Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Conjectura de De Giorgi em dimensões 2 e 3 †

por

Ivaldo Tributino de Sousa

João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Conjectura de De Giorgi em dimensões 2 e 3

por

Ivaldo tributino de Sousa

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa - PB
Março/2012

Conjectura de De Giorgi em dimensões 2 e 3

por

Ivaldo Tributino de Sousa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFJF

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2012

Agradecimentos

- Agradeço principalmente à Deus por me permitir chegar até aqui.

- Ao meu Pai, José Valdir Freire de Sousa e minha prima Maria que me deram todo apoio para vir estudar em João Pessoa.

- A todos os meus amigos e colegas da pós-graduação. Em particular à Ana Karine Rodrigues de Oliveira, que esteve sempre ao meu lado nos momentos difíceis e agradáveis, Gustavo da Silva Araújo e José Carlos de Albuquerque Melo Júnior, por terem me ajudado na correção e formatação deste trabalho.

- A todos os professores que estiveram comigo durante esta caminhada.

- Ao Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó, por ter aceitado me orientar e por ter apresentado o belo tema deste trabalho.

- Aos que compuseram minha banca, professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Marco Aurelio Soares Souto.

- Por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

"É preciso pensar para acertar, calar para resistir e agir para vencer."

Renato Keld

Resumo

Este trabalho se preocupa com o estudo de soluções limitadas de equações elípticas semilineares $\Delta u - F'(u) = 0$ em todo espaço $\mathbb{R}^n$, sob o pressuposto que u é monótona em uma direção, digamos $\partial u/\partial x_n > 0$ em $\mathbb{R}^n$. O objetivo é estabelecer o caráter unidimensional ou simetria de u, ou seja, que u depende apenas de uma variável ou equivalentemente, que os conjuntos de nível de u são hiperplanos. Este tipo de questão da simetria foi levantada por De Giorgi em 1978 (ver [6]), que fez a seguinte conjectura:

Conjectura *Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é solução da equação*

$$\Delta u + u - u^3 = 0$$

satisfazendo

$$|u(x)| \leq 1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \text{em todo } \mathbb{R}^n.$$

Então os conjuntos de nível de u são hiperplanos.

Mostraremos que uma versão forte da conjectura de De Giorgi é de fato verdade em dimensão 2 e 3 usando somente técnicas da teoria linear desenvolvida por Berestychi, Caffarelli e Nirenberg [5] em um dos seus artigos sobre as propriedades qualitativas de equações elípticas semilineares.

Palavras-chave: Conjectura de De Giorgi, Equações elípticas semilineares, Hiperplanos.

Abstract

This word is concerned with the study of bounded solutions of semilinear elliptic equations $\Delta u - F'(u) = 0$ in the whole space $\mathbb{R}^n$, under the assumption that u is monotone in one direction, say, $\partial u/\partial x_n > 0$ em $\mathbb{R}^n$. The goal is to establish the one-dimensional character or symmetry of u, namely, that u only depends on one variable or, equivalently, that the level sets of u are hyperplanos. This type of symmetry question was raised by de Giorgi in 1978 (see [6]), who made the folowing conjecture:

Conjecture *Suppose that $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ is solution of the equation*

$$\Delta u + u - u^3 = 0$$

satisfying

$$|u(x)| \leq 1 \quad \textit{and} \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \textit{in the whole } \mathbb{R}^n.$$

Then the level sets of u must be hyperplanes.

We show a stronger version of De Giorgi's conjecture is indeed true in dimension 2 and 3 using some techniques in the linear theory developed by Berestychi, Caffarelli and Nirenberg [5] in one of their papers on qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations.

Keywords: De Giorgi's conjecture, Semilinear elliptic equations, Hyperplanos.

Sumário

Introdução

Este trabalho se preocupa com o estudo de soluções limitadas de equações elípticas semilineares $\Delta u - F'(u) = 0$ em todo espaço $\mathbb{R}^n$, sob o pressuposto que u é monótona em uma direção, digamos $\partial u/\partial x_n > 0$ em $\mathbb{R}^n$. O objetivo é estabelecer o caráter unidimensional ou simetria de u, ou seja, que u depende apenas de uma variável ou equivalentemente, que os conjuntos de nível de u são hiperplanos. Este tipo de questão da simetria foi levantada por De Giorgi em 1978 (ver [6]), que fez a seguinte conjectura:

Conjectura *Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é solução da equação*

$$\Delta u + u - u^3 = 0$$

satisfazendo

$$|u(x)| \leq 1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \text{em todo } \mathbb{R}^n.$$

Então os conjuntos de nível de u são hiperplanos.

Para $n = 2$ esta conjectura foi provado por Ghoussoub e Gui em [9] e para $n = 3$ por L. Ambrosio e X. Cabré em [1]. Tanto para $n = 2$ e $n = 3$ a prova usa somente técnicas da teoria linear desenvolvida por Berestychi, Caffarelli e Nirenberg [5] em um dos seus artigos sobre as propriedades qualitativas de equações elípticas semilineares.

Este trabalho está dividido em dois capítulos, como segue:

Iniciamos o **Capítulo 1** mostrando a veracidade, em dimensão 1, 2 e 3, da Conjectura (A) enunciadas abaixo (para $n = 3$ com suposição adicional) e mostraremos um contra-exemplo que nos garante que as conjecturas são falsas para $n \geq 7$.

Conjectura (A) *Seja $L = -\Delta - V$ um operador de Shrödinger em $\mathbb{R}^n$ sendo V um potencial suave e limitado. Suponha que u é uma solução de $Lu = 0$, em todo*

$\mathbb{R}^n$, *que muda de sinal, então L tem espectro negativo, isto é,*

$$\lambda_1(\mathbb{R}^n) := \inf \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla\psi|^2 - V|\psi|^2)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |\psi|^2 dx} : \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \right\} < 0$$

Conjectura (B) *Suponha $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então qualquer função $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que φu é limitada em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz $\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla u) = \sum_{i=1}^n (\varphi^2 u_{x_i})_{x_i} = 0$ é necessariamente constante.*

Concluímos o **Capítulo 1**, mostrando que a conjectura De Giorgi é de fato verdade em dimensão 2 e em dimensão 3, com a hipótese adicional que a solução converge uniformemente para ± 1 quando $x_3 \to \pm\infty$. Em outras palavras, iremos mostrar o seguinte:

Teorema 1.2.1 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R})$. Suponha u uma solução inteira e limitado de*

$$\Delta u - F'(u(x)) = 0, \quad \textit{para} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

tal que $\partial u/\partial x_2 \geq 0$ em todo $\mathbb{R}^2$. Então u é da forma $u(x) = g(ax_1 + bx_2)$, para $g \in C^2(\mathbb{R})$ com a, b constantes apropriadas.

Teorema 1.2.2 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não negativa com $F(\pm 1) = 1$ e $F''(\pm 1) \geq \mu > 0$. Suponha u uma solução de*

$$\Delta u - F'(u(x)) = 0 \quad \textit{para} \quad x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e $u(x', x_n)$ converge uniformemente para ± 1 quando $x_n \to \pm\infty$. Então,

a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ e $|\nabla u(x)| \leq Ce^{-\alpha |x_n|}$ onde C e α são constantes positivas.

b) Se a dimensão é 2 ou 3, então u é necessariamente da forma $u(x', x_n) = g(x_n)$, onde $g(t)$ é solução da equação

$$g''(t) = F'(g(t)) \quad \textit{e} \quad \lim_{t \to \pm\infty} g(t) = \pm 1 \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em seguida, no **Capítulo 2**, dividimos em duas seções;

A seção 2.1 trata da conjectura de De Giorgi para $n = 3$, com a hipótese adicional

$$\lim_{x_3 \to \pm\infty} u(x', x_3) = \pm 1 \quad \text{para todo} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Aqui, os limites não são assumidos uniformes em $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Nessa prova da conjectura de De Giorgi em dimensão 3 é usada um resultado chave de estimativa de energia que nos permitirá aplicar um tipo de Teorema de Liouville (Proposição 2.1.2).

Já na seção 2.2 estabeleceremos para $n = 3$ a conjectura de De Giorgi na forma apresentada em [6]. Ou seja, não assumiremos que $u \to \pm 1$ quando $x_3 \to \pm\infty$. Este resultado aplica-se a uma classe de equações não lineares, em particular o caso do modelo $F'(u) = u^3 - u$.

Por fim, no Apêndice A, enunciamos os principais resultados utilizados ao longo do nosso trabalho.

Notações

Notações Gerais

$B(x,r)$	bola de centro x e raio r,
$\overline{B(x,r)}$	bola fechada de centro x e raio r,
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\|A\|$	medida de Lebesque de um conjunto A
ω_n	volume da bola unitária $B(0,r)$ em $\mathbb{R}^n$
$u_{\|A}$	restrição da função u ao conjunto A
q.t.p	quase toda parte
$\nabla . u$	divergente de u
$\nabla u = (u_{x_i}, ..., u_{x_n})$	gradiente de u
$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$	laplaciano de u
$\langle a,b\rangle$ ou $a \cdot b$	denota produto interno de a e b
$C, C_1, C_2, C_3, ...$	denotam constantes positivas
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	aberto e limitado
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω

$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$\limsup\limits_{n\to\infty} f$	limite superior da função f quando $n \to \infty$
$\liminf\limits_{n\to\infty} f$	limite inferior da função f quando $n \to \infty$
$\blacksquare$	indica final de demonstração

Espaços de Funções

$L^p(\Omega) = \{u \;\text{ mensurável sobre }\; \Omega \;\text{ e }\; \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}, 1 \leq p \leq \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u \;\text{ mensurável sobre }\; \Omega \;\text{ e existe }\; C \;\text{ tal que }\; |u(x)| \leq C \;\text{ q.t.p sobre }\; \Omega\}$

$C_c(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω

$C^K(\Omega)$ funções K vezes diferenciável sobre $\Omega, K \in \mathbb{N}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k\geq 0} C^K(\Omega)$

$C_c^K(\Omega) = C^K(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \;\; g_i, g_2, ..., g_n \in L^p(\omega) \;\text{ tais que} \\ \int_\Omega u\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi \; dx, \forall \varphi \in C_c^\infty, \;\forall i = 1, ..., n \end{array} \right\},$
$1 \leq p \leq \infty$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega),\; 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\Omega} |u|$

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess } |u(x)|, \quad x \in \Omega$

$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega}))} = \sup\limits_{x,y\in\Omega; x\neq y} \left\{ \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$

$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^{\alpha}u]_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ norma do espaço $W_0^{1,p}$, equivalente a $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. (Uma vez que Ω é limitado)

Capítulo 1

A conjectura de De Giorgi em dimensão 2

Neste capítulo, mostraremos que a conjectura de De Giorgi é de fato verdade em dimensão 2, enquanto que em dimensão 3 é verdade se a solução converge uniformemente para ± 1 quando $x_3 \to \pm\infty$. Começamos este capítulo mostrando através de um exemplo que o método utilizado para esta verificação não é válida para $n \geq 7$.

1.1 Contra-exemplo

Nesta seção, considere $L = -\Delta - V = 0$ um operator de Schrödinger em $\mathbb{R}^n$, onde V é um potencial suave e limitado e, associado a L, o funcional energia

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla\psi|^2 - V|\psi|^2)dx}{\int_{\mathbb{R}^n}|\psi|^2 dx}; \quad \text{onde} \quad \psi \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Seja

$$\lambda_1(\mathbb{R}^n) = \inf\{\mathcal{L}(u); u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}\}.$$

Começaremos verificando que $\lambda_1(\mathbb{R}^2) \leq 0$ e, em seguida, que $\lambda_1(\mathbb{R}^2) < 0$ se, e somente se, $Lu = 0$ não possui solução positiva. Além disso provaremos a veracidade em dimensão 1, 2 e 3 das conjecturas (A) e (B)(para $n = 3$ com suposição adicional) e mostraremos um contra-exemplo que nos garante que as mesmas são falsas para $n \geq 7$.

Lema 1.1.1 *Suponhamos que existe $u \in C^2$ solução limitada de $Lu = 0$, então $\lambda_1(\mathbb{R}^n) \leq 0$.*

Demonstração: Seja $l : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, tal que

$$l(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 2 \end{cases}$$

e $|l'(t)| \leq 2$. Para $R > 0$, definamos em $\mathbb{R}^n$ a função $\xi_R(x) = l(|x|/R)$.

Temos,

$$\begin{aligned} |\nabla(\xi_R u)|^2 &= \sum_{i=1}^n [(\xi_R u)_{x_i}]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\xi_R)_{x_i} u + \xi_R u_{x_i}]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\xi_R)_{x_i} u]^2 + 2u_{x_i} u(\xi_R)_{x_i}\xi_R + [\xi_R u_{x_i}]^2 \\ &= u^2|\nabla\xi_R|^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}[(\xi_R)^2 u]_{x_i} \\ &= u^2|\nabla\xi_R|^2 + \nabla u \cdot \nabla[(\xi_R)^2 u]. \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\xi_R u)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^2|\nabla\xi_R|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_R)^2 u\Delta u \ dx.$$

Somando com $-\int_{\mathbb{R}^n} V(\xi_R u)^2 \ dx$ em ambos os membros da igualdade e sendo u solução da equação $\Delta u - Vu = 0$, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\xi_R u)|^2 - V(\xi_R u)^2) \ dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^2|\nabla\xi_R|^2 dx.$$

Pela definição de ξ_R, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(\xi_R u)|^2 - V(\xi_R u)^2) \ dx = \int_{B_{2R}\setminus B_R} u^2|\nabla\xi_R|^2 dx,$$

onde $B_R = B(0, R)$.

