomar

$$\phi \equiv u \ll 0 \quad e \quad \psi \equiv v g(\gamma) 0,$$

nos quais $u_1 = u_2 = \cdots = u_N$, $v_1 = v_2 = \cdots = v_N$, e $|u|$ e $|v|$ são tomados suficientemente pequenos.

Observação 4.3 *Usando os resultados desta seção, podemos também lidar com o sistema elíptico*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \nabla_u F(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $F \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, e u é uma função vetorial m-dimensional. Resultados similares aos Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser obtidos para este sistema.

Nosso objetivo é usar o Teorema 2.3 para provarmos os dois teoremas, e principais resultados, deste capítulo.

Seja H o espaço de Hilbert das funções vetoriais 2π-periódicas $u(t)$ pertencentes a H^1 em $[0, 2\pi]$, munido do seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} (\dot{u} \cdot \dot{v} + K^2 u \cdot v) dt$$

onde K é um número fixo satisfazendo (H5.2). A norma correspondente em H é será denotada por $\|\cdot\|_H$. Sejam Z, X e Y os espaços de Banach das funções N-vetoriais $u(t)$ com período 2π e de classes C, C^1 e C^2, respectivamente, com a norma padrão. Observamos que X está imerso continuamente em H.

Defina um funcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - V(t,u) \right] dt, \quad u \in H.$$

Então J é de classe C^2 em H e os pontos críticos de J correspodem às soluções fracas de (4.1). Aqui $\tilde{K} := \{u \in H : J'(u) = 0\} \subset X$ é o conjunto dos pontos críticos de J. Um cálculo direto mostra que

$$J'(u) = u - \left(-\frac{d^2}{dt^2} + K^2 \right)^{-1} \left(\nabla_u V(t,u) + K^2 u \right), \quad u \in H,$$

onde $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + K^2 \right)^{-1}$ é operador inverso de $\left(-\frac{d^2}{dt^2} + K^2 \right)$ com condição periódica de período 2π. Denotemos

$$A(u) = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + k^2 \right)^{-1} \left(\nabla_u V(t,u) + k^2 u \right), \quad u \in H$$

então, A é Lipschitz como um operador de X em X.

Para $u_0 \in X$, consideremos o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} u(\tau) &= -u(\tau) + Au(\tau) \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

tanto em H quanto em X. Suponha que $u(\tau, u_0) = \tilde{u}(\tau, u_0)$ sejam as únicas soluções de (4.3) em H e em X respectivamente, com intervalo maximal de existência $[0, \eta(u_0))$ e $[0, \tilde{\eta}(u_0))$. Assumindo isto, temos o seguinte resultado

Lema 4.1 *Temos que $\eta(u_0) = \tilde{\eta}(u_0)$ e $u(\tau, u_0) = \tilde{u}(\tau, u_0)$ para todo $0 \leq \tau < \eta(u_0)$. Além disso, se*

$$\lim_{\tau \to \eta(u_0)} u(\tau, u_0) = u^*$$

na topologia de H para algum $u^* \in \tilde{K}$, o conjunto dos pontos críticos de J, então o limite existe e é o mesmo na topologia de X.

Prova. A prova deste Lema é similar a prova do Lema 3.10, porém mais simples. ∎

Teorema 4.1 *Se (H5.1), (H5.2) e (H5.3) são satisfeitas, então (4.1) tem ao menos quatro soluções periódicas.*

Prova. Vamos verificar a condição (P. S.) em H. A condição (H5.3) implica na existência de constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$V(t,u) \geq C_1|u|^{\mu} - C_2, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^N$$

segue que, para $u \in H$,

$$\begin{aligned} J(u) - \frac{1}{2}\langle J'(u), u\rangle &= \int_0^{2\pi} \left[-V(t,u) + \frac{1}{2}u \cdot \nabla_u V(t,u)\right] dt \\ &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) C_1 \int_0^{2\pi} |u|^{\mu} dt - C_3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J(u) - \frac{1}{\mu}\langle J'(u), u\rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int_0^{2\pi} |\dot{u}|^2 dt + \int_0^{2\pi} \left[-V(t,u) + \frac{1}{\mu}u \cdot \nabla_u V(t,u)\right] dt \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u\|_H^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) K^2 \int_0^{2\pi} |u|^2 dt - C_4 \end{aligned}$$

onde C_3 e C_4 são constantes. A partir dessas inequações vemos que, se $(u_n)_1^{\infty} \subset H$ é tal que $(J(u_n))$ é limitada e $J'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$, então

$$\int_0^{2\pi} |u_n|^{\mu} dt \leq C_5 + C_6\|u_n\|_H,$$

$$\|u\|_H^2 \leq C_7 + C_8 \int_0^{2\pi} |u_n|^2 dt,$$

onde C_5, C_6, C_7 e C_8 são constantes positivas. Vemos que (u_n) é limitada em H e portanto possui uma subseqüência convergente.

Definamos

$$D_1 = \{u \in X : ug(\gamma)\phi\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{u \in X : u \ll \psi\}. \tag{4.4}$$

É claro que D_1 e D_2 são subconjuntos abertos e convexos de X e $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Além disso, se $u \in \partial_X D_1$, então $u \geq \phi$. A condição (H5.2) implica que

$$\begin{aligned}\big(\nabla_u V(t,u) + K^2 u\big) - \big(\nabla_u V(t,\phi) + K^2\phi\big) = \\ = \int_0^1 \big(\nabla_{uu} V(t, \phi + s(u-\phi)) + K^2 I\big)(u-\phi)ds \geq 0.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + K^2\right)^{-1} u = \int_0^{2\pi} k(\cdot, s)u(s)ds,$$

onde

$$k(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\cosh\left((t-s-\pi)K\right)}{2K\sinh(\pi K)} & , \quad 0 \leq s \leq t \leq 2\pi, \\ \\ \dfrac{\cosh\left((s-t-\pi)K\right)}{2K\sinh(\pi K)} & , \quad 0 \leq t \leq s \leq 2\pi. \end{cases} \tag{4.5}$$

Desde que $k(t,s) > 0$ para qualquer $0 \leq t,\ s \leq 2\pi$, temos que $Au \geq A\phi$. Por (H5.1), o princípio do máximo mostra que $A\phi g(\gamma)\phi$. Consequentemente,

$$Aug(\gamma)\phi \quad \text{para todo} \quad u \in \partial_X D_1,$$

isto é,

$$Au \in D_1 \quad \text{para todo} \quad u \in \partial_X D_1.$$

Portanto, concluímos que $A(\partial_X D_1) \subset D_1$. Analogamente, temos que $A(\partial_X D_2) \subset D_2$.

