Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Equações Elípticas com não Linearidade Singular que Modelam MEMSs Eletrostáticos [†]

por

Esteban Pereira da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Novembro/2010
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil

Equações Elípticas com não Linearidade Singular que Modelam MEMSs Eletrostáticos

por

Esteban Pereira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu - UFMG

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Novembro/2010

Agradecimentos

Quero agradecer a minha família e a Ellen pelo apoio que têm prestado em qualquer situação de forma tão dedicada. Com estes quero dividir a alegria e a satisfação de cada nova conquista. Agradeço a todos os Professores que tive, em especial o Professor João Marcos, meu orientador, e à Professora Flávia. Todos estes atuaram na minha formação como lapidários, oferecendo brilho a uma pedra bruta. Agradeço também ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba pela oportunidade que me concedeu de aperfeiçoar minha formação e, ao CNPq pelo apoio financeiro. A estes espero fazer jus à honra.

Obrigado!

Dedicatória

A todos os que se alegram com o nosso sucesso.

Resumo

Estudamos aqui uma classe de equações elípticas semilineares com singularidade do tipo inverso do quadrado. Estas equações aparecem, na modelagem de certos dispositivos eletrostáticos da microtecnologia, MEMS - *Micro Electro Mechanical Systems* (sistemas microeletromecânicos). Mais precisamente tais equações caracterizam a função que descreve a deformação de um capacitor deformável sob a influência de uma voltagem aplicada. A Matemática necessária ao estudo de tais problemas envolve um bom aparato de métodos da Análise não Linear e das Equações Diferenciais Parciais tais como Método de Sub- e Supersolução, Teoremas de Preservação de Sinal (Princípio do Máximo, Princípio de Boggio), estimativas de Energia via Espaços de Sobolev, entre outros. Em paralelo destacamos a importância desta investigação em Matemática, para entendermos como se comportam as soluções de problemas supercríticos em Equações Diferenciais Parciais.

Abstract

Here we study a class of semilinear elliptic equations with nonlinearity of an inverse square type. This equations arise, in applications, on the modeling of certain electrostatic devices from microtechnology, MEMS - *Micro Electro Mechanical Systems*. More precisely, these equations characterizes the function that represents the deformation of a deformable capacitor under the influence of an applied voltage. The Mathematical tools used on the study of such problems involve a bit of Nonlinear Analysis and Partial Differential Equations' methods as sub and supersolutions, sign preserving Theorems (Maximum Principle, Boggio's Principle), energy estimates via Sobolev spaces, etc. In a parallel way we wish to emphasize the importance of this investigation, in Mathematics, on helping the understanding on the class of singular problems in Partial Differential Equations.

Sumário

Introdução

MEMS e NEMS - *Nano Electro Mechanical Systems* (sistemas nanoeletromecânicos) são micromáquinas que integram elementos mecânicos, sensores e eletrônicos em um pequeno chip, que possui uma informação gravada que determina seu funcionamento. São estruturas muito pequenas (cerca de 1 a 100 micrômetros, o que corresponde a 0,001 e 0,1 milímetros, respectivamente) e os dispositivos equipados com eles possuem em média apenas 20 micrômetros.

Estes componentes têm se tornado essenciais na tecnologia moderna. Com eles, os aparelhos eletrônicos têm se tornado mais compactos, baratos, rápidos e precisos. Podemos encontrar tais dispositivos em objetos que utilizamos todos os dias:

- telefones celulares, equipamentos de áudio e aparelhos para surdez, que adotaram esta tecnologia sob a forma de microfiltros, melhorando significativamente a qualidade do som, acabando com problemas como distorção e interferência por frequências que atrapalhem o funcionamento do aparelho;
- carros, como acelerômetros no sistema de air-bags;
- cartuchos de impressoras a jato de tinta;

além de sensores químicos, switches ópticas e etc. Merece destaque também a atuação dos MEMS como carro chefe nos avanços de estudos da engenharia biomédica e da exploração espacial. Sugerimos [16] como referência de informação técnica matemática sobre o assunto e uma visão geral do vasto número de aplicações e do desenvolvimento dessa tecnologia.