Temos,

$$
\begin{aligned}
|\nabla(\xi_R)|^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(\xi_R)_{x_i}]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[l\left(\frac{|x|}{R}\right)_{x_i}\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} l'\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 \frac{x_i^2}{R^2|x|^2} \\
&\leq \frac{4}{R^2}.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla(\xi_R u)|^2 - V(\xi_R u)^2)\ dx \leq \frac{4}{R^2}\int_{B_{2R}\setminus B_R} u^2\ dx. \tag{1.1}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_R u|^2 dx = \int_{B_R} u^2 dx + \int_{B_2R\setminus B_R}|\xi_R u|^2 dx$$

e, portanto,

$$\int_{B_R} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\xi_R u|^2 dx. \tag{1.2}$$

Por (1.1) e (1.2), podemos concluir que

$$\mathcal{L}(\xi_R u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla \xi_R u|^2 + V(\xi_R u)^2)dx}{\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_R u|^2 dx} \leq \frac{\frac{4}{R^2}\int_{B_{2R}\setminus B_R} u^2 dx}{\int_{B_R} u^2 dx} \tag{1.3}$$

Seja $K(R) = \int_{B_R} u^2 dx$ e

$$\alpha(R) := \frac{K(2R) - K(R)}{R^2 K(R)}.$$

Mostraremos que

$$\inf_{R\to+\infty}\alpha(R) = 0.$$

Com vista em uma contradição, suponhamos que $\alpha(R) \geq \delta > 0$ e, desta forma, que

$K(2R) \geq \delta R^2 K(R)$. Com isso, podemos obter

$$K(2^2R) \geq \delta(2R)^2 K(2R) \geq \delta^2 2^2 R^4 K(R)$$

$$K(2^3R) \geq \delta(2^2R)^2 K(2^2R) \geq \delta^3 2^6 R^6 K(R)$$

$$K(2^4R) \geq \delta(2^3R)^2 K(2^3R) \geq \delta^4 2^{12} R^8 K(R)$$

Continuando o processo, obteremos

$$K(2^m R) \geq \delta^m 2^{m(m-1)} R^{2m} K(1), \quad \text{para} \quad R \geq 1 \quad \text{e} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Substituindo R por 2, obtemos

$$K(2^{m+1}) \geq \delta^m 2^{m(m+1)} K(1).$$

Agora, tomando $R = 2^{m+1}$, teremos $m = \log_2 \frac{R}{2}$. Substituindo na última desigualdade, temos

$$K(R) \geq (\delta R)^{\log_2 \frac{R}{2}} K(1).$$

Escolhendo R de tal forma que $(\delta R)^{\log_2 \frac{R}{2}} \leq R^n$, obteremos uma contradição, pois

$$K(R) \geq (\delta R)^{\log_2 \frac{R}{2}} K(1) > \|u\|_\infty^2 \omega_n R^n \geq \int_{B_R} u^2 dx,$$

o que é um absurdo. Finalmente por 1.3 temos que

$$\lambda_1(\mathbb{R}^n) \leq \liminf_{R \to +\infty} \mathcal{L}(\xi_R u) = 0$$

concluindo a prova. ∎

Na proposição a seguir mostraremos a relação entre a equação $Lu = 0$ possuir solução positiva e o valor do primeiro autovalor $\lambda_1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.1.1 *Seja $Lu = -\Delta - V$ um operador de Schrödinger em $\mathbb{R}^n$, com o potencial V suave e limitado. Então $\lambda_1(\mathbb{R}^n) < 0$ se, e somente se, a equação $Lu = 0$ não possui solução positiva.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que podemos tomar um par (u, μ), autofunção e autovalor, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u - Vu = \mu u & \text{em} \quad B_R \\ \qquad\quad\; u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases} \qquad (P_R)$$

Considere os funcionais $J, F : H_0^1(B_R) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$J = \int_{B_R} (|\nabla u|^2 - Vu^2)dx \quad \text{e} \quad F(u) = \int_{B_R} u^2 dx - 1.$$

Note que $J, F \in C^1(H_0^1(B_R), \mathbb{R})$ (ver [2], Apêndice B).

Considere o vínculo

$$M := \{u \in H_0^1(B_R) : F(u) = 0\}.$$

Observe que $F'(u) \neq 0$ para todo $u \in M$. De fato, basta observar que dado $u \in M$, temos

$$F'(u)u = 2\int_{B_R} u^2 dx = 2 \neq 0.$$

Note também que $J\big|_M$ é limitado inferiormente, pois, sendo V limitado, existe um $K > 0$ tal que $|V| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, para $u \in M$,

$$\begin{aligned} J(u) \ &\geq \ \int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - K\int_{B_R} u^2 dx \\ &\geq \ -K \end{aligned}$$

Portanto, existe um $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mu = \inf_{u \in M} J(u).$$

Então seja $(u_m) \subset M$ uma sequência minimizante, isto é,

$$J(u_m) = \|u\|^2 - \int_{B_R} V u_m^2 dx \to \mu \quad \text{e} \quad F(u_m) = 0.$$

Afirmação 1: O μ é atingido, ou seja, existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \mu$.

Sendo $J(u_m)$ convergente, existe $C > 0$ tal que

$$\left| \|u_m\|^2 - \int_{B_R} V u_m^2 dx \right| \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$\|u_m\|^2 \leq C_1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Sendo $H_0^1(B_R)$ reflexivo, segue que existe $u_0 \in H_0^1(B_R)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_m \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ H_0^1(B_R).$$

Desde que a norma é fracamente semicontínua inferiormente (s.c.i), temos

$$\liminf_{m\to\infty} \|u_m\|^2 \geq \|u_0\|^2. \tag{1.4}$$

Agora, usando a imersão compacta $H_0^1(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$, obtemos

$$u_m \to u_0 \ \text{ em } \ L^2(B_R),$$

implicando que

$$u_m(x) \to u_0(x) \ \text{ q.t.p em } \ B_R.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \mu &\leq J(u_0) = \|u_0\|^2 - \textstyle\int_{B_R} V u_0^2 dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|^2 - \lim_{m\to\infty} \int_{B_R} V u_m^2 dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m) = \mu, \end{aligned}$$

mostrando que

$$J(u_0) = \mu. \tag{1.5}$$

Desta forma, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_0) = \beta F'(u_0)$, ou seja,

$$J'(u_0)\varphi = \beta F'(u_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_R).$$

Escolhendo $\varphi = u_0$, obtemos

$$2J(u_0) = 2\beta \int_{B_R} u_0^2 dx.$$

De onde segue que $\mu = \beta$. Com isso, temos que u_0 é solução fraca do problema (P_R). Por regularidade (ver [Evans, L. C.] - pag 326) $u_0 \in C_0^\infty(B_R)$, logo u_0 é solução clássica para o problema (P_R) com $\mu = \lambda_1^R$, onde

$$\lambda_1^R = \inf\left\{ \frac{\int_{B_R}(|\nabla u|^2 - V u^2) dx}{\int_{B_R} u^2 dx} : u \in C_c^\infty(B_R) \setminus \{0\} \right\}.$$

Afirmação 2: As autofunções u_R associadas ao autovalor λ_1^R tem sinal definido, isto é, podemos supor $u_R > 0$.

Note que podemos supor $u_R \geq 0$, pois se u_R satisfaz (1.5), temos que $|u_R|$ também satisfaz. Assim, vamos mostrar que

$$u_R(x) > 0, \quad \forall x \in B_R.$$

Suponhamos que exista $x_0 \in B_R$ tal que $u_R(x_0) = 0$ e considere o conjunto $A = \{x \in B_R; u_R(x) = 0\}$. Assim, A é fechado e não vazio. Agora seja $\alpha > 0$ tal que $B(x_0, 4\alpha) \subset B_R$. Pela desigualdade de Harnack ([D. Gilbarg,; Trudinger], Teorema 8.20), existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{B(x_0,\alpha)} u_R \leq C \inf_{B(x_0,\alpha)} u_R = 0.$$

Com isso podemos concluir que $u_R(x) = 0$ para todo $x \in B(x_0, \alpha)$ e assim A também é aberto. Desde que B_R é conexo, teríamos $B_R = A$, o que é um absurdo, pois $\int_{B_R} u_R^2 dx \neq 0$. Logo, $u_R(x) > 0$, para todo $x \in B_R$.

Afirmação 3: Se $R_1 < R_2$, então

$$\lambda_1^{R_2} \leq \lambda_1^{R_1}$$

e $\lambda_1^R \searrow \lambda_1(\mathbb{R}^n)$ quando $R \to +\infty$.

Seja $u_{R_1} \in H_0^1(B_{B_1})$ uma autofunção positiva do problema (P_{R_1}) associada ao autovalor $\lambda_1^{R_1}$. Estendendo a função como segue

$$\bar{u}_{R_1}(x) = \begin{cases} u_{R_1}(x), & \text{se } x \in B_{R_1} \\ 0, & \text{se } x \in B_{R_2} \setminus B_{R_1} \end{cases}$$

temos que $\bar{u}_{R_1} \in H_0^1(B_{R_2})$. Além disso, pela definição de $\lambda_1^{R_2}$,

$$\lambda_1^{R_2} \leq \frac{\int_{B_{R_2}} (|\nabla \bar{u}_{R_1}|^2 - V\bar{u}_{R_1}^2)dx}{\int_{B_{R_2}} \bar{u}_{R_1}^2 dx} = \frac{\int_{B_{R_1}} (|\nabla u_{R_1}|^2 - V u_{R_1}^2)dx}{\int_{B_{R_1}} u_{R_1}^2 dx} = \lambda_1^{R_1}.$$

É fácil ver que $C_c^\infty(B_R) \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ para $R > 0$. Então, pela definição de $\lambda_1(\mathbb{R}^n)$ e λ_1^R, temos

$$\lambda_1(\mathbb{R}^n) \leq \lambda_1^R.$$

Seja $(u_m)_m$ uma sequência minimizante, isto é,

$$\mathcal{L}(u_m) \to \lambda_1(\mathbb{R}^n) \text{ quando } m \to +\infty.$$

Note que para cada u_m existe $R > 0$ tal que supp $u_m \subset\subset B_R$, então $u_m \in C_c^\infty(B_R)$. Assim temos

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_m|^2 - Vu_m^2)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} u_m^2 dx} = \frac{\int_{B_R}(|\nabla u_m|^2 - Vu_m^2)dx}{\int_{B_R} u_m^2 dx} \geq \lambda_1^R \geq \lambda_1(\mathbb{R}^n).$$

Com isso fica verificado a Afirmação 3.

Sabemos pelo Lema 1.1.1 que $\lambda_1(\mathbb{R}^n) \leq 0$. Então, supondo que $\lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$, devemos verificar que a equação $Lu = 0$ possui solução positiva. Para esta verificação mostraremos em três etapas que podemos extrair uma subsequência de $(R_m)_m$ que vai para o infinito tal que $(u_{R_m})_m$ converge em $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para algum $u > 0$ de classe C^2 solução da equação $Lu = 0$ em $\mathbb{R}^n$.

Seja u_R a solução do problema

$$\begin{cases} (-\Delta - V - \lambda_1^R)u_R &= 0 \quad \text{em } B_R \\ u_R &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_R. \end{cases}$$

Pelo o que já foi visto podemos tomar $u_R > 0$ em B_R e normalizada com $u_R(0) = 1$. Por simplicidade, vamos supor que a sequência $R_m = m$.

Etapa 1. Mostraremos que $u_m \in C^{2,\alpha}(B_{3R_1})$ para $m > 3R_1$.

Fixado $R_1 \geq 1$, para cada natural $m > 3R_1$, temos $V(x) + \lambda_1^m \in C^1(\overline{B_{3R_1}})$. Sendo B_{3R_1} convexo, pelo Teorema A.1.11,

$$C^1(\overline{B_{3R_1}}) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{B_{3R_1}}) \quad \text{para} \quad 0 < \alpha < 1,$$

isto é, $V(x) + \lambda_1^m \in C^\alpha(\overline{B_{3R_1}})$. Segue pelo Lema A.1.1 que $u_m \in C^{2,\alpha}(B_{3R_1})$ para $m > 3R_1$.

Etapa 2. Vamos mostrar que

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C, \quad \text{para} \quad m > 3R_1.$$

Pela primeira parte da demostração, temos $u_m \in C^{2,\alpha}(B_{3R_1})$ para $m > 3R_1$. Note que podemos tomar uma constante C tal que

$$\|V(x) + \lambda_1^m\|_{C^\alpha(\overline{B_{3R_1}})} \leq C, \quad \text{para} \quad m > 3R_1, \tag{1.6}$$

pois, pela Afirmação 3, temos que $\lambda_1^m \searrow \lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$ quando $m \to \infty$. Assim, pelo Teorema A.1.12, existe $C_1 > 0$ tal que

$$d\|Du_m\|_{C(B_{2R_1})} + d^2\|D^2u_m\|_{C(B_{2R_1})} + d^{2+\alpha}\|D^2u_m\|_{C^\alpha(B_{2R_1})} \leq C_1\|u_m\|_{C(B_{3R_1})}, \tag{1.7}$$

para $m > 3R_1$ e $d \leq dist(B_{2R_1}, \partial B_{3R_1})$. Utilizando-se novamente de (1.6), podemos afirmar pelo Teorema A.1.10 que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{B_{3R_1}} u_m \leq C_2 \inf_{B_{3R_1}} u_m, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Como $u_m(0) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{B_{3R_1}} u_m \leq \frac{\sup_{B_{3R_1}} u_m}{\inf_{B_{3R_1}} u_m} \leq C_2 \quad \text{para} \;\; m > 3R_1$$

e, consequentemente,

$$\|u_m\|_{C(R_{3R_1})} = \sup_{B_{3R_1}} |u_m| \leq C_2 \quad \text{para} \;\; m > 3R_1. \tag{1.8}$$

Desta forma, temos que a sequência (u_m) é limitada em $L^p(R_{2R_1})$, para $1 \leq p < \infty$. Além disso,

$$\|u_m\|_{L^p(R_{2R_1})} \leq C_3, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Desde que $B_{R_1} \subset\subset B_{2R_1}$, segue do Teorema A.1.13 que

$$\|u_m\|_{W^{2,p}(B_{R_1})} \leq C_4 \|u_m\|_{L^p(R_{2R_1})}, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Agora, usando o Teorema A.1.14, vamos tomar $k = 2$ e p suficientemente grande de modo que p $>$ N. Assim,

$$W^{2,p}(B_{R_1}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B_{R_1}}),$$

com $\alpha = 1 - n/p$. Implicando que, para todo $m > 3R_1$,

$$\|u_m\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C_5. \tag{1.9}$$

Por (1.7) e (1.8), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|D^2 u_m\|_{C^\alpha(B_{2R_1})} \leq C \quad \text{para} \quad m > 3R_1. \tag{1.10}$$