Suponhamos que $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^N$, na qual $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Definamos o caminho $h_R : [0,1] \to X$ como sendo

$$h_R(s) = R\cos(\pi s)e_1 + R\sin(\pi s)e_2. \tag{4.6}$$

Então, para R suficientemente grande temos $h_R(0) \in D_1 \setminus D_2$ e $h_R(1) \in D_2 \setminus D_1$. O valor de J ao longo deste caminho pode ser estimado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} J(h_R(s)) &= -\int_0^{2\pi} V(t, h_R(s))dt \\ &\leq -\int_0^{2\pi} \left(C_1|h_R(s)|^\mu - C_2\right)dt \\ &= -2\pi(C_1|R|^\mu - C_2). \end{aligned}$$

Desde que

$$\inf_{u\in \overline{D}_1^X\cap \overline{D}_2^X} J(u) > -\infty,$$

temos que

$$\inf_{u\in \overline{D}_1^X\cap \overline{D}_2^X} J(u) > \sup_{s\in[0,1]} J(h_R(s))$$

para R suficientemente grande. Então, podemos aplicar o Teorema 2.3 e obter o resultado desejado. ■

Teorema 4.2 *Se (H5.1), (H5.2) e (H5.4) são satisfeitos, então (4.1) tem ao menos quatro soluções periódicas.*

Prova. Primeiro, vamos verificar a condição (P. S.) em H. Denotaremos por $g_1, g_2, \cdots, g_N$ os vetores coluna de T, onde T está definida como em (H5.4), consequentemente, $\{g_1, g_2, \cdots, g_N\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^N$. Para $i = 1, 2, \cdots, N$ definamos um espaço linear de dimensão finita como

$$\left.\begin{array}{l} E_i = \operatorname{span}\{1, \cos t, \sin t, \cdots, \cos n_i t, \sin n_i t\}, \\ \qquad\qquad \text{se } n_i^2 < \alpha_i \leq \beta_i < (n_i+1)^2 \quad \text{para algum inteiro não negativo} \quad n_i. \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

Denotemos

$$H_1 = \{u : u \in H, g_i \cdot u \in E_i, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \cdots, N\}. \tag{4.8}$$

Então H_1 é um subespaço de dimensão finita de H. Se denotarmos por H_2 o complemento ortogonal de H_1 em H, então qualquer elemento $u \in H$ pode ser decomposto da seguinte maneira

$$u = v + w, \quad \text{com} \quad v \in H_1 \quad \text{e} \quad w \in H_2.$$

Definamos o operador $\Gamma : H \to H$ como sendo

$$\Gamma u = u - \left(-\frac{d^2}{dt^2} + K^2\right)^{-1} \left(\nabla_u F(t,u) + K^2 u\right),$$

onde

$$F(t,u) = \mu(|u|)V(t,u) + \frac{1}{4}(1-\mu(|u|))\,((A+B)u)\cdot u$$

e $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável tal que

$$0 \leq \mu(t) \leq 1 \quad \text{para} \quad t \geq 0, \tag{4.9}$$

$$\mu(t) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq R_1, \tag{4.10}$$

$$\mu(t) = 1, \ \text{para } t \quad \text{suficientemente grande} \tag{4.11}$$

$$0 \leq t\mu'(t) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad |t^2\mu''(t)| \leq \varepsilon, \quad \text{para} \quad t \geq 0. \tag{4.12}$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número fixo suficientemente pequeno o qual determinaremos posteriormente. A existência de tal função μ pode ser provada, modificando-se a seguinte função

$$\widetilde{\mu}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq R_1, \\ \varepsilon \ln\left(\dfrac{t}{R_1}\right), & R_1 < t < R_1 e^{1/\varepsilon} \\ 1, & t \geq R_1 e^{1/\varepsilon} \end{cases} \tag{4.13}$$

Para qualquer $u \in \mathbb{R}^N$, a matriz Hessiana de $F(t,u)$ é

$$\begin{aligned} \nabla_{uu}F(t,u) = {} & \mu(|u|)\nabla_{uu}V(t,u) + \frac{1}{2}\left(1 - \mu(|u|)\right)(A+B) \\ & + \frac{\mu'(|u|)}{|u|}\left(u_i\frac{\partial V}{\partial u_j} + u_j\frac{\partial V}{\partial u_t}\right) \\ & - \frac{1}{2}\frac{\mu'(|u|)}{|u|}\left(u_i\sum_{k=1}^{N}(a_{jk}+b_{jk})u_k + u_j\sum_{k=1}^{N}(a_{ik}+b_{ik})u_k\right) \\ & + \frac{\mu'(|u|)}{|u|}\left(V(t,u) - \frac{1}{4}\left((A+B)u\right)\cdot u\right)(\delta_{ij}) \\ & + \frac{\mu''(|u|)|u| - \mu'(|u|)}{|u|^3}\left(V(t,u) - \frac{1}{4}\left((A+B)u\right)\cdot u\right)(u_iu_j), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde (d_{ij}) significa a matriz com a entrada d_{ij} na i-ésima linha e j-ésima coluna e $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Denotemos por $M_1(t,u)$, $M_2(t,u)$, $M_3(t,u)$ e $M_4(t,u)$ os últimos quatros termos da expressão de $\nabla_u uF(t,u)$, respectivamente. A condição (H5.4) implica na existência de uma constante $C > 0$ tal que , para cada i e j e para qualquer $t \in [0, 2\pi]$, $|u| \geq R_1$,

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}\right| \leq C, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial u_i}\right| \leq C|u|, \quad |V| \leq C|u|^2.$$

Portanto, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, para qualquer $t \in [0, 2\pi], u, v \in \mathbb{R}^N$,

$$|(M_1(t,u)v)\cdot v| \leq C_1\left(|u|\mu'(|u|)\right)|v|^2,$$

$$|(M_2(t,u)v)\cdot v| \le C_1\left(|u|\mu'(|u|)\right)|v|^2,$$

$$|(M_3(t,u)v)\cdot v| \le C_1\left(|u|\mu'(|u|)\right)|v|^2,$$

e

$$|(M_4(t,u)v)\cdot v| \le C_1\left(|u|^2|\mu''(|u|)| + |u|\mu'(|u|)\right)|v|^2.$$

Pela condição (H5.4) e (4.10), temos, para qualquer $t \in [0,2\pi]$, u, $v \in \mathbb{R}^N$,

$$\mu(|u|)\left(\nabla_{uu}V(t,u)v\right)\cdot v + \frac{1}{2}\left(1-\mu(|u|)\right)\left((A+B)v\right)\cdot v \ge (Av)\cdot v.$$

Portanto, por (4.14) podemos obter uma constante $C_2 > 0$ tal que, para qualquer $t \in [0,2\pi]$, u, $v \in \mathbb{R}^N$,

$$(\nabla_{uu}F(t,u)v)\cdot v \ge (Av)\cdot v - C_2\left(|u|^2|\mu''(|u|)| + |u|\mu'(|u|)\right)|v|^2.$$

Fixemos um $\delta > 0$ tal que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N}[\alpha_i-\delta,\beta_i+\delta]\right)\cap\{n^2 : n = 0,1,2,\cdots\} = \emptyset, \tag{4.15}$$

e escolhamos um ε tal que $0 < \varepsilon < \dfrac{\delta}{4C_2}$. Por (4.12), temos, para quaisquer $t \in [0,2\pi]$, u, $v \in \mathbb{R}^N$,

$$(\nabla_{uu}F(t,u)v)\cdot v \ge (Av)\cdot v - \frac{\delta}{2}|v|^2. \tag{4.16}$$