A simplicidade desses sistemas e importância em aplicações têm motivado inúmeros pesquisadores desde a década de 60 a estudar os modelos matemáticos associados a estes. Naquela ocasião, H. C. Nathanson e seus colaboradores [15] construíram e analisaram um modelo massa-mola de atuação eletrostática e propuseram a primeira explanação teórica da instabilidade crítica (*pull-in instability* - na literatura original). Na mesma época, G. I. Taylor [19] estudou a deflexão eletrostática de duas películas de sabão carregadas com cargas opostas e concluiu que quando a voltagem aplicada excedia um certo valor crítico, as duas películas de sabão se tocariam.

O dispositivo que estudamos neste trabalho pode ser descrito como uma fina membrana elástica, funcionando como um dielétrico, cuja parte superior está revestida por um filme condutor de largura desprezível. A membrana tem borda fixada à altura de uma unidade de uma placa condutora plana. A região plana determinada pela borda da membrana será representada por Ω. Ao aplicarmos uma voltagem V, a membrana se encurva em direção à placa, podendo tocá-la ou romper-se devido à perda da estabilidade das forças atuantes sobre ela.

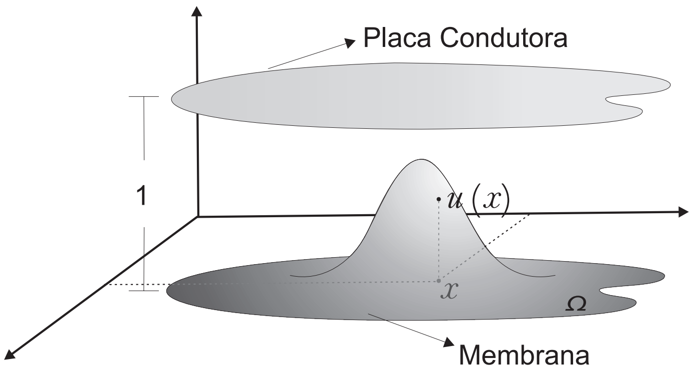

Figura 1: capacitor deformável

A modelagem baseia-se, então, no equilíbrio das forças atuantes sobre a membrana. De um lado temos a tensão devido ao esticamento da membrana - dada pelo laplaciano da função deformação - e a rigidez da membrana - dada pelo bilaplaciano - dificultando a deformação elástica, do outro, a força eletrostática que, pela lei de Coulomb, é proporcional ao quadrado da distância entre a membrana e a placa condutora. Por simplicidade iremos supor que os pontos da membrana se movem verticalmente com relação à sua posição de referência.

No Capítulo 1 estudaremos a equação que, de acordo com o parágrafo anterior, a função deformação da membrana deve satisfazer, no caso estacionário, supondo que a membrana é perfeitamente elástica (rigidez zero). Desprezaremos portanto os efeitos da inércia e do torque. Desprezaremos também efeitos não locais como variação da capacitância e iterações do tipo massa mola, uma vez que nossa membrana tem massa desprezível. Neste caso, a função deformação deve então satisfazer

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u < 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{S_λ}$$

Neste, e nos demais casos, $\lambda \geq 0$ representa a voltagem aplicada (tecnicamente é proporcional a ela); $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e; f

representa a distribuição de permissividade da membrana que, por simplicidade, pedimos que satisfaça $0 \leq f \leq 1$. Uma distribuição de permissividade não constante significa que as forças eletrostáticas atuam com intensidade diferente em distintos pontos da membrana. Os principais resultados deste Capítulo são devidos a N. Goussoub e Y. Guo [11].