Segue por (1.9) e (1.10) que

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C \quad \text{para} \quad m > 3R_1,$$

para uma certa constante $C > 0$. Segue que a família $\{D^\beta u_m\}, \quad \beta = 0, 1, 2$, é equicontínua e uniformemente limitada em B_{R_1} e, assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, (u_m) possui uma subsequência, que denotaremos ainda por (u_m), tal que

$$u_m \to u \;\; \text{em} \quad C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}}).$$

Etapa 3. Vamos utilizar um argumento diagonal para justificar que a menos de subsequência

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

onde u satisfaz

$$\Delta u + Vu = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n.$$

Fazendo $R_1 = 1, 2, 3, ...$, encontramos $C_1, C_2, C_3, ...$ tais que

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_1})} \leq C_1, \quad m > 3$$

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_2})} \leq C_2, \quad m > 6$$

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_3})} \leq C_3, \quad m > 9$$

$$\vdots$$

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C_{R_1}, m > 3R_1.$$

Agora, para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$u_m^i \equiv u_{m|\overline{B_i}} \ \ m > 3i.$$

Temos $\{u_m^i\}_{m=3i+1}^{\infty}$ uma sequência limitada para cada $i \in \mathbb{N}$. Usando a imersão compacta

$$C^{2,\alpha}(\overline{B_i}) \hookrightarrow C^2(\overline{B_i}), \quad i \in \mathbb{N},$$

obtemos $u_i \in C^2(\overline{B_i}), \quad i \in \mathbb{N}$, tais que a menos de subsequências

$$u_4^1, u_5^1, u_6^1, ... \to u_1 \quad \text{em} \ \ \mathbb{C}^2(\overline{B_1})$$

$$u_7^2, u_8^2, u_9^2, ... \to u_2 \quad \text{em} \ \ \mathbb{C}^2(\overline{B_2})$$

$$u_{10}^3, u_{11}^3, u_{12}^3, ... \to u_3 \quad \text{em} \ \ \mathbb{C}^2(\overline{B_3})$$

$$\vdots$$

$$u_{3i+1}^i, u_{3i+2}^i, u_{3i+3}^i, ... \to u_i \quad \text{em} \ \ \mathbb{C}^2(\overline{B_i}).$$

Definindo

$$u(x) = u_i(x) \quad \text{para} \quad x \in \overline{B_i},$$

temos $u > 0$ de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a sequência

$$U_i = u_{4i}^i,$$

isto é, a sequência diagonal

$$\{u_4^1, u_8^2, u_{12}^3, ..., u_{4i}^i, ...\} \quad \text{com} \quad i \in \mathbb{N},$$

verifica

$$U_i \to u \ \text{ em } \ C^2(\overline{R_{R_1}}),$$

para cada inteiro $R_1 \geq 1$.

Reciprocamente, seja $Lu = 0$ para algum $u > 0$ em $C^2(\mathbb{R}^n)$. Com vista a uma contradição, suponhamos que $\lambda_1(\mathbb{R}^n) < 0$. Assim, podemos tomar um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda_1(\Omega) < 0$. Além disso, existe $u_\Omega > 0$ com

$$\begin{cases} Lu_\Omega - \lambda_1(\Omega)u_\Omega &= 0 \ \text{ em } \Omega \\ u_\Omega &= 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja $w := u_\Omega/u$. Veja que em Ω verificamos

$$\begin{aligned} 0 &= uLu_\Omega - u\lambda_1(\Omega)u_\Omega - u_\Omega Lu \\ &= u\Delta u_\Omega - u\lambda_1(\Omega)u_\Omega - u_\Omega \Delta u \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(u^2 \frac{u(u_\Omega)_{x_i} - u_\Omega u_{xi}}{u^2} \right)_{x_i} + u^2\lambda_1(\Omega)\frac{u_\Omega}{u} \\ &= \nabla \cdot (u^2 \nabla w) + u^2\lambda_1(\Omega)w. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \nabla \cdot (u^2\nabla w) + u^2\lambda_1(\Omega)w &= 0 \ \text{ em } \Omega \\ w &= 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\nabla \cdot (u^2\nabla) + u^2\lambda_1(\Omega)$ satisfaz o Princípio do Máximo em Ω, teremos $w = 0$ em Ω. Contradição, pois $w > 0$ em Ω. ■

No teorema a seguir mostraremos a prova da Conjectura (A) em dimenção $1, 2$ e 3, onde em dimensão 3 há a seguinte hipótese adicional: $|u(x)| \leq Ce^{-\alpha|x_3|}$ para $x = (x_1, x_2, x_3)^3 \in \mathbb{R}^3$ onde C e α são constantes positivas.

Para a prova do Teorema 1.1.1 usaremos o seguinte resultado:

Teorema de Ekeland (ver [7]) *Seja $\mathcal{L}$ um funcional limitado inferiormente e de classe C^1 no espaço de Banach X. Dados $\epsilon > 0, \lambda > 0$ e $\mathcal{L}(\bar{\psi}) \leq \inf_X \mathcal{L} + \epsilon$. Então existe $\psi \in X$ tal que* *(i)* $\mathcal{L}(\psi) \leq \mathcal{L}(\bar{\psi})$

(ii) $\|\psi - \bar{\psi}\| \leq 1/\lambda$

(iii) $\|\mathcal{L}'(\psi)\| \leq \epsilon\lambda$.

Teorema 1.1.1 *Seja $L = -\Delta - V$ um operador de Schrödinger em $\mathbb{R}^n$ com o potencial V suave e limitado. Suponha que u é solução de $Lu = 0$ limitada e muda de sinal.*

(a) Se $n = 1$ ou $n = 2$, então $\lambda_1(\mathbb{R}^n) < 0$.

(b) Se $n = 3$ e $|u(x)| \leq Ce^{-\alpha|x_3|}$ para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, onde C e α são constantes positivas, então $\lambda_1(\mathbb{R}^n) < 0$.

Demonstração: Assuma primeiramente que para cada $R > 0$ existe uma funcão $\xi_R \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\xi_R = 1 \text{ em } B_R, \quad \xi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\nabla \xi_R|^2 dx \to 0 \text{ quando } \quad R \to +\infty,$$

onde u é solução inteira de $\Delta u + Vu = 0$. Como na prova do Lema 1.1.1, podemos verificar que

$$\mathcal{L}(|u|\xi_R) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\nabla \xi_R|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\xi_R|^2 dx}.$$

Isso significa que, se $\lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$, então a sequência $(|u|\xi_R)_R$ é minimizante para $\mathcal{L}$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando o Teorema de Ekeland com

$$\bar{\psi} := |u|\xi_R, \quad \epsilon_R := \mathcal{L}(|u|\xi_R) \text{ e } \lambda_R := \left(\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\nabla \xi_R|^2 dx} \right)^{1/2},$$

obtemos funções $\psi_R \in H^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

$$\mathcal{L}(\psi_R) = \mathcal{L}(|u|\xi_R) \tag{1.11}$$

$$\|\psi_R - |u|\xi_R\| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\nabla \xi_R|^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.12}$$

$$\|\mathcal{L}'(\psi_R)\| \leq \epsilon_R \lambda_R \tag{1.13}$$

Sendo $\mathcal{L} \in C^1(H^1, \mathbb{R})$ temos, por definição,

$$\|\mathcal{L}'(\psi_R)\| = \sup_{\eta \in H^1 \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{L}'(\psi_R)\eta|}{\|\eta\|_{H^1}}.$$

Segue pela desigualdade 1.13 que

$$\begin{aligned}
\epsilon_R \lambda_R \|\eta\|_{H^1} &\geq |\mathcal{L}'(\psi_R)\eta| \\
&\geq \left| \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{L}(\psi_R + \eta t) - \mathcal{L}(\psi_R)}{t} \right| \\
&\geq \left| \frac{2\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \psi_R \cdot \nabla \eta - V \psi_R \eta) dx - 2\mathcal{L}(\psi_R) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_R \eta \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} {\psi_R}^2 dx} \right|
\end{aligned}.$$

Logo

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \psi_R \cdot \nabla \eta - V \psi_R \eta) dx - \mathcal{L}(\psi_R) \int_{\mathbb{R}^n} \psi_R \eta \, dx \right| \leq \epsilon_R \lambda_R \|\eta\|_{H^1} \int_{\mathbb{R}^n} {\psi_R}^2 dx,$$

para todo $\eta \in C_c^\infty$.

Note que

$$\|\psi_R - |u|\xi_R\| \leq \epsilon_R \lambda_R \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\xi_R|^2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 |\nabla \xi_R| \right)^{1/2} \to 0 \ \text{ quando } \ R \to +\infty.$$

Pela continuidade de $\mathcal{L}'$, podemos afirmar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla(|u|\xi_R) \cdot \nabla \eta - V|u|\xi_R \eta \Big) dx - \mathcal{L}(|u|\xi_R) \int_{\mathbb{R}^n} |u|\xi_R \eta \, dx \right| \to 0 \text{ quando } R \to +\infty,$$

para todo $\eta \in C_c^\infty$.

Sendo $(|u|\xi_R)_R$ a sequência minimizante para $\mathcal{L}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\nabla(|u|\xi_R) \cdot \nabla \eta - V|u|\xi_R \eta \Big) dx \to 0.$$

Tomando η com suporte compacto e lembrando que $\xi_R = 1$ em B_R, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla |u| \cdot \nabla \eta - V|u|\eta) dx = 0.$$

Isto significa que $|u|$ também é solução para a equação $Lu = 0$, o que é absurdo. Pois $u \in C^2$ muda de sinal, então existe x_0 tal que $u(x_0) = 0$, logo $|u| \geq 0$ e pela Desigualdade de Harnack podemos concluir que $|u| \equiv 0$. Portanto $\lambda_1(\mathbb{R}^n) < 0$.

Agora resta ver em quais dimensões podemos construir funções com as mesmas propriedades das ξ_R.

Denotaremos por ξ_R^1 as funções definidas na prova do Lema 1.1.1 e, desta forma, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \xi_R^1| dx = \int_{B_{2R}\setminus B_R} |\nabla \xi_R^1| dx \leq \frac{4}{R^2}|B_{2R} \setminus B_R| \leq \frac{4}{R^2} w_n (2R)^n = CR^{n-2}.$$

Logo, para $n = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \xi_R^1| dx \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty.$$

Assim fica verificado para $n = 1$.

Em dimensão 2 as funções são

$$\xi_R^2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_R \\ \xi_{R,R^2}(x), & \text{se } x \in B_{R^2} \setminus B_R \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R^2} \end{cases}$$

onde $\xi_{R,R^2}(x) = (\ln R^2 - \ln|x|)/(\ln R^2 - \ln R)$. Vejamos que as funções acima tem a propriedade desejada.

Temos

$$\begin{aligned} |\nabla \xi_{R,R^2}(x)|^2 &= \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{\ln R^2 - \ln|x|}{\ln R^2 - \ln R} \right)_{x_i} \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left[\left(2 - \frac{\ln|x|}{\ln R} \right)_{x_i} \right]^2 \\ &= \frac{1}{|x|^2 (\ln R)^2} \end{aligned}$$

e, com isso,

$$\int_{B_{R^2}\setminus B_R} |\nabla \xi_{R,R^2}(x)|^2 dx = \frac{1}{(\ln R)^2} \int_{B_{R^2}\setminus B_R} \frac{1}{|x|^2} dx.$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{R^2}\setminus B_R} |\nabla \xi_{R,R^2}(x)|^2 dx &= \frac{1}{(\ln R)^2}\int_0^{2\pi}\int_R^{R^2} \frac{1}{r^2} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{(\ln R)^2}\int_0^{2\pi} (\ln R^2 - \ln R) d\theta \ . \\
&= \frac{2\pi}{\ln R}.
\end{aligned}$$

.

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi_R^2(x)|^2 \to 0 \ \text{ quando } \ R \to +\infty.$$

Com isso fica verificado para $n = 2$.

Para dimensão 3 iremos assumir $|u(x)| \leq Ce^{-\alpha|x_3|}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. As funções ξ_R^3 são definidas da seguinte forma:

$$\xi_R^3(x) = \xi_R^2(x')\xi_R^1(x_3) \ \text{ para } \ x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Temos

$$\begin{aligned}
|\nabla \xi_R^3|^2 &= \sum_{i=1}^{3} \left[(\xi_R^2 \xi_R^1)_{x_i}\right]^2 \\
&= \left[(\xi_R^2)_{x_1}\xi_R^1\right]^2 + \left[(\xi_R^2)_{x_2}\xi_R^1\right]^2 + \left[\xi_R^2(\xi_R^1)_{x_3}\right]^2 \\
&= |\xi_R^1|^2|\nabla \xi_R^2|^2 + |\xi_R^2|^2|\nabla \xi_R^1|^2.
\end{aligned}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\xi_R^3|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} Ce^{-2\alpha|x_3|} \Big(|\xi_R^1|^2 |\nabla \xi_R^2|^2 + |\xi_R^2|^2 |\nabla \xi_R^1|^2 \Big) dx' dx_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}} Ce^{-2\alpha|x_3|} |\xi_R^1|^2 dx_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi_R^2|^2 dx' + \int_{\mathbb{R}} Ce^{-2\alpha|x_3|} |\nabla \xi_R^1|^2 dx_3 \int_{\mathbb{R}^2} |\xi_R^2|^2 dx' \\
&= \int_{(-2R,2R)} Ce^{-2\alpha|x_3|} |\xi_R^1|^2 dx_3 \int_{B_{R^2} \backslash B_R} |\nabla \xi_R^2|^2 dx' \\
&\quad + \int_{(-2R,-R)\cup(R,2R)} Ce^{-2\alpha|x_3|} |\nabla \xi_R^1|^2 dx_3 \int_{B_{R^2}} |\xi_R^2|^2 dx' \\
&\leq C_1 \frac{R}{e^{2\alpha R}} \int_{B_{R^2} \backslash B_R} |\nabla \xi_R^2|^2 dx' + C_2 \frac{R^4}{e^{2\alpha R}} \int_{(-2R,-R)\cup(R,2R)} |\nabla \xi_R^1|^2 dx_3
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\xi_R^3|^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to +\infty,
$$

o que conclui a demonstração do teorema. ∎

A seguir forneceremos uma prova para a Conjectura (B) em dimensão 1 e 2.