Analogamente, para cada $t \in [0,2\pi]$, u, $v \in \mathbb{R}^N$

$$(\nabla_{uu}F(t,u)v)\cdot v \le (Bv)\cdot v + \frac{\delta}{2}|v|^2. \tag{4.17}$$

Agora, se $v_1, v_2 \in H_1$ e $w \in H_2$ então teremos

$$
\begin{aligned}
\langle \Gamma(v_1 + w) - \Gamma\ (v_2 + w), v_1 - v_2 \rangle = \\
&= \|v_1 - v_2\|^2 - \int_0^{2\pi} (\nabla_u F(t, v_1 + w) \\
&-\nabla_u F(t, v_2 + w) + K^2(v_1 - v_2)\big) \cdot (v_1 - v_2) dt \\
&= \int_0^{2\pi} |\dot{v}_1 - \dot{v}_2|^2 dt - \int_0^{2\pi} (\nabla_u F(t, v_1 + w) \qquad (4.18) \\
&-\nabla_u F(t, v_2 + w)) \cdot (v_1 - v_2) dt \\
&= \int_0^{2\pi} |\dot{v}_1 - \dot{v}_2|^2 dt - \int_0^{2\pi} (\nabla_{uu} F(t, v_2 + \xi(v_1 - v_2) + w)(v_1 - v_2)) \\
&\cdot (v_1 - v_2) dt,
\end{aligned}
$$

onde $0 < \xi < 1$ é uma constante. Usando (4.16) temos, para cada $v_1, v_2 \in H$ e $w \in H_2$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\nabla_{uu} F(t, v_2 + \xi(v_1 - v_2) + w)(v_1 - v_2)) \cdot (v_1 - v_2) dt \geq \\
&\geq \int_0^{2\pi} (A(v_1 - v_2)) \cdot (v_1 - v_2) dt - \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} |v_1 - v_2|^2 dt \\
&= \int_0^{2\pi} (TAT'(Tv_1 - Tv_2)) \cdot (Tv_1 - Tv_2) dt - \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} |Tv_1 - Tv_2|^2 dt \qquad (4.19) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (v_1 - v_2)|^2\, dt - \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (v_1 - v_2)|^2\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha_i - \frac{\delta}{2} \right) \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (v_1 - v_2)|^2 dt.
\end{aligned}
$$

Pelos itens (4.7), (4.8) e (4.15), vemos que se $v_1, v_2 \in H_1$ então

$$\int_0^{2\pi} |g_i \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)|^2 dt \leq (\alpha_i - \delta) \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (v_1 - v_2)|^2 dt$$

e protanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\dot{v}_1 - \dot{v}_2|^2 dt &= \sum_{i=1}^{N} \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i - 3\delta/4}{\alpha_i - \delta} \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)|^2 dt \\
&- \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i - \delta} \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)|^2 dt \qquad (4.20) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha_i - \frac{3\delta}{4} \right) \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (v_1 - v_2)|^2 dt \\
&- \frac{\delta}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i - \delta} \int_0^{2\pi} |g_i \cdot (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Combinando (4.18), (4.19) e (4.20) temos que, para quaisquer $v_1, v_2 \in H_1$ e $w \in H_2$,

$$\langle \Gamma(v_1 + w) - \Gamma(v_2 + w), v_1 - v_2 \rangle \leq -C_3 \|v_1 - v_2\|^2, \qquad (4.21)$$

onde cada $C_3 > 0$ é uma constante. Analogamente, existe uma constante $C_4 > 0$ tal que, para $v \in H_1$ e $w_1, w_2 \in H_2$,

$$\langle \Gamma(v + w_1) - \Gamma(v + w_2), w_1 - w_2 \rangle \leq C_4 \|w_1 - w_2\|^2. \qquad (4.22)$$

Definamos $\widetilde{J} : H \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$\widetilde{J}(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} |\dot{u}|^2 - F(t, u) \right] dt.$$

Então, o operador gradiente de $\widetilde{J}$ é Γ. Para quaisquer $v_1, v_2 \in H_1$ e $w_1, w_2 \in H_2$, usando (4.21) temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}(v_1 + w_1) - \widetilde{J}(v_2 + w_1) &= \int_0^1 \langle \Gamma(v_2 + \xi(v_1 - v_2) + w_1), v_1 - v_2 \rangle d\xi = \\
&= \langle \Gamma(v_1 + w_1), v_1 - v_2 \rangle \\
&+ \int_0^1 \left(\Gamma(v_2 + \xi(v_1 - v_2) + w_1) - \Gamma(v_1 + w_1), v_1 - v_2 \right) d\xi \\
&\geq \langle \Gamma(v_1 + w_1), v_1 - v_2 \rangle + C_3 \|v_1 - v_2\|^2 \int_0^1 (1 - \xi) d\xi \\
&= \langle \Gamma(v_1 + w_1), v_1 - v_2 \rangle + \frac{1}{2} C_3 \|v_1 - v_2\|^2.
\end{aligned}$$

De modo semelhante, temos que

$$\widetilde{J}(v_2+w_1)-\widetilde{J}(v_2+w_2)\geq\langle\Gamma(v_2+w_2),w_1-w_2\rangle+\frac{1}{2}C_4\|w_1-w_2\|^2,$$

$$\widetilde{J}(v_2+w_2)-\widetilde{J}(v_1+w_2)\geq\langle\Gamma(v_2+w_2),v_2-v_1\rangle+\frac{1}{2}C_3\|v_2-v_1\|^2,$$

$$\widetilde{J}(v_1+w_2)-\widetilde{J}(v_1+w_1)\geq\langle\Gamma(v_1+w_1),w_2-w_1\rangle+\frac{1}{2}C_4\|w_2-w_1\|^2.$$

Combinando as quatro últimas inequações, temos que

$$\langle\Gamma(v_1+w_1)-\Gamma(v_2+w_2),(-v_1+w_1)-(-v_2+w_2)\rangle\geq C_3\|v_1-v_2\|^2+C_4\|w_1-w_2\|^2.$$

Fazendo $v_2=w_2=0$, em vista que $\Gamma(0)=0$ temos

$$\langle\Gamma(v_1+w_1),-v_1+w_1\rangle\geq C_3\|v_1\|^2+C_4\|w_1\|^2\geq C_5(\|v_1\|^2+\|w_1\|^2),$$

onde $C_5=\min\{C_3,C_4\}$. Portanto, para qualquer $u\in H$,

$$\|u\|\leq C_5^{-1}\|\Gamma(u)\|.$$

Desde que

$$J'(u_n)=\Gamma(u_n)+\left(-\frac{d^2}{dt^2}+K^2\right)^{-1}(\nabla_uF(t,u_n)-\nabla_uV(t,u_n)),$$

temos que para cada seqüência $(u_n)\subset H$ tal que $J'(u_n)\to 0$ com $n\to+\infty$,

$$\|u_n\|\leq C_5^{-1}\|J'(u_n)\|+C_5^{-1}\left\|\left(-\frac{d^2}{dt^2}+K^2\right)^{-1}(\nabla_uF(t,u_n)-\nabla_uV(t,u_n))\right\|.$$

Por (4.11), $\nabla_uF(t,u)-\nabla_uV(t,u)$ é limitado em $[0,\pi]\times\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $C_6>0$ tal que

$$\|u_n\|\leq C_6.$$

Para esta inequação, temos facilmente a condição (P. S.).