No Capítulo 2 estudamos o problema de quarta ordem que descreve o caso onde é permitida uma certa rigidez à membrana. Neste caso estamos considerando uma membrana não elástica e analisando os efeitos de dobradura da mesma.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u < 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{R_λ}$$

Onde η denota a normal unitária exterior à $\partial\Omega$. Neste caso, consideramos $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, o que nos permitirá usar o Princípio de Boggio [5]. Os principais resultados que expomos neste trabalho são devidos a Cassani-J.M. do Ó-Ghoussoub [7].

Em aplicações, a fim de prevenir (ou facilitar, no caso de sistemas de segurança) que o rompimento da membrana, ou o contato dela com a placa condutora, ocorram, é preciso saber para que valores de λ o problema possui solução. É sabido que, para cada problema que estudamos, existe um número real $\lambda^* > 0$, que chamaremos de voltagem crítica (*pull-in voltage* na literatura original), tal que o problema admite solução clássica se $\lambda < \lambda^*$ e não possui solução (nem mesmo no sentido fraco) para $\lambda > \lambda^*$. Além disso, existe um ramo de soluções estáveis do problema, isto é, um ramo de soluções de energia mínima.

Para finalizar, frisamos que o modelo estacionário geral para o dispositivo descrito acima é dado por:

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u = S(u)\Delta u + \dfrac{\lambda f(x)}{D(u)(1-u)^2} & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u < 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{M_λ}$$

onde a constante $\alpha \geq 0$ representa a largura da membrana, os termos $S(u) = \beta \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \gamma$ e $D(u) = 1 + \chi \displaystyle\int_\Omega \frac{dx}{(1-u)^2}$, $\beta, \gamma, \chi \geq 0$, representam parâmetros não locais que influenciam na deformação da membrana. Os mesmos são tomados quando consideramos as contribuições que o esticamento da membrana dá à sua energia potencial e à variação de sua capacitância.

Capítulo 1

Problema de Segunda Ordem

Estudaremos neste capítulo o problema (S_λ), que corresponde ao modelo descrito pela Figura 1, no caso onde a membrana é perfeitamente elástica e não consideramos os efeitos da inércia, do torque e os não locais.

Estamos interessados em encontrar funções positivas que satisfaçam a relação:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(x)}{(1-u)^2}. \tag{1.1}$$

Neste sentido requereremos, por simplicidade, $\lambda \geq 0$ e $0 \leq f \leq 1$, o que se espera para obtermos tais soluções de acordo com o Princípio do Máximo e, em concordância com as condições naturais esperadas sobre estes parâmetros com relação à modelagem que motivou, inicialmente, o estudo desta classe de equações.

Mais precisamente estudaremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u \;=\; \dfrac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} & \text{em} \quad \Omega, \\ 0 \leq u \;\; < 1 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{S_λ}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ (aberto conexo e com fronteira suave) e;

$$f \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \text{ para algum } \beta \in (0,1]\,,\; 0 \leq f \leq 1 \text{ e, } f \not\equiv 0. \tag{1.2}$$

Definição 1 (solução clássica) *Quando $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz (S_λ) dizemos que u é uma* ***solução clássica de*** (S_λ).

Definição 2 (solução fraca) *Diremos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma* ***solução fraca*** *de* (S_λ) *se* $0 \leq u \leq 1$ *q. t. p. em* Ω *e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{\lambda f \phi}{(1-u)^2} dx. \tag{1.3}$$

para todo $0 \leq \phi \in H_0^1(\Omega)$. *Convencionamos que* $\dfrac{\lambda f \phi}{(1-u)^2} = 0$ *quando* $f = 0$ *e exigimos* $\dfrac{\lambda f \phi}{(1-u)^2} \in L^1(\Omega)$.