Teorema 1.1.2 *Suponha $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então qualquer função $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que φu é limitada em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz $\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla u) = \sum_{i=1}^n (\varphi^2 u_{x_i})_{x_i} = 0$ é necessariamente constante.*

Demonstração: Multiplicando $\sum_{i=1}^n (\varphi^2 u_{x_i})_{x_i} = 0$ por $(\xi_R)^2 u$, $\xi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\xi_R = 1$ em B_R, e integrando em $\mathbb{R}^n$, temos

$$
0 = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_R)^2 u (\varphi^2 u_{x_i})_{x_i} dx.
$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}0 &= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}((\xi_R)^2u)_{x_i}\varphi^2u_{x_i}dx\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(2\xi_R(\xi_R)_{xi}u\varphi^2u_{x_i}+(\xi_R)^2\varphi^2u_{x_i}^2\Big)dx\\ &= -2\int_{\mathbb{R}^n}\xi_Ru\varphi^2\nabla\xi_R\cdot\nabla u\ dx-\int_{\mathbb{R}^n}(\xi_R)^2\varphi^2|\nabla u|^2dx.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(\xi_R)^2\varphi^2|\nabla u|^2dx &= -2\int_{\mathbb{R}^n}\xi_Ru\varphi^2\nabla\xi_R\cdot\nabla u\ dx\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_R\varphi\nabla u||u\varphi\nabla\xi_R|dx\end{aligned}$$

Por Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\xi_R)^2\varphi^2|\nabla u|^2dx\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi_R\varphi\nabla u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u\varphi\nabla\xi_R|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\xi_R)^2\varphi^2|\nabla u|^2dx\leq 4\int_{\mathbb{R}^n}(u\varphi)^2|\nabla\xi_R|^2dx.$$

Sendo $u\varphi$ limitado em $\mathbb{R}^n$, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\int_{B_R}\varphi^2|\nabla u|^2dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}(\xi_R)^2\varphi^2|\nabla u|^2dx\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\xi_R|^2dx.$$

Para $n=1$, tomemos $\xi_R=\xi_R^1$ e, para $n=2$, $\xi_R=\xi_R^2$. Assim, fazendo $R\to+\infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2|\nabla u|^2dx=0.$$

Logo $\nabla u=0$ em B_R,assim podemos concluir que u é constante em $\mathbb{R}^n$ para $n=1,2$.
■

Finalmente apresentaremos um contra-exemplo para a Conjectura (A) em dimensão $n\geq 7$.

Proposição 1.1.2 *Para $n \geq 7$, existe um potencial V limitado e suave tal que $(\Delta + V)u = 0$ possui solução limitada que muda de sinal e solução positiva, isto é, $\lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$.*

Demonstração: Considere a função $u(x) = (1 + |x|^2)^{-s_1} x_1$, $s_1 \geq 1/2$. Temos u limitado, pois

$$|u(x)| = \frac{x_1}{(1 + |x|^2)^{s_1}} \leq \frac{x_1}{|x|} \leq 1,$$

e obviamente u muda de sinal.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= [-2s_1(1+|u|^2)^{-s_1-1}{x_1}^2 + (1+|x|^2)^{-s_1}]_{x_1} + \sum_{i=2}^{n}[-2s_1(1+|u|^2)^{-s_1-1}x_i x_1]_{x_i} \\
&= 4(s_1+1)(1+|x|^2)^{-s_1-2}x_1{x_1}^2 - 4s_1(1+|x|^2)^{-s_1-1}x_1 - 2s_1(1+|x|^2)^{-s_1-1}x_1 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} 4(s_1+1)(1+|x|^2)^{-s_1-2}x_1{x_i}^2 - 2s_1(1+|x|^2)^{-s_1-1}x_1 \\
&= 4(s_1+1)s_1\frac{(1+|x|^2)^{-s_1}x_1}{(1+|x|^2)^2}|x|^2 - 4s_1\frac{(1+|x|^2)^{-s_1}x_1}{1+|x|} - 2ns_1\frac{(1+|x|^2)^{-s_1}x_1}{1+|x|^2} \\
&= 4(s_1+1)s_1\frac{u}{(1+|x|^2)^2}|x|^2 - 4s_1\frac{u}{1+|x|} - 2ns_1\frac{u}{1+|x|^2}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta u}{u} &= \frac{4(s_1+1)s_1|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{4s_1}{1+|x|^2} - \frac{2ns_1}{1+|x|^2} \\
&= \frac{4(s_1+1)s_1|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2(n+2)s_1}{1+|x|^2} + \frac{4(s_1+1)s_1}{(1+|x|^2)^2} - \frac{4(s_1+1)s_1}{(1+|x|^2)^2} \\
&= \frac{4(s_1+1)s_1(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2(n+2)s_1}{1+|x|^2} - \frac{4(s_1+1)s_1}{(1+|x|^2)^2} \\
&= -\frac{4(s_1+1)s_1}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2(n+2)s_1 - 4(s_1+1)s_1}{1+|x|^2}.
\end{aligned}$$

.

Defina

$$V(x) = \frac{4(s_1+1)s_1}{(1+|x|^2)^2} + \frac{2(n+2)s_1 - 4(s_1+1)s_1}{1+|x|^2}.$$

Assim, temos que $(\Delta + V)u = 0$, com $u(x) = (1+|x|^2)^{-s_1}x_1$.

Agora, considerando $\varphi(x) = (1+|x|^2) - s_2$, $s_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \sum_{i=1}^{n}[-2s_2(1+|x|^2)^{-s_2-1}x_i]_{x_i} \\ &= 4(s_2+1)s_2\frac{\varphi}{(1+|x|^2)^2}|x|^2 - 2ns_2\frac{\varphi}{1+|x|^2}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{\varphi} &= \frac{4(s_2+1)s_2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2ns_2}{1+|x|^2} \\ &= \frac{4(s_2+1)s_2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2ns_2}{1+|x|^2} + \frac{4(s_2+1)s_2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{4(s_2+1)s_2}{(1+|x|^2)^2} \\ &= -\frac{4(s_2+1)s_2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{2ns_2 - 4(s_2+1)s_2}{1+|x|^2}.\end{aligned}$$

Seja

$$W(x) = \frac{4(s_2+1)s_2}{(1+|x|^2)^2} + \frac{2ns_2 - 4(s_2+1)s_2}{1+|x|^2}.$$

Assim, temos $(\Delta + W)\varphi = 0$, com $\varphi(x) = (1+|x|^2) - s_2$. Pela Proposição 1.1.1, temos que $\lambda_1(\mathbb{R}^n, W) = 0$.

Se $s_1 = 1/2$ e $s_2 = n - 2/4$, teremos

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{3}{(1+|x|^2)^2} + \frac{n-1}{1+|x|^2} \\ W(x) &= \frac{(n-2)\left(\dfrac{n+2}{4}\right)}{(1+|x|^2)^2} + \frac{\dfrac{(n-2)^2}{4}}{1+|x|^2}.\end{aligned}$$

Tomando $s_1 \leq s_2$ e $n-1 \leq (n-2)^2/4$, isto é, $n \geq 7$, obtemos $V \leq W$. Consequentemente $0 = \lambda_1(\mathbb{R}^n, W) \leq \lambda_1(\mathbb{R}^n, V) \leq 0$. Logo $\lambda_1(\mathbb{R}^n, V) = 0$ para $n \geq 7$. Em outras palavras, $(\Delta + V)u = 0$ possui solução positiva para $n \geq 7$. ■

Agora mostraremos que a Conjectura (B) também não é satisfeita para $n \geq 7$.

Proposição 1.1.3 *Se $n \geq 7$, existe uma função $\varphi > 0$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ e uma solução não constante para $\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla v) = 0$ com φv limitada.*

Demonstração: Seja $\lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$. Pela Proposição 1.1.1, existe $\varphi > 0$ com $L\varphi = 0$ e sendo $n \geq 7$, existe uma u com $Lu = 0$ que muda de sinal. Seja $v = u/\varphi$, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla v) &= \sum_{i=1}^{n} (\varphi^2 v_{x_i})_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi^2 \frac{u_{x_i}\varphi - u\varphi_{x_i}}{\varphi^2} \right)_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}\varphi - u\varphi_{x_i x_i} \\
&= \varphi \Delta u - u \Delta \varphi + V u \varphi - V \varphi u = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, se a Conjectura (B) fosse satisfeita para $n \geq 7$, teríamos v constante e, consequentemente, u não mudaria de sinal. Isso contradiria nossa suposição. ∎

1.2 Conjectura de De Giorgi para $n = 2$

Nesta seção, nosso intuito é mostrar que a conjectura De Giorgi é de fato verdade em dimensão 2.

Teorema 1.2.1 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R})$. Suponha u uma solução inteira e limitado de*

$$\Delta u - F'(u(x)) = 0 \quad \textit{para} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

tal que $\partial u/\partial x_2 \geq 0$ em todo $\mathbb{R}^2$. Então u é da forma $u(x) = g(ax_1 + bx_2)$, para $g \in C^2(\mathbb{R})$ com a, b constantes apropriadas.

Demonstração: Se u é uma solução inteira e limitada de $\Delta u = F'(u) = u^3 - u$, então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u - F'(u))_{x_2} \\ &= (u_{x_1x_1})_{x_2} + (u_{x_2x_2})_{x_2} - F''(u)u_{x_2} \\ &= (u_{x_2})_{x_1x_1} + (u_{x_2})_{x_2x_2} - F''(u)u_{x_2} \\ &= \Delta u_{x_2} - F''(u)u_{x_2} \end{aligned}$$

Isto é, se u satisfaz $\Delta u = F'(u)$, então u_{x_2} é solução da equação

$$\Delta + V(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.14}$$

onde $-V(x) = F''(u(x)) = 3u(x)^2 - 1$ é suave e limitado.

Note que podemos assumir $u_{x_2} > 0$ em $\mathbb{R}^2$, pois se $u_{x_2}(y) = 0$ para algum $y \in \mathbb{R}^2$ tomaríamos uma bola $B_R(y)$ centrada em y de raio $R > 0$, pela desigualdade de Harnack $u_{x_2} = 0$ em $B_R(y)$ sendo R arbitrário teriamos u_{x_2} em todo $\mathbb{R}^2$. Assim existiria $g \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $u(x) = g(x_1)$.

É facil ver que qualquer direção $\nu \in S^1$ do plano, a derivada direcional $\partial u/\partial \nu$ satisfaz a equação

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial \nu} - F''(u(x))\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

Sabendo que o gradiente de u no ponto y é perpendicular à superfície de nível de u que passa por esse ponto, em outras palavras, ∇u é perpendicular ao vetor velocidade no ponto y (ver [11] p. 140-141). Então para valor ν_1 e algum ponto $y \in \mathbb{R}^2$ podemos ecolher um ν_2 tal que $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ e $\nu \cdot \nabla u(y) = 0$.

Seja $\varphi(x) = \nu \cdot \nabla u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Temos $u_{x_2} > 0$ solução da equação (1.14) então, pela Proposição 1.1.1 temos $\lambda_1(\mathbb{R}^n) = 0$. Pelo Teorema 1.1.1 em dimensão 2, concluimos que φ não muda de sinal, então

$$\varphi(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \varphi(x) = 0.$$

Pela desigualdade de Harnack $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^2$. Logo u é constante ao longo da direção ν, seja $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in S^1$ ortogonal a ν. Segue que

$$u(x) = g(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2),$$

para uma certa função $g \in C^2(\mathbb{R})$. ■

Com o objetivo de provar o Teorema 1.2.2 daqui por diante assumiremos $F \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não negativa tal que $F(\pm 1) = 0$ e $F''(\pm 1) \geq \mu > 0$ para alguma constante μ e u solução inteira de

$$\Delta u - F'(u) = 0$$

tal que $u(x', x_n)$ converge para ± 1 uniformemente quando $x_n \to \pm\infty$.

Para a prova do Lema 1.2.1 a seguir usaremos o seguinte resultado:

Teorema (ver [13]) Seja $F \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não negativa e $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma solução inteira e limitada da equação

$$\Delta u - F'(u) = 0.$$

Então

$$|\nabla u(x)|^2 \leq 2F(u(x)) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 1.2.1 *Se existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(u(x_0)) = 0$, então u é constante.*

Demonstração: Seja $a = u(x_0)$, definamos $A = \{x \in \mathbb{R}^n; u(x) = a\}$. Iremos mostrar que $A = \mathbb{R}^n$ precedendo da seguinde forma. Sendo $\mathbb{R}^n$ um conjunto conexo, com isso, os únicos subconjuntos simultaneamentes abertos e fechados em $\mathbb{R}^n$ são $\emptyset$ e o próprio $\mathbb{R}^n$. Então, sendo A não vazio e fechado (pois u é uma função contínua e $A = u^{-1}(a)$), nos resta provar que A é aberto.