Definamos dois subconjuntos abertos D_1 e D_2 de X como em (4.4), na prova do Teorema 4.1. Então

$$A(\partial_XD_1)\subset D_1\quad\text{e}\quad A(\partial_XD_2)\subset D_2$$

Definamos o caminho $h_R:[0,1]\to X$ como em (4.6), na prova do Teorema 4.1. Então, para R suficientemente grande,

$$h_R(0)\in D_1\backslash D_2\quad\text{e}\quad h_R(1)\in D_2\backslash D_1.$$

Desde V e $\nabla_u V$ são limitados em $|u| \leq R_1$, quando $R > R_1$ o valor de J em $h_R(s)$ é estimado da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
J(h_R(s)) &= -\int_0^{2\pi} V(t, h_R(s))dt = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left[V\left(t, \frac{R_1}{R} h_R(s)\right) + \left(1 - \frac{R_1}{R}\right) \nabla_u V\left(t, \frac{R_1}{R} h_R(s)\right) \cdot h_r(s) \right. \\
&\left. + \left(1 - \frac{R_1}{R}\right)^2 (\nabla_{uu} V(t, \xi h_R(s)) h_R(s)) \cdot h_R(s) \right] dt \\
&\leq -2\pi \left(1 - \frac{R_1}{R}\right)^2 (A h_R(s)) \cdot h_R(s) + C_7 R + C_8 \\
&\leq -2\pi\alpha(R - R_1)^2 + C_7 R + C_8,
\end{aligned}$$

onde $\frac{R_1}{R} < \xi < 1$, C_7 e C_8 são constantes positivas e $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. Portanto,

$$\inf_{u \in \overline{D}_1^X \cap \overline{D}_2^X} J(u) > \sup_{s \in [0,1]} J(h_R(s))$$

se R é suficientemente grande. Usando o Teorema 2.3 chegamos ao resultado desejado.

■

Apêndice A

Resultados Básicos

Com o objetivo de facilitar a leitura deste trabalho, reunimos aqui alguns resultados básicos não incluindo, em geral, suas demonstrações. Citaremos, porém, alguns textos clássicos que contêm as provas aqui omitidas, como por exemplo [Brezis] e [Adams].

A.1 Existência de um Campo Pseudo-Gradiente

Mostraremos neta seção que para um funcional J, de classe C^1, sempre está associado um campo pseudo-gradiente W de vetores.

Observação A.1 *Se $v \in X$ é tal que*

(i) $\langle J'(u), v\rangle \geq \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2$ *para todo $u \in X$;*

(ii) $\|v\| \leq 2\|J'(u)\|$ *para todo $u \in X$.*

então v é dito um **vetor pseudo-gradiente** *para J em $u \in X$. Observemos que tal vetor não é único.*

Lema A.1 *Assumindo as condições da* **Definição 1.1**, *existe um campo pseudo-gradiente para J em X_0.*

Prova. Tomemos $\widetilde{u} \in X_0$. É claro que $J'(\widetilde{u}) \neq 0$. Desde que $J'(\widetilde{u})$ é um funcional linear contínuo, temos

$$\|J'(\widetilde{u})\| = \sup_{\|w\|=1} \langle J'(\widetilde{u}), w\rangle. \tag{A.1}$$

Daí temos que existe $(w_n) \in X$ com $\|w_n\| = 1$ e

$$\langle J'(\widetilde{u}), w_n\rangle \to \|J'(\widetilde{u})\|.$$

Assim, existe $w = w_n$ para n suficientemente grande, tal que

$$\langle J'(\widetilde{u}), w\rangle > \frac{4}{5}\|J'(\widetilde{u})\|. \tag{A.2}$$

Agora, definindo a função

$$\begin{aligned} v : X_0 &\to X \\ \widetilde{u} &\mapsto v(\widetilde{u}) = \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\|w, \end{aligned}$$

temos

$$\|v(\widetilde{u})\| = \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\|\|w\| = \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\| < 2\|J'(\widetilde{u})\|,$$

ou seja,

$$\|v(\widetilde{u})\| < 2\|J'(\widetilde{u})\|.$$

Além disso,

$$\langle J'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u})\rangle = \left\langle J'(\widetilde{u}), \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\|w \right\rangle,$$

o que implica

$$\langle J'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u})\rangle = \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\|\langle J'(\widetilde{u}), w\rangle.$$

De (A.2), obtemos

$$\langle J'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u})\rangle > \frac{5}{4}\|J'(\widetilde{u})\| \cdot \frac{4}{5}\|J'(\widetilde{u})\|,$$

logo

$$\langle J'(\widetilde{u}), v(\widetilde{u})\rangle > \frac{1}{2}\|J'(\widetilde{u})\|^2.$$

Daí, para cada $\widetilde{u} \in X_0$ o vetor $v(\widetilde{u})$ é um vetor pseudo-gradiente para J em $\widetilde{u}$.

Sendo J' contínua, existe uma vizinhança aberta de $\widetilde{u} \in X_0$, que denotaremos por $W_{\widetilde{u}}$, tal que para cada $u \in W_{\widetilde{u}}$,

$$\|v(\widetilde{u})\| < 2\|J'(u)\| \tag{A.3}$$

e

$$\langle J'(u), v(\widetilde{u})\rangle > \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2. \tag{A.4}$$

Observemos que a família $\{W_{\widetilde{u}} : \widetilde{u} \in X_0\}$ é uma cobertura aberta para X_0. Além disso, considerando em $X_0 \subset X$ a métrica induzida de X, $d(x,y) = \|x-y\|_X, x, y \in X_0$, temos que X_0 é paracompacto. Logo, existe um refinamento localmente finito $\{W_{\widetilde{u}_i}\}_{i\in I}$. Assim, existe uma partição de unidade contínua localmente lipschitziana $\{J_i\}_{i\in I}$ subordinada a $\{W_{\widetilde{u}_i}\}_{i\in I}$ com $0 \leq J_i \leq 1$ e suporte em $W_{\widetilde{u}_i}$, onde $\sum_{i\in I} J_i = 1$ em X_0.