Observação 1 *Multiplicando* (1.1) *por* $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ *e integrando por partes verificamos que toda solução clássica é também uma solução fraca, onde podemos tomar* $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *por densidade.*

1.1 Existência da voltagem Crítica

Mostraremos que existe um valor Crítico $\lambda^* > 0$ tal que (S_λ) possui solução clássica quando tivermos $0 \leq \lambda < \lambda^*$ e não possui quando $\lambda > \lambda^*$. Seja

$$\Lambda := \{\lambda \geq 0 : \ (S_\lambda) \text{ admite solução clássica}\},$$

é equivalente mostrarmos que Λ é um intervalo limitado não degenerado onde $\lambda^* := \sup \Lambda$. O Teorema seguinte traz esse resultado além de estimativas para o valor de λ^*. Primeiramente precisamos estabelecer algumas definições:

Definição 3 *Dado* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado:*

- ϕ_Γ *representa a primeira autofunção positiva do operador* $-\Delta$ *em* $H_0^1(\Gamma)$ *com condição de fronteira de Dirichlet, normalizada com* $\|\phi_\Gamma\|_{L^1(\Gamma)} = 1$;
- μ_Γ *representa o autovalor associado a* ϕ_Γ;
- $\kappa_\Gamma := \left(\|\phi_\Gamma\|_{L^\infty(\Gamma)}\right)^{-1}$.

Teorema 4 Λ *é um intervalo limitado não degenerado e, além disso,*

$$\frac{\nu_\Omega}{\sup\limits_{x \in \Omega} f(x)} < \lambda^* < \frac{\mu_\Omega}{\displaystyle\int_\Omega \phi_\Omega f} \tag{1.4}$$

onde

$$\nu_\Omega = \sup\left\{\mu_\Gamma H(\inf_\Omega \kappa_\Gamma \phi_\Gamma); \Gamma \text{ é um domínio de } \mathbb{R}^N, \overline{\Omega} \subset \Gamma\right\}$$

$$H(t) = \frac{t(t + 2\sqrt{t} + 1)}{(t + \sqrt{t} + 1)^3}.$$

Prova. Primeiramente, note que $\Lambda \neq \emptyset$, uma vez que, $0 \in \Lambda$. Vejamos que Λ é limitado. Dados $\lambda \in \Lambda$ e u solução de (S_λ), temos que

$$\mu_\Omega \geq \mu_\Omega \int_\Omega u\phi_\Omega = -\int_\Omega u\Delta\phi_\Omega = -\int_\Omega \Delta u\phi_\Omega = \lambda \int_\Omega \frac{\phi_\Omega f}{(1-u)^2} \geq \lambda \int_\Omega \phi_\Omega f,$$

ou seja, $\lambda \leq \mu_\Omega \left(\int_\Omega \phi_\Omega f \right)^{-1} < +\infty$. Obtemos assim o lado direito de (1.4) e concluímos que Λ é limitado.

Agora, dados $\lambda \in \Lambda$, u a solução de (S_λ) associada e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda$, como

$$-\Delta u = \frac{\lambda f}{(1-u)^2} \geq \frac{\lambda_0 f}{(1-u)^2},$$

temos que, u é supersolução de (S_{λ_0}), de acordo com a Definição (27) da Seção (A.4), com

$$F(x,z) := \frac{\lambda_0 f(x)}{(1-z)^2}.$$

Escolhendo $I = [0, M]$ onde $M := \max_\Omega u$, como $0 < M < 1$, temos que F é lipchitziana na segunda variável sobre I. Observe que $v = 0$ é uma subsolução para todo $\lambda \geq 0$. Podemos então aplicar o Método de Sub- e Supersolução (veja (A.4)), donde concluímos que (S_{λ_0}) admite solução fraca $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo $0 \leq u_0 \leq u < 1$ q.t.p., a qual vem a ser solução clássica de acordo com a Proposição (11) da seção (A.5). Portanto, $\lambda_0 \in \Lambda$. Provamos, assim, que Λ é um intervalo.

Mostraremos que, para algum $\lambda > 0$, (S_λ) admite solução. Para tanto, usaremos novamente o Método de Sub- e Supersolução como foi feito acima. Dado Γ, domínio de $\mathbb{R}^N$ com $\overline{\Omega} \subset \Gamma$, considere $\phi_\Gamma \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a primeira autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Gamma)$ com $\|\phi_\Gamma\|_\infty = 1$.