Seja $u(x_1) = a$, por $F \geq 0$ e $F(a) = 0$ temos que a é um ponto de mínimo local, então $F'(a) = 0$ e $F''(a) \geq 0$. Sendo F'' contínua podemos tomar um $\delta > 0$ de tal forma que F seja convexa no intevalo $[a - \delta, a + \delta]$. Com isso obtemos as desigualdades (1.15) e (1.16).

$$F(s(a + \delta) + (1 - s)a) \leq sF(a + \delta) + (1 - s)F(a) \text{ para } s \in [0, 1]. \tag{1.15}$$

Daí

$$F(s\delta + a) \leq sF(a + \delta),$$

tomando $t = s\delta + a$, obtemos

$$F(t) \leq (t-a)\frac{F(a+\delta)}{\delta} \quad \text{para } t \in [a, a+\delta].$$

$$F(s(a-\delta) + (1-s)a) \leq sF(a-\delta) + (1-s)F(a) \quad \text{para } s \in [0,1]. \tag{1.16}$$

Procedendo de forma análoga, podemos obter

$$F(t) \leq (a-t)\frac{F(a-\delta)}{\delta} \quad \text{para } t \in [a-\delta, a].$$

Por (1.15) e (1.16) podemos tomar um $C \geq 0$ tal que

$$F(t) \leq C(t-a)^2 \quad \text{para } t \in [a-\delta, a+\delta].$$

Agora seja $w \in \mathbb{R}^n$ e $|w| = 1$ tomado arbitrariamente, definamos

$$\phi(t) = u(x_1 + tw) - u(x_1) \quad \text{para } |t| < \epsilon,$$

tal que $u(x_1 + tw) \subset [a-\delta, a+\delta]$.

Note que

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \lim_{h\to 0} = \frac{\phi(t+h) - \phi(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} = \frac{u(x_1 + tw + hw) - u(x_1 + tw)}{h} \; . \\
&= \frac{\partial u}{\partial w}(x_1 + tw)
\end{aligned}$$

Logo

$$|\phi'(t)|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial w}(x_1 + tw)\right|^2 \leq |\nabla u(x_1 + tw)|^2.$$

Por outro lado

$$F(u(x_1 + tw) \leq C(u(x_1 + tw) - a)^2 = C|\phi(t)|^2.$$

Pelo Teorema enunciado anteriormente, temos

$$|\phi'(t)|^2 \leq 2C|\phi(t)|^2.$$

Sendo $\phi(0) = 0$ temos pelo Lema A.1.2 que $\phi = 0$ para $|t| < \epsilon$. Logo $u = a$ na bola $B(x_1, \epsilon)$, segue que $B(x_1, \epsilon) \subset A$.

■

Lema 1.2.2 $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Por hipótese $F''(\pm 1) > \mu > 0$, então seja $\frac{1}{2} > \delta > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que

$$F''(u(x)) > \frac{\mu}{2} \text{ para } -1 < u(x) < -1 + \delta \text{ ou } 1 - \delta < u(x) < 1.$$

E pelo fato de $u(x', x_n) \to \pm 1$ uniformemente quando $x_n \to \pm\infty$, podemos tomar $M_1 > 0$ tal que

$$\begin{cases} x_n \geq M_1 & \Rightarrow \quad 1 - \delta < u(x) < 1 \\ x_n \leq -M_1 & \Rightarrow \quad -1 < u(x) < -1 + \delta \end{cases}$$

Afirmação 1: Temos $K := \sup_{x_n < M_1} u(x', x_n) < 1, \ x \in \mathbb{R}^n$.

Se não fosse verdade, existiria uma sequência $\{u^i\}_i$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} u(x^i) = 1 \text{ com } -M_1 < x_n^i < M_1.$$

Definamos $u^i(x) = u(x + x^i)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos u^i solução inteira de $\Delta u - F'(u) = 0$ e $|u^i| < 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então existe uma subsequência de $\{u^i\}_i$ que continuaremos denotando por $\{u^i\}_i$ tal que

$$u^i \to u^\infty \text{ em } C^2(\mathbb{R}^n).$$

Com u^∞ solução inteira de $\Delta u - F'(u) = 0$ e $u^\infty(0) = \lim_{i\to\infty} u(x^i) = 1$, logo $F(u^\infty(0)) = 0$ segue pelo Lema 1.2.1 que $u^\infty = 1$ em $\mathbb{R}^n$. Contradição, pois para $x_n < -2M_1$ implica em $x_n + x_n^i < -M_1$. Então

$$u^i(x) = u(x + x^i) < -1 + \delta \text{ para } x_n < -2M_1.$$

Sendo $u^\infty(x) = \lim_{i\to\infty} u^i(x)$, temos

$$u^\infty(x) \leq -1 + \delta \text{ para } x_n < -2M_1.$$

Agora escolhamos $M_2 > M_1$ de tal forma que $u(x', x_n) > K$ para $x_n \geq 2M_2 - M_1$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer, definamos

$$u_\lambda(x) = u(x', 2\lambda - x_n) \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } R_\lambda^+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > \lambda\}.$$

Afirmação 2: Se $\lambda > M_2$, então $u_\lambda(x) \leq u(x)$ para $x \in R_\lambda^+$.

Note que se $x_n \geq 2\lambda - M_1$, temos

$$x_n > 2M_2 - M_1 \;\text{ e }\; 2\lambda - x_n \leq M_1.$$

Logo $u_\lambda(x', x_n) \leq u(x', x_n)$, assim fica necessário apenas verificar para $x \in S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n; \lambda < x_n < 2\lambda - M_1\}$. Para $x \in S_\lambda$, temos

$$1 - \delta < u(x) < 1 \;\text{ e }\; 1 - \delta < u_\lambda(x) < 1.$$

Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe um c_x entre $u_\lambda(x)$ e $u(x)$ tal que

$$\frac{F'(u_\lambda(x)) - F'(u(x))}{u_\lambda(x) - u(x)} = F''(c_x) > \frac{\mu}{2}.$$

Seja $C_\lambda(x) = F''(c_x)$ e $w_\lambda(x) = u_\lambda(x) - u(x)$, teremos

$$\Delta w_\lambda - C_\lambda(x) w_\lambda.$$

Pela limitação de $u(x)$ e o princípio do máximo (modificado para uma faixa infinita), podemos afirmar que

$$w_\lambda(x) \leq \sup_{\partial S_\lambda} w_\lambda(x) \;\text{ para }\; x \in S_\lambda.$$

Note que, se $x_n = \lambda$ implicará em $u_\lambda(x', x_n) = u(x', x_n)$, consequentemente $w_\lambda(x) = 0$. Da mesma forma se $x_n = 2\lambda - M_1$, teremos $x_n > 2M_2 - M_1$ e $2\lambda - x_n = M_1$, segue que

$$u(x', x_n) > K \;\text{ e }\; u_\lambda(x', x_n) \leq K.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sup_{x_n = 2\lambda - M_1} w_\lambda(x) &= \sup_{x_n = 2\lambda - M_1} u_\lambda(x) + \sup_{x_n = 2\lambda - M_1} -u(x) \\ &= \sup_{x_n = 2\lambda - M_1} u_\lambda(x) - \inf_{x_n = 2\lambda - M_1} u(x) \quad . \\ &= K - K = 0 \end{aligned}$$

Com as verificações acima, podemos afirmar que $\sup_{\partial S_\lambda} w_\lambda(x) = 0$. Portanto $u_\lambda(x) \leq u(x)$ em R_λ^+.

Afirmação 3: $\Lambda := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; u_\lambda(x) \leq u(x) \;\text{ para }\; x \in R_\lambda^+\} = -\infty$.

Suponha que a afirmação não seja verdade, isto é, Λ é um número finito. Então, existe sequências $\{\lambda_i\}_i$ e $\{x^i\}_i$ tal que $\lambda_i < \Lambda$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \Lambda$ e pontos $x^i \in R_\lambda^+$, com $u_{\lambda_i}(x^i) > u(x^i)$ para $i \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $|x_n^i| < M_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então podemos extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por $\{x_n^i\}_i$, que converge para x_n^∞. Definamos:

$$u^i(x) = u((x^i)' + x', x_n) \text{ para } x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde u converge para algum u^∞ em $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e é solução da equação $\Delta u - F'(u) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, temos

$$u_\Lambda^\infty(0', x_n^\infty) \geq u^\infty(0', x_n^\infty), \text{ onde } x_n^\infty \geq \Lambda,$$

onde $0'$ é a origem de $\mathbb{R}^{n-1}$, e

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial x_n} \leq 0, \quad \text{se } x_n^\infty = \Lambda.$$

Por outro lado, por definição de Λ temos $u_\lambda^\infty(x) \leq u^\infty(x)$ para $x \in R_\lambda^+$. Sendo $u_\Lambda(x) \neq u^\infty(x)$, devemos ter $u_\Lambda(x) < u^\infty(x)$ para $x \in R_\lambda^+$ e pelo Lema de Hopf (ver [Evans, L. C.] - pag 330) $\partial u^\infty / \partial x_n < 0$ se $x_n = \lambda$. Isso é uma contradição, uma vez que $x_n^\infty \geq \Lambda$. Com isso fica verifcado a Afirmação 3 e assim terminamos a prova do Lema 1.2.2.

■

Lema 1.2.3 *Existem constantes α, c tal que $-1 < u(x) < -1 + ce^{\alpha x_n}$ para $x_n < 0$ e $1 - ce^{-\alpha x_n} < u(x) < 1$ para $x_n > 0$. Além disso, $|\nabla u(x)| \leq ce^{-\alpha x_n}$ para $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Apenas consideremos o caso $x_n > 0$ (O caso para x_n é similar). Temos $1 - \delta < u(x) < 1$ para $x_n > M_1$, então

$$\frac{F'(u(x)) - F'(1)}{u(x) - 1} = \frac{F'(u(x))}{u(x) - 1} = F''(c_x) > \frac{\mu}{2}$$

para algum $c_x \in (u(x), 1)$. Seja $w(x) := 1 - u(x)$, teremos

$$\Delta w - \frac{\mu}{2} w \geq \Delta(1 - u) - \frac{F'(u)}{u - 1}(1 - u) = -\Delta u + F'(u) = 0$$

e $0 < w(x) < \delta$ para $x_n > M_1$.

Agora sejam $x = (x', x_n)$ com $x_n > 0$ e $A_{x_n} = B_{3x_n}(p) \backslash B_{x_n}(p)$, onde $p = (x', 3x_n)$ e $B_R(p)$ é a bola centrada em p com raio R. Para $\alpha > 0$, definamos a função teste

$$\varphi(z) = \delta(e^{-\alpha(3x_n - r)} + e^{-\alpha(r - x_n)}) \text{ para } z \in A_{x_n},$$

onde $r = |z - p|$ é a distância de z à p. Veja que

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(z) &= \sum_{i=1}^{n}[\delta(e^{-\alpha(3x_n - r)} + e^{-\alpha(r - x_n)})]_{z_i z_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}[\delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\frac{\alpha}{r}(z_i - p_i) - \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\frac{\alpha}{r}(z_i - p_i)]_{z_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\frac{\alpha}{r} + \delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\frac{\alpha^2}{r^2}(z_i - p_i)^2 - \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\frac{\alpha}{r} + \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\frac{\alpha^2}{r^2}(z_i - p_i)^2 \\
&= \delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\tfrac{n\alpha}{r} + \delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\alpha^2 - \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\tfrac{n\alpha}{r} + \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\alpha^2
\end{aligned}$$

Segue que

$$\Delta\varphi(z) - \frac{\mu}{2}\varphi(z) = \delta e^{-\alpha(3x_n - r)}\left(\alpha^2 + \frac{n\alpha}{r} - \frac{\mu}{2}\right) + \delta e^{-\alpha(r - x_n)}\left(\alpha^2 + \frac{n\alpha}{r} - \frac{\mu}{2}\right).$$

Note que podemos tomar α suficientemente pequeno de tal forma que

$$\Delta(\varphi - w)(z) - \frac{\mu}{2}(\varphi - w)(z) \le 0.$$

Para $z \in \partial A_{x_n}$, temos $\varphi(z) = \delta e^{-2\alpha x_n} + \delta$, logo $\varphi(z) - w(z)$ para $z \in \partial A_{x_n}$. Pelo Teorema A.1.15, temos

$$\inf_{A_{x_n}}(\varphi - w) \ge \inf_{\partial A_{x_n}}(\varphi - w)^-.$$

Concluimos que $\varphi(z) - w(z) > 0$ para $z \in A_{x_n}$. Agora seja $f : [x_n, 3x_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \delta(e^{-\alpha(3x_n - t)} + e^{-\alpha(t - x_n)})$, temos

$$f'(t) = \delta\alpha(e^{-\alpha(3x_n - t)} - e^{-\alpha(t - x_n)})$$

e

$$f''(t) = \delta\alpha^2(e^{-\alpha(3x_n - t)} + e^{-\alpha(t - x_n)}).$$

Logo $t = 2x_n$ é o ponto de mínimo, é claro que podemos tomar um $c > 0$ tal que $f(t) < ce^{-\alpha x_n}$. Com isso podemos afirmar que

$$1 - u(z) = w(z) \le \varphi(z) < ce^{-\alpha x_n} \quad \text{para} \quad z \in A_{x_n}.$$

Portanto

$$1 - ce^{-\alpha x_n} < u(x) \quad \text{para} \quad x_n > 0.$$

A estimativa do gradiente resulta da teoria clássica das equações elípticas. ■

Por fim a prova do Teorema 1.2.2

Teorema 1.2.2 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R})$ uma função não negativa com $F(\pm 1) = 1$ e $F''(\pm 1) \geq \mu > 0$. Suponha u uma solução de*

$$\Delta u - F'(u(x)) = 0 \quad \textit{para} \quad x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$$

e $u(x', x_n)$ converge uniformemente para ± 1 quando $x_n \to \pm\infty$. Então,

a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ e $|\nabla u(x)| \leq Ce^{-\alpha |x_n|}$ onde C e α são constantes positivas.

b) Se a dimensão é 2 ou 3, então u é necessariamente da forma $u(x', x_n) = g(x_n)$, onde $g(t)$ é solução da equação

$$g''(t) = F'(g(t)) \quad e \quad \lim_{t \to \pm\infty} g(t) = \pm 1 \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: O item (a) fica verificado pelos Lemas 1.2.2 e 1.2.3

Já o item (b), dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $\nabla u(x_0)$ é perpendicular à superfície de nível que passa por x_0, então tomando o vetor velocidade $v = (v', v_n)$ no ponto x_0, temos $v \cdot \nabla u(x_0)$. Seja $\varphi(x) = v \cdot \nabla u(x)$ para todo $\mathbb{R}^n$, temos

$$|\varphi(x)| = |v \cdot \nabla u(x)|.$$

Por Cauchy-Shwarz

$$|\varphi(x)| = |v||\nabla u(x)|.$$

Tomando $|v| = 1$, segue pelo Lema 1.2.3

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-\alpha |x_n|}.$$

Note que φ é solução da equação

$$\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

onde $V(x) = -F''(u(x))$ é suave e limitada. Sendo $\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$ também solução da equação 1.17, pela Proposição 1.1.1, $\lambda_1(\mathbb{R}^n, V) = 0$ e pelo Teorema 1.1.1 podemos afirmar que φ não muda de sinal para $n = 2$ e $n = 3$, então podemos definir φ de tal forma que $\varphi(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$, segue pela desigualdade de Harnack $\varphi(x) = 0$ em todo $\mathbb{R}^n$. Portanto u é constante ao longo da direção ν. Lembrando que $\lim_{x_n \to \pm\infty} u(x', x_n) = \pm 1$ uniformente, temos $\nu_n = 0$. Sendo x_0 arbitrário, segue que $u(x', x_n) = g(x_n)$ para um certo $g \in C^2(\mathbb{R})$. ■

Capítulo 2

A conjectura de De Giorgi em dimensão 3

Ao longo deste capítulo assumiremos $F \in C^2(\mathbb{R})$, u limitado e solução da equação $\Delta u - F'(u) = 0$ satisfazendo $\partial_n x = \partial u/\partial x_n > 0$ em $\mathbb{R}^n$.