Considerando

$$W(u) = \sum_{i\in I} J_i(u)v_i \quad \text{onde} \quad v_i = v(\widetilde{u}_i), \quad \text{para todo} \quad u \in X_0,$$

para cada $u \in X_0$, existe $\widetilde{I} \subset I$ finito tal que

$$W(x) = \sum_{i\in\widetilde{I}} J_i(x)v_i, \forall x \in B_\delta(u).$$

Clareando a idéia, suponhamos $\widetilde{I} = \{1, 2, \cdots, n_0\}$, $n_0 = n_0(u)$ e $\delta = \delta(u)$. Assim,

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n_0} J_i(x)v_i, \forall x \in B_\delta(u),$$

em particular

$$W(u) = \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u)v_i.$$

Note que W é localmente Lipschitziana, pois W é uma soma finita de funções $J_i(u)v_i$ localmente Lipschitzianas. Além disso,

$$\|W(u)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n_0} J_i(u)v_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u)\|v_i\|.$$

Assim, usando (A.3),

$$\|W(u)\| < \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u) \cdot 2 \cdot \|J'(u)\|,$$

o que implica

$$\|W(u)\| < 2\|J'(u)\| \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u) = 2\|J'(u)\| \sum_{i\in I} J_i(u),$$

isto é,

$$\|W(u)\| < 2\|J'(u)\|.$$

Note agora, que de

$$\langle J'(u), W(u)\rangle = \left\langle J'(u), \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u)v_i \right\rangle,$$

segue

$$\langle J'(u), W(u)\rangle = \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u) \left\langle J'(u), v_i\right\rangle.$$

Por (A.4), obtemos

$$\langle J'(u), W(u)\rangle > \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u) \cdot \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2,$$

o que implica

$$\langle J'(u), W(u)\rangle > \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2 \sum_{i=1}^{n_0} J_i(u),$$

portanto

$$\langle J'(u), W(u)\rangle > \frac{1}{2}\|J'(u)\|^2,$$

mostrando assim a existência de um campo pseudo-gradiente para J. ■

A.2 Outros Resultados Relevantes

Teorema A.1 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)
Sejam X um espaço vetorial normado e $M \subset X$ um conjunto compacto e convexo. Então qualquer função contínua $T : M \to M$ tem um ponto fixo.

Definição A.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um operador $T : X \to Y$ é compacto se $T(B)$ é relativamente compacto (isto é, $\overline{T(B)}$ é compacto) para qualquer $B \subset X$ limitado.*

Observação A.2 *Mostra-se que um operatdor $T : X \to Y$ é compacto se, e somente se, $(T(x_n))$ possui subseqüência convergente, para qualquer seqüência (x_n) em X limitada. Se T é linear e compacto e $x_n \rightharpoonup x$ então $Tx_n \to Tx$.*

Definição A.3 *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados. Dizemos que X está imerso continuamente em Y, e denotaremos $X \hookrightarrow Y$, se* *(i)* X *é um subespaço de* Y*;*

(ii) $i : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ *é contínua, ou seja, existe* $C > 0$ *tal que* $\|x\|_Y = \|i(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Teorema A.4 (de Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Então,*

- *se* $p < N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p^*[$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$*;*
- *se* $p = N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, +\infty[$*;*
- *se* $p > N$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

com injeções compactas.

Prova. Ver [4], Teorema IX.16. ■

Lema A.2 (de Hopf) *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $-\Delta u \leq 0$ *em* Ω. *Suponhamos que existe* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

$$u(x_0) > u(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Além disso suponhamos que Ω *satisfaz a condição da esfera interior em* x_0, *isto é, existe uma bola aberta* $B \subset \Omega$, *com* $x_0 \in \partial B$.

Então a derivada normal exterior de u *em* x_0, *caso exista, satisfaz*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Aqui, η *denota o vetor unitário normal exterior a* B.

Prova. Veja [12], seção 6.4.2. ■

Teorema A.5 *Seja* X *um espaço vetorial normado real e* $C \subset X$ *um conjunto convexo. Então, são equivalentes:*

(a) C *é fechado na topologia forte;*

(b) C *é fechado na topologia fraca.*

Prova. A implicação $(a) \Rightarrow (b)$ é óbvia. Vamos mostrar a implicação contrária. Para isto, mostraremos que C^C, o complementar de C, é aberto em $\sigma(X, X')$. De fato, dado $x_0 \notin C$, desde que $\{x_0\}$ é fechado e C é convexo, pela Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, x_0 \rangle < \alpha < \langle f, y \rangle, \text{ para todo } y \in C$$

Faça, então,

$$V = \{x \in X : \langle f, x \rangle < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha)$$

e teremos $x_0 \in V$, $V \cap C = \emptyset$, ou seja, $V \subset C^C$. Como $V \in \sigma(X, X')$, temos que $C^C \in \sigma(X, X')$. ■

Teorema A.6 *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma seqüência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Prova. Veja [4], Proposição III.5. ■

Teorema A.7 *Seja X um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e seja $M \subset X$ um subconjunto fechado fraco de X. Suponha $E : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ é coercivo em M com respeito a X, isto é,*

$$E(u) \to \infty \quad \textit{quando} \quad \|u\| \to \infty \quad \textit{para} \quad u \in M,$$

e (sequencialmente) fracamente semi-contínua inferior em M, com respeito a X, isto é, para qualquer seqüência (u_n) em M tal que $u_n \rightharpoonup u \in M$ fracamente em X vale que

$$E(u) \leq \lim_{m \to \infty} \inf E(u_n).$$

Então E é limitado por baixo em M e atinge seu ínfimo em M.

Prova. Ver o item 1.2 de [22] ■

Definição A.8 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função de Carathéodory se:*

(i) para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x \mapsto f(x, s)$ é mensurável a Lebesgue em Ω;

(ii) para quase todo ponto $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Definição A.9 *Suponha que Ω é um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função Carathéodory. Dado $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, considere a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\cdot, u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = u_0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{A.5}$$

Uma função $u \in H^1(\Omega)$ é uma **sub-solução** *fraca de (A.5) se $u \leq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(\cdot, u)\varphi dx \leq 0 \quad \text{com} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad e \quad \varphi \geq 0,$$

e é uma **super-solução** *se $u \geq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(\cdot, u)\varphi dx \geq 0 \quad \text{com} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad e \quad \varphi \geq 0.$$

Elas são ditas **estritas** *se não forem solução de (A.5).*

Teorema A.10 (Método de Sub- e Super-solução) *Suponha que $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma sub-solução enquanto $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ é uma super-solução do problema (A.5) e assuma isso com constantes $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ tais que*

$$-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < +\infty, \tag{A.6}$$

quase sempre em Ω, com Ω limitado e com fronteira suave. Então existe uma solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ de (A.5), satisfazendo a condição $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω.