Afirmação 1 *Afirmamos que dado $A \in (0,1)$, a função $\phi = A\phi_\Gamma$ satisfaz*

$$-\Delta\phi \geq \frac{\lambda f}{(1-\phi)^2}$$

para algum $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Obviamente não podemos dizer que ϕ é supersolução de acordo com a definição que fornecemos na Seção (A.4) (Definição (27)), pois deveríamos verificar $\phi \in H_0^1(\Omega)$, no entanto, $\phi > 0$ sobre $\partial\Omega$. Consideramos então a função $\psi := \phi - \widetilde{\phi}$, onde $\widetilde{\phi} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{\phi} = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \widetilde{\phi} = \phi > 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.5}$$

Se a Afirmação 1 se verifica então ψ é uma supersolução de (S_λ).

De fato, observe inicialmente que $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega$, assim, $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Temos também, pelo Princípio do Máximo, que $\widetilde{\phi} \geq 0$, consequentemente,

$$\psi = \phi - \widetilde{\phi} \leq \phi < 1. \tag{1.6}$$

Além disso,

$$\begin{cases} -\Delta\psi = -\Delta\phi = \dfrac{\lambda f}{(1-\phi)^2} \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \psi > 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.7}$$

e, novamente pelo Princípio do Máximo, obtemos

$$0 \leq \psi. \tag{1.8}$$

Pela monotonicidade da função $\dfrac{1}{(1-s)^2}$ em $[0,1)$ segue de (1.6) que

$$-\Delta\psi = -\Delta\phi \geq \frac{\lambda f}{(1-\phi)^2} > \frac{\lambda f}{(1-\psi)^2}.$$

Donde concluímos que ψ é supersolução de (S_λ) satisfazendo $0 \leq \psi < 1$.

Demonstração da Afirmação 1: De fato, λ deve ser escolhido de tal forma que possamos garantir

$$\mu_\Gamma A\psi_\Gamma = \Delta\psi \geq \frac{\lambda f}{(1-\psi)^2} = \frac{\lambda f}{(1-A\psi_\Gamma)^2} \quad \text{em } \Omega,$$

ou equivalentemente,

$$\mu_\Gamma g(A\psi_\Gamma) = \mu_\Gamma A\psi_\Gamma(1-A\psi_\Gamma)^2 \geq \lambda f \quad \text{em } \Omega \tag{1.9}$$

onde $g(s) = s(1-s)^2$. Como $\inf\{g(s); s \in [As_1, A] \subset (0,1)\} > 0$, onde

$$s_1 := \inf_{x\in\Omega} \psi_\Gamma > 0,$$

podemos escolher $\lambda > 0$ suficientemente pequeno de sorte que (1.9) ocorra:

$$\mu_\Gamma g(A\psi_\Gamma) \geq \mu_\Gamma \inf_{x\in\Omega} g(A\psi_\Gamma(x)) > \lambda \sup_{x\in\Omega} f(x) \geq \lambda f \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

■

Concluímos então, como havíamos proposto, que (S_λ) possui solução sempre que $0 < \lambda \leq \mu_\Gamma \inf_{x\in\Omega} g(A\psi_\Gamma(x)) \left(\sup_{x\in\Omega} f(x)\right)^{-1}$ para quaisquer $A \in (0,1)$ e Γ domínio de $\mathbb{R}^N$ com $\overline{\Omega} \subset \Gamma$. Ou seja, Λ é não degenerado.

Note que o raciocínio acima nos leva à seguinte estimativa para λ^*:

$$\lambda^* \geq \sup\left\{\beta(A,\Gamma); A \in (0,1), \Gamma \text{ domínio de } \mathbb{R}^N \text{ com } \Gamma \supset \overline{\Omega}\right\}\left(\sup_{x\in\Omega} f(x)\right)^{-1}$$

onde $\beta(A,\Gamma) = \mu_\Gamma \inf_{x\in\Omega} g(A\psi_\Gamma(x))$.