2.1 Estimativa de Energia

Nesta seção provaremos a Conjectura de De Giorgi em dimensão 3, procedendo como na prova dada no Capítulo 1. Ou seja, temos o objetivo de provar que $\sigma_i = \partial_i u/\partial_3 u$ é constante para $i = 1, 2$. Isso vai ser obtido através de um resultado tipo Lioville (Proposição 2.1.1). O Teorema 2.1.1(Estimativa de Energia) é o resultado chave que nos permitirá aplicar a Proposição 2.1.1.

Primeiro, estabelecemos alguns limites simples e regularidade para u. Vejamos que u é de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ e ∇u é limitada em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Temos u e $F'(u)$ limitados em $\mathbb{R}^n$, com isso u e $F'(u)$ pertencem ao espaço $L^p(B_{2R}(y))$ para $y \in \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Segue do Teorema A.1.13

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_R(y))} \leq C(\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} + \|F'\|_{L^p(B_{2R}(y))}),$$

com C independente de y. Agora usando o Teorema A.1.14 com $k = 2$ e p suficientemente grande de modo que $p > n$, temos

$$W^{2,p}(B_R(p)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(B_R(y)).$$

assim fica verificado que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $|\nabla u| \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora verificaremos que $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Em particular note que $u \in C^{2,\alpha}(B_R(y))$.

Pela igualdade $\Delta u = F'(u)$ podemos concluir que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e pela imersão

$$C^1(B_{2R}(y)) \hookrightarrow C^\alpha(B_{2R}(y))$$

que $u \in C^\alpha(B_{2R}(y))$, segue que $F'(u) \in C^\alpha(B_{2R}(y))$. Aplicando o Teorema A.1.16, obtemos

$$u \in C^{2,\alpha}(B_R(y)).$$

Sendo F'' contínuo e u, ∇u limitados, temos $F''(u)\partial_i u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Sendo

$$\Delta \partial_i u - F''(u)\partial_i u = 0,$$

podemos concluir que $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Segue que $u \in W^{3,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.1.1 *Seja u limitada e solução de*

$$\Delta u - F'(u) = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n,$$

onde F é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que

$$\partial_n u > 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n \quad e \quad \lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_n) = 1 \quad para\ todo \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Para cada $R > 1$, seja $B_R = \{|x| < R\}$. Então,

$$E_R(u) = \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - F(1) \right\} dx \leq CR^{n-1},$$

para alguma constante C independente de R.

Demonstração: Considere as funções

$$u^t(x) = u(x', x_n + t), \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para cada t, temos

$$\begin{aligned} \Delta u^t - F'(u^t) &= 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n, \\ |u^t| + |\nabla u^t| &\leq C \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Note também que

$$\lim_{t\to+\infty} u^t(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Denotando por $\partial_t u^t(x)$ a derivada de u^t com respeito a t, temos

$$\partial_t u^t(x) = \partial_n u(x', x_n + t) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmação: $\lim_{t\to+\infty} = E_R(u^t) = 0$.

De fato, temos $lim_{t\to+\infty} F(u^t) - F(1) = 0$, pois F é contínua. Pelo Teorema da convergencia dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{B_R} \{F(u^t) - F(1)\} = 0.$$

Também temos

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta u^t - F'(u^t) \\
&= (u^t - 1)\Delta u^t - (u^t - 1)F'(u^t) \\
&= \int_{B_R} (u^t - 1)\Delta u^t dx - \int_{B_R} (u^t - 1)F'(u^t) dx \\
&= -\int_{B_R} \nabla u^t \cdot \nabla u^t dx + \int_{\partial B_R} \frac{\partial u^t}{\partial \nu}(u^t - 1) d\sigma - \int_{B_R} (u^t - 1)F'(u^t) dx
\end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_R} |\nabla u^t| dx = \int_{\partial B_R} (u^t - 1)\nu \nabla u^t d\sigma - \int_{B_R} (u^t - 1)F'(u^t) dx.$$

Novamente pelo Teorema da convergencia dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{B_R} |\nabla u^t| dx = 0.$$

Assim fica verificado a Afirmação.

Agora calcularemos a derivada de $E_R(u^t)$ com relação a t.

$$\begin{aligned}
\partial_t E_R(u^t) &= \partial_t \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u^t|^2 + F(u^t) - F(1) \right\} dx \\
&= \int_{B_R} \nabla u^t \cdot \nabla(\partial_t u^t) dx + \int_{B_R} F'(u^t)\partial_t u^t dx \\
&= \int_{\partial B_R} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} \partial_t u^t d\sigma - \int_{B_R} \partial_t u^t \Delta u^t dx + \int_{B_R} F'(u^t)\partial_t u^t dx \\
&= \int_{\partial B_R} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} \partial_t u^t d\sigma.
\end{aligned}$$

Sendo $|\nu \nabla u^t|$ limitado e $\partial_t u^t > 0$ ambos em $\mathbb{R}^n$, podemos tomar uma constante $C > 0$ tal que

$$|\partial_t E_R(u^t)| \leq C \int_{\partial B_R} \partial_t u^t d\sigma,$$

em particular $\partial_t E_R(u^t) \geq -C \int_{\partial B_R} \partial_t u^t d\sigma$.

Para cada $T > 0$, pelo teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}
E_R(u) &= E_R(u^T) - \int_0^T \partial_t E_R(u^t) dt \\
&\leq E_R(u^T) + C \int_0^T \int_{\partial B_R} \partial_t u^t d\sigma dx \\
&= E_R(u^T) + C \int_{\partial B_R} \int_0^T \partial_t u^t dt d\sigma \\
&= E_R(u^T) + C \int_{\partial B_R} (u^t - u) d\sigma \\
&\leq E_R(u^T) + C_1 \int_{\partial B_R} d\sigma \\
&= E_R(u^T) + C_1 n \omega_n R^{n-1}.
\end{aligned}$$

Seja $C = C_1 n\omega_n R^{n-1}$ e fazendo $T \to +\infty$, obtemos a estimativa desejada

$$E_R(u) \leq CR^{n-1}.$$

■

Proposição 2.1.1 *Seja $\varphi \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ uma função positiva. Suponha que $\sigma \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$\sigma\nabla \cdot (\varphi^2 \nabla\sigma) \geq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

no sentido de distribuição, para cada $R > 1$, assuma que

$$\int_{B_R} (\varphi\sigma)^2 \leq CR^2, \tag{2.2}$$

para alguma constante C independente de R. Então σ é constante.

Demonstração: Seja $l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $0 \leq l \leq 1$ e

$$l(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 2 \end{cases}$$

Para $R > 1$, seja

$$\xi_R(x) = l\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicando (2.1) por ${\xi_R}^2$ e integrando por parte em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \int {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2 &\leq -2\int \xi_R\varphi^2\sigma\nabla\xi_R \cdot \nabla\sigma \\ &\leq 2\left[\int_{R<|x|<2R} {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2\right]^{1/2}\left[\int \varphi^2\sigma^2|\nabla\xi_R|^2\right]^{1/2} \\ &\leq 4\left[\int_{R<|x|<2R} {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2\right]^{1/2}\left[\tfrac{1}{R^2}\int (\varphi\sigma)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Usando a hipótese (2.2), obtemos

$$\int {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2 \leq C\left[\int {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2\right]^{1/2}, \tag{2.3}$$

com C independente de R. Isto implica que $\int {\xi_R}^2\varphi^2|\nabla\sigma|^2 \leq C$ e fazendo $R \to +\infty$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2|\nabla\sigma|^2 \leq C.$$

Note que o lado direito da desigualdade (2.3) tende para 0 quando $R \to +\infty$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2|\nabla\sigma|^2 = 0.$$

Com isso podemos concluir que σ é constante. ■

Finalmente a prova da conjectura de De Giorgi em dimensão 3, usando a estimativa de energia do Teorema 2.1.1, que nos permitirá aplicar o resultado tipo Lioville para a equação $\nabla \cdot (\varphi^2\nabla\sigma_i) = 0$, onde $\varphi = \partial_n u$, $\sigma_i = \partial_i u/\partial_n u$.

Teorema 2.1.2 *Seja u limitada e solução de*

$$\Delta u - F'(u) = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^3$$

satisfazendo

$$\partial_3 u > 0 \quad em \quad \mathbb{R}^3 \quad e \quad \lim_{x_3\to\pm\infty} u(x', x_3) = \pm 1 \quad para\ todo \quad x' \in \mathbb{R}^2.$$

Assuma $F \in C^2(\mathbb{R})$ *e que*

$$F \geq \min\{F(-1), F(1)\} \quad em \quad (-1, 1)$$

Então os conjuntos de níveis de u são planos, isto é, existem $a \in \mathbb{R}^3$ *e* $g \in C^2(\mathbb{R})$ *tais que*

$$u(x) = g(a\cdot x) \quad para\ todo \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Demonstração: Tomando $\varphi = \partial_3 u$, $\sigma_i = \partial_i u/\partial_3 u$ para $i = 1, 2$, temos

$$\varphi^2\nabla\sigma_i = \varphi^2\left(\frac{\partial_3 u\nabla\partial_i u - \partial_i u\nabla\partial_3 u}{\varphi^2}\right).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi^2\nabla\sigma_i) &= \partial_3 u\Delta\partial_i u - \partial_i u\Delta\partial_3 u \\
&= \partial_3 u\Delta\partial_i u - \partial_i u\Delta\partial_3 u - F''(u)\partial_3 u\partial_i u + F''(u)\partial_3 u\partial_i u \quad . \\
&= \partial_3 u(\Delta\partial_i u - F''(u)\partial_i u) - \partial_i u(\Delta\partial_3 u - F''(u)\partial_3 u) = 0
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é aplicar a Proposição 2.1.1. E para isso ser possível é necessário verificar que

$$\int (\varphi\sigma_i)^2 = \int (\partial_i u)^2 \leq CR^2, \tag{2.4}$$

para $R > 1$ e C independente de R.

Por hipótese $F \geq \min\{F(-1), F(1)\}$ em $(-1, 1)$. Suponha primeiramente que $F(1) = \min\{F(-1), F(1)\}$, nesse caso

$$F(u) - F(1) \geq 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^3.$$

Agora, aplicando o Teorema 2.1.1 em $n = 3$, concluimos que

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |\varphi\sigma_i|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{B_R} |\nabla u|^2 \leq \int_{B_R} \left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - F(1)\right\} \leq CR^2.$$

O mesmo concluimos para o caso que $F(-1) = \min\{F(-1), F(1)\}$, apenas devemos substituir $u(x', x_n)$ por $-u(x', -x_n)$ e $F(u)$ por $F(-u)$. Portanto fica verificado (2.4). Logo pela Proposição 2.1.1, temos que σ_i é constante, em outras palavras, $\partial_i u = c_i \partial_n u$ para alguma constante c_i, $i = 1, 2$. Com isso temos

$$\nabla u = (c_1, c_2, 1)\partial_n u.$$

Isso implica que os conjuntos de níveis de u são planos ortogonais a $a = (c_1, c_2, 1)$.
■

2.2 Conjectura de De Giorgi para $n = 3$

Nesta seção nosso objetivo é provar a Conjectura de De Giorgi para $n = 3$ apresentado em [6]. Ou seja, não assumiremos que

$$u(x) \to \pm 1 \ \text{ quando } \ x_3 \to \pm\infty.$$

Isto é, queremos provar o seguinte Teorema.

Teorema 2.2.1 *Seja u limitado e solução de*

$$\Delta u - F'(u) = 0 \ \ \textit{em} \ \ \mathbb{R}^3$$

satisfazendo

$$\partial_3 u > 0 \ \ \textit{em} \ \ \mathbb{R}^3$$

Assuma $F \in C^2(\mathbb{R})$ *e que*

$$F \geq \min\{F(m), F(M)\} \quad em \quad (m, M)$$

para cada par de números reais $m < M$ *satisfazendo* $F'(m) = F'(M) = 0,\ F''(m) \geq 0$ *e* $F''(M) \geq 0$. *Então os conjuntos de nível de* u *são planos, isto é, existe* $a \in \mathbb{R}^3$ *e* $g \in C^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$u(x) = g(a \cdot x) \ \ para\ todo \ \ x \in \mathbb{R}^3.$$

O resultado acima aplica-se ao caso $F'(u) = u^3 - u$.

Como na seção anterior, precisamos estabelecer a estimativa de energia $E_R(u) \leq CR^2$. Na definição de $E_R(u)$ substituiremos o termo $F(1)$ da seção anterior por $F(\sup u)$.