Prova. A idéia aqui é aplicar o Teorema A.7. Sem perda de generaldidade podemos supor $u_0 = 0$. Consideremos também,

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,v)dv$$

a primitiva de f. As equações em (A.5) são conhecidas como equações de Euler-Lagrange do funcional

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx. \tag{A.7}$$

Nossas suposições sobre a não linearidade, entretanto, não nos permitem concluir que o funcional E está bem definido ou até mesmo diferenciável em $X = H_0^1(\Omega)$, o menor espaço onde temos chance de verificar coercividade de E. Não podemos, por exemplo, garantir que a segunda integral em (A.7) é finita. Iremos então, restringir E para o conjunto

$$M = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad q.t.p. \right\}.$$

Notemos que, por hipótese, (A.6) garante que $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$ e consequentemente $M \subset L^\infty(\Omega)$, pois Ω é um domínio limitado. Dado $u \in M$, como $F(x,s)$ é contínua e $\overline{\Omega} \times [\underline{c}, \overline{c}]$ é compacto, temos que existem $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tais que $c_0 \leq F(x, u(x)) \leq c_1$ para todo $u \in M$, $x \in \overline{\Omega}$. Observemos ainda que:

(i) Como o espaço $H_0^1(\Omega)$ é de Hilbert, ele é reflexivo;

(ii) M é fechado e convexo. De fato, M é fechado, pois dada a seqüência (u_n) tal que $(u_n) \subset M$ e $u_n \to u_0$ na norma de H_0^1. Temos que $\underline{u}(x) \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)$ quase sempre para todo n, ou seja, a menos de um conjunto $F_n \subset \Omega$ com medida nula. Então, o conjunto $F_0 = \cup F_n$ tem medida nula. Como $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \to u_0$ em L^2 e, portanto, existe $G_0 \subset \Omega$, conjunto de medida nula, tal que $u_n(x) \to u_0(x)$, para todo $x \in \Omega \setminus G_0$. Disto e do fato que $\underline{u}(x) \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)$, para todo $x \in \Omega \setminus (F_0 \cup G_0)$, tomando o limite obtemos

$$\underline{u}(x) \leq u_0(x) \leq \overline{u}(x)$$

para todo $x \in \Omega \setminus (F_0 \cup G_0)$ e, portanto, $u_0 \in M$. Para concluirmos que M é convexo, sejam $u, v \in M$. Então temos, para $0 \leq t \leq 1$,

$$\underline{u} = t\underline{u} + (1-t)\underline{u} \leq tu + (1-t)v \leq t\overline{u} + (1-t)\overline{u} = \overline{u},$$

ou seja, $tu + (1-t)v \in M$. Portanto, aplicando o Teorema A.5, M é fracamente fechado.

(iii) Desde que M é essencialmente limitado e $-F(x, u(x)) \geq -c$, nosso funcional E é tal que

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - C$$

sendo, portanto, coercivo em M.

(iv) Finalmente, E é fracamente semi-contínuo inferiormente em M. Usando o fato que $u_n \rightharpoonup u$, temos que $\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$ (veja o Teorema A.6). Para vermos isto, basta verificarmos que

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \to \int_\Omega F(x,u)dx,$$

para $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, onde $u_n, u \in M$. Com efeito, passando para uma subseqüência se necessário, podemos supor que $u_n \to u$ pontualmente q.t.p. e $|F(x,u_n(x))| \leq c$ uniformemente. Portanto, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e concluir a convergência.

Os quatro itens acima nos permitem usar o Teorema A.7 e concluir que existe um minimizante u relativo a M com $u \in M$. Para ver que u resolve (A.5), para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, considere

$$v_\varepsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u+\varepsilon\varphi\}\} = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in M$$

com

$$\varphi^\varepsilon = \max\{0, u+\varepsilon\varphi - \overline{u}\} \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi_\varepsilon = -\min\{0, u+\varepsilon\varphi-\underline{u}\} \geq 0$$

Note que $\varphi^\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. E é diferenciável na direção $v_\varepsilon - u$. Desde que u minimiza E em M temos

$$0 \leq \langle v_\varepsilon - u, E'(u)\rangle = \varepsilon\langle \varphi, E'(u)\rangle - \langle \varphi^\varepsilon, E'(u)\rangle + \langle \varphi_\varepsilon, E'(u)\rangle$$

assim, obtemos

$$\langle \varphi, E'(u)\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\langle \varphi^\varepsilon, E'(u)\rangle - \langle \varphi_\varepsilon, E'(u)\rangle\right].$$

Como $\overline{u}$ é supersolução de (A.5) temos

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^\varepsilon, E'(u)\rangle =& \langle \varphi^\varepsilon, E'(\overline{u})\rangle + \langle \varphi^\varepsilon, E'(u) - E'(\overline{u})\rangle \\
\leq& \langle \varphi^\varepsilon, E'(u) - E'(\overline{u})\rangle \\
=& \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{\nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - [f(x,u)-f(x,\overline{u})](u+\varepsilon\varphi-\overline{u})\right\} dx \\
\leq& \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u)-f(x,\overline{u})|\,|\varphi| dx
\end{aligned}$$

onde $\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{x} > u(x)\}$. Notemos que $\text{med}(\Omega^\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue obtemos

$$\langle \varphi^\varepsilon, E'(u)\rangle \geq o(\varepsilon) \quad \text{onde} \quad \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Analogamente temos

$$\langle \varphi_\varepsilon, E'(u) \rangle \leq o(\varepsilon) \quad \text{onde} \quad \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Donde concluímos que

$$\langle \varphi, E'(u) \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Invertendo o sinal de φ e desde que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em H_0^1 temos finalmente que $E'(u) = 0$ como afirmamos. ■

Teorema A.11 (Princípio do Máximo) *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $Lu = -\Delta u + mu$, com $m > 0$. Suponha que Ω é conexo, aberto e limitado. Então*

(i) Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante dentro de Ω.

(ii) Similarmente, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante dentro de Ω.

Prova. Veja [12], Teorema 3 da Seção 6.4. ■

Apêndice B

Prova do Lema 2.1

Nesta seção, provaremos o Lema 2.1. Por comodidade, tornaremos a enunciá-lo.

Lema B.1 *Sejam* $\widetilde{X} = \{(t,s) : 0 \leq t, s \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{O}$ *um subconjunto aberto de* $\widetilde{X}$ *tal que*

$$\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathcal{O}, \tag{B.1}$$

$$\{(t,1) : 0 \leq t \leq 1\} \cap \mathcal{O} = \emptyset \tag{B.2}$$

Então existe uma componente conexa Γ *de* $\partial\mathcal{O}$*, a fronteira de* $\mathcal{O}$ *em* $\widetilde{X}$*, intersectando ambos* $\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\}$ *e* $\{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\}$*, isto é,*

$$\{(0,s) : 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma \neq \emptyset, \tag{B.3}$$

$$\{(1,s) : 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma \neq \emptyset. \tag{B.4}$$

Prova.