Mostremos agora que

$$\nu_\Omega = \sup\left\{\beta(A,\Gamma); A \in (0,1), \Gamma \text{ domínio de } \mathbb{R}^N \text{ com } \Gamma \supset \overline{\Omega}\right\}.$$

De fato, uma vez que $g'' \geq 0$ em $[s_1, 1]$ temos que g assume seu ínfimo na fronteira de $[s_1, 1]$, ou seja,

$$\inf_{s\in[s_1,1]} g(As) = \min\{g(As_1), g(A)\}.$$

Aqui, $g(As_1) \leq g(A)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} &As_1(1-As_1)^2 - A(1-A)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow &A^3(s_1^3-1) - 2A^2(s_1^2-1) + A(s_1-1) \leq 0, \end{aligned}$$

e dividindo por $A(s_1-1)$,

$$\begin{aligned} A^2(s_1^2+s_1+1) - 2A(s_1+1) + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow A \leq A_- \text{ ou } A \geq A_+ \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{2(s_1+1) + \sqrt{4(s_1+1)^2 - 4(s_1^2+s_1+1)}}{2(s_1^2+s_1+1)} \\ &= \frac{s_1+\sqrt{s_1}+1}{s_1^2+s_1+1} = \frac{1}{s_1+1-\sqrt{s_1}} > 1 \\ \text{e } A_- &= \frac{1}{s_1+1+\sqrt{s_1}} < 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$G(A) = \inf_{s\in[s_1,1]} g(As) = \begin{cases} g(As_1) & \text{se} \quad 0 \leq A \leq A_- \\ g(A) & \text{se} \quad A_- \leq A \leq 1 \end{cases}.$$

Donde temos que

$$\frac{dG}{dA}(A) = \begin{cases} g'(As_1)s_1 & \text{se} \quad 0 \leq A \leq A_- \\ g'(A) & \text{se} \quad A_- \leq A \leq 1 \end{cases}.$$

Observe que $g'(As_1)s_1 = 3A^2s_1^3 - 4As_1^2 + s_1 \geq 0$ se, e somente se $A \leq 1/3s_1$ ou $A \geq 1/s_1$. Se $A \leq A_-$ então

$$A \leq \frac{1}{s_1 + 1 + \sqrt{s_1}} \leq \frac{1}{3s_1}$$

e neste caso $g'(As_1)s_1 \geq 0$. Note também que $g(A) = 3A^2 - 4A + 1 \leq 0$ apenas quando tivermos $\frac{1}{3} \leq A \leq 1$. Ora, se $1 \geq A \geq A_-$ então $1 \geq A \geq \frac{1}{s_1 + 1 + \sqrt{s_1}} \geq \frac{1}{3}$.

Resumindo:

$$\frac{dG}{dA}(A) = \begin{cases} g'(As_1)s_1 \geq 0 & \text{se} \quad 0 \leq A \leq A_- \\ g'(A) \leq 0 & \text{se} \quad A_- \leq A \leq 1 \end{cases}.$$

Portanto, o máximo de G é atingido em $A = A_-$. Consequentemente,

$$\sup_{0<A<1} \inf_{s\in[s_1,1]} g(As) = \sup_{0<A<1} G(A) = G(A_-) = g(A_-) = H(s_1) = H(\inf_{\Gamma} \psi_\Gamma),$$

donde segue o lado esquerdo de (1.4).

■

1.2 Soluções Minimais

Estudaremos agora o ramo das **soluções mínimas** u_0, isto é, aquelas que estão por baixo de qualquer outra solução:

Definição 5 (Solução Minimal) *Dada u_0 solução clássica de (S_λ), Dizemos que u_0 é minimal quando dada qualquer outra solução clássica u tivermos $u_0 \leq u$.*

Mostraremos resultados de existência e unicidade de tais soluções, além de resultados de monotonicidade com respeito a λ, f, e Ω.