Podemos notar que há uma dificuldade em verificar

$$\lim_{t \to +\infty} E_R(u^t) = 0$$

desde que não se assuma $\lim_{x_3 \to +\infty} u(x', x_3) = \sup u$. Assim, consideremos a função

$$\bar{u}(x') = \lim_{x_3 \to +\infty} u(x', x_3)$$

que é solução da equação $\Delta u - F'(u) = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Usando o método desenvolvido por Berestycki, Caffarelli e Nirenberg em [5],estabelecemos uma propriedade de estabilidade para $\bar{u}$ que implicará que $\bar{u}$ é realmente uma solução dependendo apenas de uma variável. Como consequência obtemos que a energia de $\bar{u}$ em uma bola em dimensão 2 de raio R é limitado por CR e assim teremos

$$\lim_{t \to +\infty} \sup E_R(u^t) \leq CR^2.$$

Começamos com um Lema que indica a propriedade da estabilidade de $\bar{u}$ e suas consequências.

Lema 2.2.1 *Seja* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *e* u *limitada e solução de* $\Delta u - F'(u) = 0$ *em* $\mathbb{R}^n$ *satisfazendo* $\partial_n u > 0$ *em* $\mathbb{R}^n$. *Então, a função*

$$\bar{u}(x') = \lim_{x_n \to +\infty} u(x', x_3) \tag{2.5}$$

é limitada e solução de

$$\Delta\bar{u} - F'(\bar{u}) = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^{n-1} \tag{2.6}$$

e ,além disso, existe uma função positiva $\varphi \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$ *para cada* $1 \leq p < \infty$, *tal que*

$$\Delta\varphi - F''(\bar{u})\varphi \leq 0 \quad em \quad \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.7}$$

Como consequência, se $n = 3$, *então* $\bar{u}$ *é uma função que depende apenas de uma variável, mais precisamente:*

(a) $\bar{u}$ *é igual à constante* M *que satisfaz* $F''(M) = 0$, *ou*

(b) Existe $b \in \mathbb{R}^2$, *com* $|b| = 1$, *e uma função* $h \in C^2(\mathbb{R})$ *tal que* $h' > 0$ *em* $\mathbb{R}$ *e*

$$\bar{u} = h(b \cdot x') \quad \textit{para todo} \quad x' \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstração: O caso que $\bar{u}$ é uma solução de $\Delta\bar{u} - F'(\bar{u}) = 0$ em $\mathbb{R}^{n-1}$ fica fácil verificar no momento que olharmos $\bar{u}$ como uma função de n variáveis, limite das funções $u^t(x', x_n) = u(x', x_n + t)$ quando $t \to +\infty$. Assim $u^t \to \bar{u}$ uniformemente em C^1 para conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Para provar a existencia de $\varphi > 0$ satisfazendo (2.7) usaremos que

$$\partial_n u > 0 \quad \text{e} \quad -\Delta\partial_n u + F''(u)\partial_n u = 0. \tag{2.8}$$

Afirmação: $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(|\Delta\eta|^2 - F''(\bar{u})\eta^2)dx \geq 0$ para todo $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Multiplicando $\xi^2/\partial_n u$ com $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ na equação (2.8) e integrando por parte

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2\xi\partial_n u\nabla\xi - \xi^2\nabla\partial_n u}{(\partial_n u)^2}\nabla\partial_n u \; dx + \int_{\mathbb{R}^n} F''(u)\xi^2 dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi}{\partial_n u}\nabla\partial_n u \cdot \nabla\xi \; dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} F''(u)\xi^2 dx \end{aligned}$$

Segue que

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi}{\partial_n u}\nabla\partial_n u \cdot \nabla\xi \; dx + \int_{\mathbb{R}^n} F''(u)\xi^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2 dx.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$2\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\xi|^2dx\right)^{1/2}+\int_{\mathbb{R}^n}F''(u)\xi^2dx\geq\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2dx.$$

Sabemos que $a^2+b^2\geq 2ab$ para todo $a,b\in\mathbb{R}$, logo

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\xi|^2dx+\int_{\mathbb{R}^n}F''(u)\xi^2dx\geq\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\xi^2}{(\partial_n u)^2}|\nabla\partial_n u|^2dx. \quad (2.9)$$

Por 2.9 podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla\xi|^2+F''(u)\xi^2)dx\geq 0 \;\text{ para todo }\; \xi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.10)$$

Agora tomemos $\rho>0$ e $\psi_\rho\in C^\infty(\mathbb{R})$ com $0\leq\psi_\rho\leq 1$ tal que

$$\psi_\rho(t)=\begin{cases}1, & \text{em } (\rho+1,2\rho+1)\\ 0, & \text{se } (-\infty,\rho)\cup(2\rho+2,+\infty)\end{cases}$$

e $0\leq\psi_\rho'\leq 2$. Seja $\xi=\eta(x')\psi_\rho(x_n)$, com $\eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, por (2.10), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla(\eta(x')\psi_\rho(x_n))|^2+F''(u)(\eta(x')\psi_\rho(x_n))^2\right]dx\geq 0$$

Por $|\nabla\xi|^2=\sum_{i=1}^n(\partial_i\xi)^2$ e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\int_{\mathbb{R}}(\psi_\rho)^2dx_n\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\nabla\eta|^2dx'+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta^2dx'\int_{\mathbb{R}}(\psi_\rho')^2dx_n+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta^2dx'\int_{\mathbb{R}}F''(u)(\psi_\rho)^2dx_n\geq 0.$$

Dividindo a expressão por $\sigma_\rho=\int_{\mathbb{R}}(\psi_\rho)^2dx_n$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\nabla\eta|^2dx'+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta^2dx'\int_{\mathbb{R}}\frac{(\psi_\rho')^2}{\sigma_\rho}dx_n+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta^2dx'\frac{1}{\sigma_\rho}\int_{\mathbb{R}}F''(u)(\psi_\rho)^2dx_n\geq 0$$

Passando o limite quando $\rho\to+\infty$, consequentemente $x_n\to+\infty$. Pelo fato de $F\in C^2(\mathbb{R})$ e $u(x',x_n)\to\bar{u}(x')$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$, temos

$$F''(u(x',x_n))\to F''(\bar{u}(x')),$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$. Por outro lado temos $\sigma_\rho\to+\infty$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(|\nabla\eta|^2+F''(\bar{u})\eta^2)dx'\geq 0 \;\text{ para todo }\; \eta\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}). \quad (2.11)$$

Assim fica verificado a Afirmação.

A desigualdade (2.11)implica que o primeiro autovalor λ_1^R de $-\Delta + F''(\bar{u})$ na bola $B'_R = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < R\}$ é não negativo para cada $R > 1$. Seja $\varphi_R > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1^R em B'_R, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_R + F''(\bar{u})\varphi_R = \lambda_1^R\varphi_R & \text{em} \quad B_R \\ \varphi_R = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{P_R}$$

normalizado com $\varphi_R(0) = 1$. Note que λ_1^R decrescente quando $R \to +\infty$. Segue que $F''(\bar{u}) - \lambda_1^R$ é limitado, como consequência a desigualdade de Harnack nos dá que φ_R são uniformementes limitados em conjuntos compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$. Pelas $W^{2,p}$ estimativas podemos tomar uma subsequência de φ_R que converge em $W^{2,p}_{\text{loc}}$ para uma função positiva $\varphi \in W^{2,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ para cada $1 \leq p, \infty$, satisfazendo $\Delta\varphi''_F(\bar{u}) \geq 0$ em $\mathbb{R}^{n-1}$.

Agora assuma $n = 3$. Para cada $i = 1, 2$, considere a função

$$\sigma_i = \frac{\partial_i\bar{u}}{\varphi} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$

Note que σ_i é bem definido e temos regularidade suficiente para calcular

$$\nabla \cdot (\varphi^2\nabla\sigma_i) = \varphi\Delta\partial_i\bar{u} - \partial_i\bar{u}\Delta\varphi$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sigma_i\nabla \cdot (\varphi^2\nabla\sigma_i) &= \partial_i\bar{u}\Delta\partial_i\bar{u} - \frac{(\partial_i\bar{u})^2}{\varphi}\Delta\varphi \\ &= (\partial_i\bar{u})^2F''(\bar{u}) - \frac{(\partial_i\bar{u})^2}{\varphi}\Delta\varphi \\ &= \frac{(\partial_i\bar{u})^2}{\varphi}(F''(\bar{u})\varphi - \Delta\varphi) \geq 0 \end{aligned}$$

Note também que

$$\int_{B_R}(\varphi\sigma_i)^2 = \int_{B_R}(\partial_i\bar{u})^2 \leq \int_{B_R}|\nabla\bar{u}|^2 = -\int_{B_R}F'(\bar{u})\bar{u} \leq C,$$

onde c é uma constante independente de R. Agora aplicando a Proposição 2.1.1, concluímos que σ_i é constante, isto é,

$$\partial_i\bar{u} = c_i\varphi$$

para alguma constante c_i. Se $c_1 = c_2 = 0$, então $\bar{u}$ é igual a uma constante M. E por 2.11 podemos facilmente concluir que $F''(M) \geq 0$. No caso de pelo menos um c_i for diferente de zero, então $\bar{u}$ é constante ao longo da direção $(c_2, -c_1)$, pois

$$\nabla \bar{u} = \varphi(c_1, c_2).$$

Assim tomando $b = (c_1, c_2)/|(c_1, c_2)|$, teremos $\bar{u}(x') = h(b \cdot x')$ em $\mathbb{R}^2$ para alguma função h. Veja que $c_i \varphi = \partial_i \bar{u} = h'(b \cdot x') c_i |(c_1, c_2)|^{-1}$, logo $h'(b \cdot x') = \varphi |(c_1, c_2)| > 0$ em $\mathbb{R}$. ■

Lema 2.2.2 *Seja F uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.*

i) Suponha que exista uma função $h \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$h'' - F'(h) = 0 \quad e \quad h' > 0 \quad em \quad \mathbb{R} \tag{2.12}$$

Seja $m_1 = \inf_{\mathbb{R}} h$ e $m_2 = \sup_{\mathbb{R}} h$. Então, temos

$$F'(m_1) = F'(m_2) = 0, \tag{2.13}$$

$$F > F(m_1) = F(m_2) \quad em \quad (m_1, m_2), \tag{2.14}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} h'(s)^2 + F(h(s)) - F(m_2) \right\} ds < +\infty. \tag{2.15}$$

ii) Reciprocamente, seja $m_1 < m_2$ e F satisfazendo (2.13) e (2.14). Então existe uma solução crescente h de $h'' - F(h) = 0$ em $\mathbb{R}$, com $\lim_{s \to -\infty} h(s) = m_1$ e $\lim_{s \to +\infty} h(s) = m_2$. Tal solução é única a menos de translação da variável independente s.

Demonstração:

i) Multiplicando a equação 2.12 por $-2h'$ e integrando, temos

$$-(h')^2 + 2F(h) = c,$$

para uma certa constante c. Sendo h crescente, pois $h' > 0$, temos

$$\lim_{s \to -\infty} h(s) = m_1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \to +\infty} h(s) = m_2.$$

Com isso, temos que h converge para as funções constantes $g_1(s) := m_1$ e $g_2(s) := m_2$ quando $s \to -\infty$ e $s \to +\infty$, respectivamente. Logo

$$\lim_{s\to\pm\infty} h'(s) = 0.$$

Sendo $-(h')^2 + 2F(h) = c$, pelos dois últimos resultados podemos concluir que $F(m_1) = F(m_2) = c/2$ e $F(h(s)) = c/2 + (h'(s))^2/2 > c/2$. Logo

$$F(h(s)) > F(m_1) = F(m_2) \text{ em } (m_1, m_2)$$

Agora verificaremos 2.13 e 2.15. Dado $a < b$, sejam $\{a_m\}$ e $\{b_m\}$ sequências onde $a_m = a + m$ e $b_m = b + m$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\{c_m\}$ com $c_m \in (a_m, b_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$h''(c_m) = \frac{h'(b_m) - h'(a_m)}{b - a}.$$

Pela igualdade acima podemos notar que $\lim_{s\to+\infty} h''(s) = 0$. Se em vez de $a_m = a + m$ e $b_m = b + m$, tivermos $a_m = a - m$ e $b_m = b - m$, concluiremos que $\lim_{s\to-\infty} h''(s) = 0$. Logo

$$F'(m_1) = F'(m_2) = 0.$$

Por mudança de variável

$$\int_{m_1}^{m_2} \sqrt{2F(t) - 2F(m_2)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2F(h(s)) - 2F(m_2)}h'(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (h'(s))^2 ds.$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}h'(s)^2 + F(h(s)) - F(m_2) \right\} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} (h'(s))^2 ds \leq (m_2 - m_1)\sqrt{2D},$$

onde $D = \sup_{t\in(m_1,m_2)} F(t) - F(m_2)$.

ii) Seja $m \in (m_1, m_2)$, definamos $\phi : (m_1, m_2) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(t) = \int_m^t \frac{1}{\sqrt{2f(z) - F(m_2)}} dz.$$

Note que por (2.14) ϕ está bem definida e sendo $\phi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2f(z) - F(m_2)}} > 0$, ϕ possui inversa. Seja $h : \mathbb{R} \to (m_1, m_2)$ a inversa de ϕ, então temos

$$s = \phi(h(s)) = \int_m^{h(s)} \frac{1}{\sqrt{2f(z) - F(m_2)}} dz = \int_0^s \frac{h'(y)}{\sqrt{2f(h(y)) - F(m_2)}} dy,$$

segue que

$$\int_0^s \frac{h'(y)}{\sqrt{2f(h(y)) - F(m_2)}} dy = \int_0^s 1 dy.$$

Pelo o que acabamos de ver, podemos concluir que

$$h'(y) = \sqrt{2f(h(y)) - F(m_2)} > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Sendo h crescente,

$$\lim_{s \to -\infty} h(s) = m_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to +\infty} h(s) = m_2.$$

E pela igualdade $h'(y) = \sqrt{2f(h(y)) - F(m_2)}$, temos

$$h'' - F(h) = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

■

Finalmente, damos a

Demonstração do Teorema 2.2.1: Sendo $\partial_3 u > 0$, a prova do teorema 2.1.2 mostra que o Teorema 2.2.1 é estabelecido se provarmos que para cada $R > 1$, temos que

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \leq CR^2,$$

para alguma constante C independente de R.