Se denotarmos por O_1 a componente conexa de $\mathcal{O}$ contendo

$$\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\},$$

então $\partial O_1 \subset \partial\mathcal{O}$. Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar que $\mathcal{O}$ já é conexo. Seja

$$s_0 = \sup\{s : (0,s) \in \bar{\mathcal{O}}\}.$$

Observemos que por $\mathcal{O}$ ser aberto devemos, necessariamente, ter que $s_0 \neq 0$. Então (B.1) e (B.2) implicam que $0 < s_0 < 1$ e $(0, s_0) \in \partial\mathcal{O}$. Seja Γ a componente conexa de $\partial\mathcal{O}$ que contém $(0, s_0)$ e vamos provar que Γ satisfaz (B.3) e (B.4). Notemos que, pela definição de s_0, (B.3) é obvio, uma vez que $(0, s_0)$ é elemento da intersecção. Para (B.4), consideraremos, por contradição, que

$$\{(1, s) : 0 \leq s \leq 1\} \cap \Gamma = \emptyset$$

Vamos agora estabelecer uma nomenclatura para os lados de $\widetilde{X}$, isto é, denotaremos por L_1 o conjunto $\{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$, por L_2 o conjunto $\{(1, s) : 0 \leq s \leq 1\}$, por L_3 o conjunto $\{(t, 1) : 0 \leq t \leq 1\}$ e por L_4 o conjunto $\{(0, s) : 0 \leq s \leq 1\}$. Desse modo, notemos que usando (B.2), a definição de s_0 e nossa hipótese de contradição concluímos que $\Gamma \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$. Adicionando a isso o fato de Γ ser fechado temos que $\delta_1 = d(L_1 \cup L_2 \cup L_3, \Gamma) > 0$, onde $d(\cdot, \cdot)$ significa a distância entre dois conjuntos de $\tilde{X}$. Pela compacidade de Γ, existe um número finito de pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \Gamma$ tal que o número finito de bolas

$$B\left(x_1, \frac{\delta_1}{3}\right), B\left(x_2, \frac{\delta_1}{3}\right), \cdots, B\left(x_n, \frac{\delta_1}{3}\right)$$

constitui uma cobertura aberta de Γ. Aqui estamos considerando a notação

$$B\left(x_i, \frac{\delta_1}{3}\right) = \left\{x : x \in \widetilde{X}, x_i \in \Gamma, d(x, x_i) < \frac{\delta_1}{3}\right\}.$$

Denotemos

$$U_1 := \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_1}{3}\right).$$

Claramente temos que $\Gamma \subset U_1$ e, pela escolha do raio das bolas, $\overline{U}_1 \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$.

Agora, vamos construir um conjunto aberto U de $\tilde{X}$ tal que $\Gamma \subset U$, $\overline{U} \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$ e $\partial U \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$. A construção de tal conjunto U obedecerá um dos dois casos abaixo.

Caso (i): $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$. Nesse caso, tomamos simplemesnte $U = U_1$.

Caso (ii): $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O} \neq \emptyset$. Note que $\overline{U_1} \cap \partial\mathcal{O}$ é um espaço métrico compacto e que Γ e $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O}$ são dois subespaços métricos fechados e disjuntos de $\overline{U_1} \cap \partial\mathcal{O}$. Como Γ é uma componente conexa de $\partial\mathcal{O}$ e $\Gamma \cap \partial U_1 = \emptyset$, então não existe uma componente conexa de $\overline{U}_1 \cap \partial\mathcal{O}$ que intersecte ambos Γ e $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O}$. Usando um resultado de [30] existem dois conjuntos compactos K_A e K_B tais que $\overline{U}_1 \cap \partial\mathcal{O} = K_A \cup K_B$, $K_A \cap K_B = \emptyset$, $\Gamma \subset K_A$ e $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O} \subset K_B$. Seja $\delta_2 = d(K_A, K_B)$, então temos que $\delta_2 > 0$. A compacidade de K_A implica que existe um número finito de pontos $y_1, y_2, \cdots, y_m \in K_A$ tal que as bolas abertas

$$B\left(y_1, \frac{\delta_2}{3}\right), B\left(y_2, \frac{\delta_2}{3}\right), \cdots, B\left(y_m, \frac{\delta_2}{3}\right)$$

em $\widetilde{X}$ constituem uma cobertura aberta de K_A. Denotemos

$$U_2 := \bigcup_{i=1}^{m} B\left(y_i, \frac{\delta_2}{3}\right).$$

Então, $\Gamma \subset K_A \subset U_2$. Tomando $U = U_1 \cap U_2$, temos

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \left[B\left(x_i, \frac{\delta_1}{3}\right) \cap B\left(y_j, \frac{\delta_2}{3}\right)\right].$$

Já vimos que $\Gamma \subset U_1$ e $\Gamma \subset U_2$, decorrendo imediatamente que $\Gamma \subset U$. Além disso, também é imediato que $\overline{U} \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$. Afirmamos que $\partial U \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$. Com efeito, se $\partial U \cap \partial\mathcal{O} \neq \emptyset$, então existe um ponto $x \in \partial U \cap \partial\mathcal{O}$, ou seja, $x \in K_A \cup K_B$. Lembrando que esses conjuntos são disjuntos, há duas possibilidades: (i) Se $x \in K_A$ então $x \notin K_B$. Como $x \in \partial\mathcal{O}$ e $\partial U_1 \cap \partial\mathcal{O} \subset K_B$, segue que $x \notin \partial U_1$. Além disso, como $x \in \partial U \subset \overline{U} \subset \overline{U}_1$ então devemos ter $x \in U_1$. Mas $x \in \partial U$ acarreta $x \notin U = U_1 \cap U_2$, resultando que $x \notin U_2$, o que é uma contradição pois sendo U_2 uma cobertura aberta de K_A, é claro que $K_A \subset U_2$. (ii) Se $x \in K_B$, então $d(x, K_A) \geq \delta_2$. Mas $x \in \partial U \subset \overline{U} \subset \overline{U}_2$ implica que $d(x, K_A) \leq \dfrac{\delta_2}{3}$, que também nos leva a uma contradição. Portanto, devemos ter $\partial U \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$.

Denotemos por V a componente conexa de U contendo Γ. Desse modo, temos que $\Gamma \subset V$, $\overline{V} \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset$ e $\partial V \cap \partial\mathcal{O} = \emptyset$. Pela construção de U vemos que ∂U é composta de um número finito de arcos circulares, e consqüentemente também o é ∂V já que $\partial V \subset \partial U$. Seja

$$c = \{(t_0 + r\cos\theta, s_0 + r\text{sen}\theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

um arco circular com dois pontos extremos $P_i = (t_0 + r\cos\theta_i, s_0 + r\text{sen }\theta_i)(i = 1, 2)$. Por r_c denotaremos quaisquer dos raios começando por P_i, segundo a direção do vetor