Teorema 6 *Para cada $\lambda < \lambda^*$ existe uma única solução minimal positiva u_0 de (S_λ), a qual é obtida como limite da sequencia (v_n) dada, recursivamente, como segue: $v_0 \equiv 0$ em Ω e, para cada $n \geq 1$,*

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \dfrac{\lambda f(x)}{(1 - v_{n-1})^2} & em \quad \Omega \\ 0 \leq v_n < 1 & em \quad \Omega \\ v_n = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{$V_{n,\lambda}$}$$

Prova. Vejamos primeiramente que a sequência (v_n) está bem definida. Se $v_n \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, podemos garantir pelo Teorema 24 (veja também o Lema 30.1) que existe $v_{n+1} \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $(V_{n+1,\lambda})$ e, como esta afirmação é válida para $n = 0$, sua verificação é possível para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução.

Temos também que (v_n) é monótona. De fato, pelo Princípio do Máximo, $v_1 \geq 0 = v_0$ e, supondo que $v_n \geq v_{n-1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta(v_{n+1} - v_n) = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_n)^2} - \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_{n-1})^2} \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ v_{n+1} - v_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.10}$$

Portanto, do Princípio do Máximo, por indução, segue que (v_n) é monótona crescente.

De modo análogo, dada u, solução de (S_λ) verifica-se, indutivamente, que $u \geq v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, visto que $u \geq v_0 \equiv 0$ e, se $u \geq v_{n-1}$ então

$$\begin{cases} -\Delta(u - v_n) = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} - \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_{n-1})^2} \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u - v_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.11}$$

Desde que v_n é monótona não decrescente e limitada superiormente (por u), podemos então definir para cada $x \in \overline{\Omega}$

$$u_0(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x).$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona existe $u_\lambda \in L^2(\Omega)$ tal que $v_n \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$.

Cada v_n é solução fraca de $(V_{n,\lambda})$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \phi = \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-v_{n-1})^2}\phi \tag{1.12}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\phi = v_n$ temos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \leq C \int_\Omega v_n \leq C|\Omega| < \infty$$

visto que $v_n \leq u \leq \|u\|_\infty < 1$. Como $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$ é limitada, temos que (v_n) converge fracamente, a menos de subsequência, para uma função v em $H_0^1(\Omega)$. Daí, (v_n) converge fracamente para v em $L^2(\Omega)$ e, pela unicidade do limite fraco, devemos ter $v = u_0$.

Temos também que u_0 é solução fraca de (S_λ). De fato, fazendo $n \to \infty$ em (1.12) (perceba que os dois lados da identidade (1.12) definem funções contínuas em $H_0^1(\Omega)$ para cada ϕ) temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-u)^2}\phi dx$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Como $0 \leq u_0 \leq u < 1$, temos que u_0 é solução clássica de (S_λ) (ver (A.5)). E, como $u_0 \leq u$ para toda u solução de (S_λ), segue que u_0 é solução minimal e é única. ∎

Proposição 1 *Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$, então, $\lambda^*(\Omega_1) \geq \lambda^*(\Omega_2)$ e as soluções minimais correspondentes satisfazem $u_0(\Omega_1, x) \leq u_0(\Omega_2, x)$ em Ω_1 para todo $0 < \lambda < \lambda^*(\Omega_2)$.*