Sejam

$$m = \inf_{\mathbb{R}^3} u \quad \text{e} \quad M = \sup_{\mathbb{R}^3} u,$$

e considere as funções

$$\underline{u}(x') = \lim_{x_3 \to -\infty} u(x', x_3) \quad \text{e} \quad \overline{u}(x') = \lim_{x_3 \to +\infty} u(x', x_3).$$

Note que $\underline{u} < \overline{u}$, pois $\partial_n u > 0$ e $m = \inf_{\mathbb{R}^2} \underline{u}$ e $M = \sup_{\mathbb{R}^2} \overline{u}$. Aplicando o Lema 2.2.1, se $\overline{u}$ for constante, então necessariamente $\overline{u} = M$ em $\mathbb{R}^2$, $F'(M) = 0$ por

2.6 e $F''(M) \geq 0$ tal como indicado no Lema. No caso (b) do Lema 2.2.1, temos $\overline{u}(x') = h(b \cdot x)$, com |b|=1. Logo

$$0 = \Delta\overline{u} - F'(\overline{u}) = |b|^2 h'' - F'(h) = h'' - F'(h).$$

Sendo $m = \inf_{\mathbb{R}} h$ e $M = \sup_{\mathbb{R}} h$, segue pelo Lema 2.2.2 que $F'(M) = 0$ e usando 2.14 que $F''(M) \geq 0$. Em todo caso, temos sempre

$$F'(M) = 0 \quad \text{e} \quad F''(M) \geq 0.$$

De forma análoga verificamos com $\underline{u}$, simplesmente substituindo $u(x', x_3)$ por $-u(x', -x_3)$, e $F(u)$ por $F(-u)$, que

$$F'(m) = 0 \quad \text{e} \quad F''(m) \geq 0.$$

Por hipótese $F \geq \{F(m), F(M)\}$ em (m, M). Suponha que $F(M) = \min\{F(m), F(M)\}$ (o outro caso é verificado fazendo a mesma mudança anterior de u e F). Então, $F(u) - F(M) \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$. Assim, o teorema será provado se mostrarmos que

$$\int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - F(M) \right\} dx \leq CR^2$$

para cada $R > 1$.

Para esta verificação, vamos proceder como na prova do Teorema 2.1.1. Ou seja, consideramos as funções $u^t(x) = u(x', x_n + t)$, $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$ e a energia de u^t na bola B_R, definida por

$$E_R(u^t) = \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2}|\nabla u^t|^2 + F(u^t) - F(M) \right\} dx.$$

Precisamos mostrar que $E_R(u) = E_R(u^0) \leq CR^2$. Note que utilizando dos mesmos cálculos, podemos obter como na prova do Teorema 2.1.1

$$\partial_t E_R(u^t) \geq -C \int_{\partial B_R} \partial_t u^t d\sigma$$

e

$$E_R(u) \leq E_R(u^t) + CR^2 \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Pela última desigualdade, vemos que $E_R(u) \leq CR^2$ se verificarmos

$$\limsup_{t \to +\infty} E_R(u^t) \leq CR^2.$$

Essa desigualdade é uma consequência direta dos Lemas 2.2.1 e 2.2.2(i). De fato, usando estimativas elípticas e que $u^t(x)$ e crescente em B_R para $\overline{u}(x')$ quando $t \to +\infty$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} E_R(u^t) &= \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \overline{u}(x')|^2 + F(\overline{u}(x')) - F(M) \right\} dx \\ &\leq CR \int_{B_R} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \overline{u}(x')|^2 + F(\overline{u}(x')) - F(M) \right\} dx',\end{aligned}$$

onde $B'_R = \{|x'| < R\}$. Mas a última integral é calculada em uma bola bidimensional, logo delimitada por CR. Sendo u uma função de uma única variável (pelo Lema 2.2.1), e nesta variável a energia é integrável em toda a reta real, por 2.15. A prova está concluída. ■

Apêndice A

Apêndice

A.1 Resultados Auxiliares

Neste apêndice, listamos alguns resultados importantes que são utilizados no decorrer do nosso trabalho.

Teorema A.1.1 ([3], Teorema 5.6) *Seja (f_m) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(i) $f_m(x) \to f(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$

(ii) existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos

$$|f_m(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega f(x)\ dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m(x)\ dx.$$

Teorema A.1.2 ([4], Teorema IV.9) *Sejam (f_m) uma sequência de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_m - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então podemos extrair uma subsequência (f_{m_k}) tal que

(i) $f_{m_k}(x) \to f(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega$ *e*

(ii) $|f_{m_k}(x)| \leq h(x), \forall k \quad q.t.p$ *em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema A.1.3 ([4], Proposicão III.5) *Seja* E *um espaço de Banach e* (x_m) *uma sequência em* E. *Se* $x_m \rightharpoonup x$ *fracamente na topologia fraca de* E, *então* $\|x_m\|$ *é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{m\to\infty} \|x_m\|.$$

Teorema A.1.4 ([4], Teorema III.27) *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* (x_m) *uma sequência limitada em* E; *então existe uma subsequência* (x_{m_k}) *que converge na topologia fraca de* E.

Teorema A.1.5 ([8], Desigualdade de Poincaré) *Sejam* Ω *um aberto, limitado e conexo de* $\mathbb{R}^n$, *com* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então, existe uma constante* C, *dependendo apenas de* n, p *e* Ω, *tal que*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Em particular, sobre o espaço* $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : u_\Omega = 0\}$, *temos que* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma equivalente a norma de* $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.1.6 ([4], Corolário IX.14) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1, *com fronteira limitada, e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,*

$$\begin{cases} se & 1 \leq p \leq n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \\ se & p = n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, \infty), \\ se & p > n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

com injecões contínuas.

Teorema A.1.7 ([4], Teorema IX.16 (Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Temos:*

$$\begin{cases} se & 1 \leq p \leq n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*), \\ se & p = n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, \infty), \\ se & p > n, & \textit{então} & W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

com injeções compactas.

Definição A.1.1 *Sejam* X *um espaço de Banach,* $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *e um conjunto de vínculos:*

$$S := \{u \in X : F(v) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$, *temos que* $F'(u) \neq 0$. *Seja* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é valor crítico de* J *sobre* S *se existem* $u \in S$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tais que* $J(u) = c$ *e* $J'(u) = \lambda F'(u)$. *O ponto* u *é um ponto crítico de* J *sobre* S *e o número real* λ *é chamado multiplicador de Lagrande para o valor crítico* c.

Teorema A.1.8 ([12], Multiplicadores de Lagrange) *Sob as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que* $u_0 \in S$ *é tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u).$$

Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Teorema A.1.9 ([10], Teorema 8.20) *Considere o operador* $Lu = -\Delta u - Vu$, *onde* $V \in L^{\infty}(R^n)$. *Se* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *é uma função não negativa satisfazendo no sentido fraco:*

$$Lu = 0 \quad em\ \Omega,$$

então para qualquer bola $B_{4R}(y) \subset \Omega$, *temos*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u,$$

onde C=C(n,R).

Teorema A.1.10 ([8], Desigualdade de Harnack - pag 334) *Seja* $u \geq 0$ *de classe* C^2 *e solução de*

$$Lu = 0 \quad em\ U,$$

e suponha $V \subset\subset U$ *conexo. Então existe uma constante* C *tal que*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

A constante C *depende apenas de* V *e dos coeficientes de* L.

Definição A.1.2 *Seja* $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *onde* U *é um aberto de um espaço de Banach* X. *O funcional* φ *é Gateaux diferenciável em* $u \in U$ *se existe* $f \in X'$, *tal que para todo* $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle] = 0$$

Se o limite acima existe, ele é único e a derivada de Gateaux em u será denotada por $\varphi'(u)$, *e dada por*

$$\langle \varphi'(u), h \rangle := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + ht) - \varphi(u)].$$

O funcional φ *tem derivada a Fréchet* $f \in X'$ *em* u *se*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle] = 0.$$

Teorema A.1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, para todo k e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$ valem as seguintes imersões:*

$$\begin{array}{rcl} C^{k+1}(\overline{\Omega}) & \hookrightarrow & , C^{k}(\overline{\Omega}), \\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) & \hookrightarrow & , C^{k}(\overline{\Omega}), \\ C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) & \hookrightarrow & C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \end{array}$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas e se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas. Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais

$$\begin{array}{rcl} C^{k+1}(\overline{\Omega}) & \hookrightarrow & , C^{k,1}(\overline{\Omega}), \\ C^{k+1}(\overline{\Omega}) & \hookrightarrow & , C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \end{array}$$

sendo que a última é compacta se Ω for também limitado.

Lema A.1.1 ([10], Lema 6.16) *Seja $u \in C^2(\Omega)$ solução da equação $Lu = f$ em um conjunto aberto Ω, onde f e os coeficientes do operador elíptico L são $C^{\alpha}(\Omega)$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Teorema A.1.12 ([10], Corolário 6.3) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$Lu = f \quad em \quad \Omega,$$

onde L é um operador elíptico com coeficientes em $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, e $\Omega' \subset\subset \Omega$ com $dist(\Omega', \partial\Omega) \geq d$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$d\|Du\|_{C(\Omega')} + d^2\|D^2u\|_{C(\Omega')} + d^{2+\alpha}\|D^2u\|_{C^{\alpha}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{C(\Omega)} + \|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)}),$$

onde C depende apenas da constante elíptica λ e da norma $C^{\alpha}(\Omega)$ dos coeficientes de L.

Teorema A.1.13 ([10], Teorema 9.11) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e L um operador estritamente elíptico. Se $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^P(\Omega)$, é uma solução forte da equação*

$$Lu = f \quad em \quad \Omega,$$

onde os coeficientes de L são contínuos e limitados e $f \in L^P(\Omega)$, então para qualquer domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C = C(n, p, \Omega', \Omega)$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

Teorema A.1.14 ([8], Teorema 6, p.270) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1. Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) Se $k < \frac{n}{p}$, *então* $u \in L^p(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. *Além disso, temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, n, \Omega) > 0$.

(ii) Se $k > \frac{n}{p}$, *então* $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *onde*

$$\alpha = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro} \\ \text{qualquer } \gamma < 1, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Além disso, temos a estimativa

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, n, \alpha, \Omega) > 0$.

Lema A.1.2 *Seja* ϕ *uma função de classe* $C^1(\mathbb{R})$ *com* $\phi(0) = 0$ *e suponha* $|\phi'(t)| \leq C|\phi(t)|$ $\forall t \in \mathbb{R}$, *onde* C *é uma constante positiva. Então* $\phi = 0$ *em* $\mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $t_0 \in \mathbb{R}$, pelo teorema do valor médio, existe $c_1 \in (0, t_0)$ tal que

$$\phi'(c_1) = \frac{\phi(t_0) - \phi(0)}{t_0 - 0} = \frac{\phi(t_0)}{t_0}.$$

Com isso temos

$$|\phi(t_0)| \leq C|t_0||\phi(c_1)|. \tag{A.1}$$

Novamente pelo teorema do valor médio, existe $c_2 \in (0, c_1)$ tal que $\phi'(c_2) = \phi(c_1)/c_1$, substituindo em A.1, temos

$$|\phi(t_0)| \leq C|t_0||c_1||\phi'(c_2)|.$$

Continuando o processo, obtemos

$$|\phi(t_0)| \leq C|t_0||c_1| \cdot ... \cdot |c_n||\phi'(c_{n+1})| \leq C^2|t_0||c_1| \cdot ... \cdot |c_n||\phi(c_{n+1})|.$$

Sendo que $c_n \to 0$ quando $n \to \infty$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n| < 1$ para $n > n_0$, logo

$$|\phi(t_0)| \leq C^2|t_0||c_1| \cdot ... \cdot |c_{n_0}||\phi(c_{n+1})|.$$

Sendo $C^2|t_0||c_1| \cdot ... \cdot |c_{n_0}|$ limitado e $\phi(c_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, obtemos que $\phi(t_0) = 0$. ■

Teorema A.1.15 ([10],Corolário 3.2 - Princípio do Máximo Fraco) *Seja L um operador elíptico com domínio Ω limitado. Suponha que em Ω, $Lu \geq 0$ (≤ 0) e $c \leq 0$, com $u \in C(\overline{\Omega})$, Então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^{+} \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^{-}\right)$$

Se $Lu = 0$ em Ω, Então

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Teorema A.1.16 ([10],Teorema 4.6 - Estimativa Interior) *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^{\alpha}(\Omega)$ tal que $\Delta u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e para qualquer bola $B_{2R}(y) \subset\subset \Omega$, temos*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_R(y))} \leq C(\|u\|_{L^{\infty}(B_{2R}(y))} + \|f\|_{c^{\alpha}(B_{2R}(y))}),$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Referências Bibliográficas

[1] L. Ambrosio and X. Cabré, *Entire solutions of semilinear elliptic equations in 3 and a conjecture of De Giorgi*, J. Amer. Math. Soc.,13(2000).

[2] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society. Conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics, nº 65, Rhode Island, 1988.

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*,Wiley, New York, 1995.

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle*, *Theorie et Applications,* Masson, Paris, 1987.

[5] H. Berestycki, L. Caffarelli and L. Nirenberg, *Futher qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Dedicated to Ennnio De Giorgi. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4)25(1997).

[6] E. De Giorgi, *Convergence problemas for functionals and operators*, Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1983), 131-188.

[7] Ekeland I., *On The Variational Principle,* J. Math. Appl. 47(1974) 324-353.

[8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[9] N. Ghoussoub and C. Gui, *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Ann. Math. 311 (1998), 481-491.

[10] D. Gilbarg,; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 2001.

[11] E. L. LIMA, *Curso de Análise Vol. 2* (10 Edição), Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA/CNPq, p. 546

[12] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[13] L. Modica, *A gradient bound and a Liouville theorem for non linear Poisson equations*, Comm. Pure. Appl. Math. 38 (1985), 679-684.