$(-1)^{i+1}(-\text{sen }\theta_i, \cos\theta_i)(i = 1, 2)$, isto é, r_c é tangente a c em um de seus pontos extremos e aponta na direção para onde c se dirige. Se dois arcos circulares c e c' se intersectam em um ponto extremo comum e r_c e $r_{c'}$ são dois raios começando nesse ponto comum, então o ângulo entre r_c e $r_{c'}$ será chamado **ângulo de c para c'**. Denotemos por Φ o conjunto de todos os arcos circulares contidos em ∂V. Seja

$$s_1 = \sup\{s : (0, s) \in \overline{V}\}.$$

Então é claro que $0 < s_1 < 1$. Suponhamos que $c_1 \in \Phi$ seja o arco circular no qual $e_0 := (0, s_1)$ é um ponto extremo tal que o ângulo de r_{c_1} para o raio $\{(0, s) : s \geq s_1\}$ é o menor dentre todos os tais ângulos. Desse modo, é fácil ver que V está abaixo de c_1 e c_1 curva-se para baixo. Se o outro ponto extremo de c_1, que denotaremos por e_1, não está no segmento L_4, então existe $c_2 \in \Phi$ com e_1 como um ponto extremo tal que o ângulo de c_2 para c_1 é o menor de todos os ângulos. Então V está do mesmo lado de c_1 e c_2, além disso c_1 e c_2 curvam-se para o mesmo lado. Se o outro ponto extremo de c_2, que denotaremos por e_2, não está em L_4, então poderemos continuar nessa mesma idéia. Desse modo, obtemos uma seqüência de arcos (c_n) com a propriedade que c_n e c_{n+1} têm em comum o ponto extremo e_n, o conjunto V está do mesmo lado que c_n, e todas c_n curvam-se para o mesmo lado. Desde que Φ contém apenas um número finito de arcos circulares, após alguns n etapas, o ponto extremo e_n de c_n estará em L_4. Tomando $e_n = (0, s_2)$, vemos que $0 < s_2 < s_1$.

Se denotamos o segmento de reta $\{(0, s) : s_1 \leq s \leq s_2\}$ por c_0, então $c_0, c_1, \cdots, c_n$ constitui uma curva de Jordan c_J e V está completamente no interior dela, uma vez que V é conexo. Denotemos por V_1 o conjunto de todos os pontos do interior de c_J e seja

$$W = V_1 \cup \{(0, s) : s_1 < s < s_2\}$$

Então W é um subconjunto aberto de $\widetilde{X}$, o conjunto V é tal que $V \subset W$, e da discussão anterior, temos que

$$\Gamma \subset W; \tag{B.5}$$

$$\overline{W} \cap (L_1 \cup L_2 \cup L_3) = \emptyset; \tag{B.6}$$

$$\partial W = c_1 \cup c_2 \cup \cdots \cup c_n; \tag{B.7}$$

$$\partial W \cap \partial \mathcal{O} = \emptyset. \tag{B.8}$$

Notemos que o item (B.5) implica que $\mathcal{O} \cap W \neq \emptyset$; o item (B.6) implica que $\mathcal{O} \setminus W \neq \emptyset$; o item (B.7) implica que ∂W é um conjunto compacto e, finalmente, (B.8) implica que $\partial W = (\partial W \cap \mathcal{O}) \cup (\partial W \setminus \overline{\mathcal{O}})$. Agora a prova divide-se em dois aspectos abaixo.

Se $\partial W \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, então $\partial W \cap \mathcal{O}$ e $\partial W \setminus \overline{\mathcal{O}}$ são subconjuntos abertos, não-vazios e disjuntos de $\partial W = (\partial W \cap \mathcal{O}) \cup (\partial W \setminus \overline{\mathcal{O}})$, fato esse que contradiz a conexidade de ∂W.

Se $\partial W \cap \mathcal{O} = \emptyset$, então $\mathcal{O} \cap W$ e $\mathcal{O} \setminus \overline{W}$ são subconjuntos abertos, não-vazios e disjuntos de $\mathcal{O} = (\mathcal{O} \cap W) \cup (\mathcal{O} \setminus \overline{W})$. Isto contradiz a conexidade de $\mathcal{O}$, concluindo a demonstração. $\blacksquare$

Bibliografia

[1] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H., *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, in "J. Funct. Anal. 14", 349-381 (1973).

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1995).

[3] Bartsch, T., Clapp, M., *Critical Point Theory for Indefinite Functionals With Symmetries*, J. Funct. Anal., 138, 107-136, (1996).

[4] Brezis, H., *On a Characterization of flow-invariants Sets*, Comm. Pure Appl. Math., 23, 261-263 (1970).

[5] Brezis, H., Niremberg, L. *Remarks on Finding Critical Points*, Comm. Pure Appl. Math., 64, 939-963 (1991).

[6] Chang, K. C., *A Variant Mountain Pass Lemma*, Sci. Sinica (Ser. A), 26, 1241-1255, (1983).

[7] Chang, K. C., *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, (1993).

[8] Costa, D. G., Magalhães, C. A. *A Variational Approach to Subquatratic Perturbations of Elliptic Systems*, J. Differential Equations, 111, 103-122, (1994).

[9] Dancer, E. N., Du, Y. *A Note on Multiple Solutions of Some Semilinear Elliptic Problems*, J. Math. Anal. Appl., 211, 626-640, (1997).

[10] Dancer, E. N., Du, Y. *Multiple Solutions of Some Semilinear Elliptic Equations via the generalized Conley Index*, J. Math. Anal. Appl., 189, 848-871, (1995).

[11] Deimling, K., *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[12] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Vol 19, (1998).

[13] de Figueiredo, D. G., *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, São Paulo, (1981).

[14] Hofer, H., *Variational and Topological Methods in Patially Order Systems With Superlinear Terms*, Differential Integral Equations, 5, 493-514, (1982).

[15] Li, S. J., *Periodic Solutions of Non-autonomous Second Order Systems With Superlinear Terms*, Differential Integral Equations, 5, 1419-1424 (1992).

[16] Lima, E. L., *Curso de Análise Vol. 2*, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1981).

[17] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1977).

[18] Li, S. J., Willem, M. *Applications of Local Linking to Critical Point Theory*, J. Math. Anal. Appl., 189, 6-32, (1995).

[19] Liu, Z., *Multiple Solutions of Differential Equations*, PhD thesis, Shandong University, Jinan, (1992).

[20] Liu, Z., Sun, J., *Invariant Sets of Descending Flow in Critical Point Theory with Applications to Nonlinear Differential Equations*, Journal of Differential Equations 172, 257-299, (2001).

[21] Kreyszig, E., *Introductory Funcional Analysis With Applications*, Wiley Classics Library, EUA, (1978).

[22] Struwe, M., *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1990).

[23] Milnor, J., *Morse Theory*, in "Princeton Univ. Press". Princeton (1963).

[24] Palais, R. S., *Critical Point Theory and the minimax principle*, in "Proc. Sympos. Pure Math". Amer. Math. Soc., Vol 15, 185-202 (1970).

[25] Palais, R. S., *Lusternik - Schnirelmann Theory on Banach Manifolds*, "Topology 5", (1966).

[26] Peral, I., van der Vorst, R., *On Some Quasilinear Systems*, Rocky Mountain J. Math., 27, 913-927, (1997).

[27] Rabinowitz, P. H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. CBMS, Regional Conf. Ser. in Math., Vol. 65, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1986).

[28] Stone, A. H., *Paracompactness and Product Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 977-982 (1948).

[29] Wang, Z. Q., *On a Superlinear Elliptic Equation*, Anal. Nonlinear, 43-58, 1991.

[30] Whyburn, G. T., *Topological Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1958.

[31] Willem, M., Mawhin, J. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer Verlag.

[32] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

[33] Zou, W., *Solutions for Resonant Elliptic Systems With Nonodd or Odd Nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl., 223, 397-417, (1998).