Prova. Para cada $i \in \{1, 2\}$ considere $v_n(x, \Omega_i)$ dada por $(V_{n,\lambda})$ para $\Omega = \Omega_i$. Uma vez que

$$\begin{cases} -\Delta(v_1(x,\Omega_2) - v_1(x,\Omega_1)) = 0 & \text{em } \Omega \\ \quad v_1(x,\Omega_2) - v_1(x,\Omega_1) = v_1(x,\Omega_2) \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

aplicando o Princípio do Máximo concluímos que $v_1(x, \Omega_2) - v_1(x, \Omega_1)$ atinge o mínimo em $\partial\Omega_1$. Como $v_1(x, \Omega_2) - v_1(x, \Omega_1)$ é não-negativa em $\partial\Omega$, temos que

$$v_1(x,\Omega_2) \geq v_1(x,\Omega_1) \quad \text{em } \Omega_1.$$

Supondo que $v_{k-1}(x, \Omega_2) \geq v_{k-1}(x, \Omega_1)$ temos que

$$\begin{cases} -\Delta(v_k(x,\Omega_2) - v_k(x,\Omega_1)) = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_{k-1}(x,\Omega_2))^2} \geq & \text{em } \Omega \\ \quad v_k(x,\Omega_2) - v_k(x,\Omega_1) = v_k(x,\Omega_2) \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e, novamente pelo Princípio do Máximo, concluímos que

$$v_k(x,\Omega_2) - v_k(x,\Omega_1) \quad \text{em } \Omega_1 \geq 0.$$

Logo

$$v_k(x,\Omega_2) \geq v_k(x,\Omega_1) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (1.13) concluímos que

$$u_0(x,\Omega_2) \geq u_0(x,\Omega_1). \tag{1.14}$$

Finalmente, de (1.14) temos que $u_0(x, \Omega_2)$ é supersolução de $(S_\lambda(\Omega_1))$ e, pelo Método de Sub- e Supersolução (Seção (A.4)), segue que $(S_\lambda(\Omega_1))$ possui solução para todo $0 \leq \lambda \leq \lambda^*(\Omega_2)$. Portanto,

$$\lambda^*(\Omega_2) \leq \lambda^*(\Omega_1).$$

∎

Proposição 2 *Dados f_1, f_2 satisfazendo* (1.2) *com $f_1 \leq f_2$. Então,*

$$\lambda^*(f_1, \Omega) \geq \lambda^*(f_2, \Omega)$$

e, para $0 \leq \lambda \leq \lambda^*(\Omega, f_2)$ temos

$$u_0(\cdot, \lambda, f_1) \leq u_0(\cdot, \lambda, f_2).$$

Mais ainda, se $f_1 \neq f_2$ então $u_0(\cdot, f_1) < u_0(\cdot, f_2)$ em Ω.

Prova. Dados $\lambda \in [0, \lambda^*(f_2)]$ e, $u_0(\cdot, f_2)$ a solução minimal correspondente, como

$$-\Delta u_0(\cdot, f_2) = \frac{\lambda f_2(x)}{(1 - u_0(\cdot, f_2))^2} \geq \frac{\lambda f_1(x)}{(1 - u_0(\cdot, f_2))^2} \quad \text{em } \Omega,$$

temos que $u_0(\cdot, f_2)$ é supersolução de $(S_\lambda(f_1))$ Assim, $(S_\lambda(f_1))$ admite solução u satisfazendo

$$0 \leq u_0(\cdot, f_1) \leq u \leq u_0(\cdot, f_2)$$

onde $u_0(\cdot, f_1)$ é a solução minimal de $(S_\lambda(f_1))$. Disto também decorre que $\lambda^*(f_1) \geq \lambda^*(f_2)$.

Suponha agora que $f_1 < f_2$ em Ω, dessa forma temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(u_0(x, f_1) - u_0(x, f_2))\phi dx &= \int_\Omega \left(\frac{f_1}{(1 - u_0(x, f_1))^2} - \frac{f_2}{(1 - u_0(x, f_2))^2} \right) \phi dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{f_1 - f_2}{(1 - u_0(x, f_1))^2} \phi dx < 0.\end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo, segue que $u_0(x, f_1) < u_0(x, f_2)$ para todo $x \in \Omega$. ∎

Proposição 3 *A função $\lambda \mapsto u_0(\cdot, \lambda)$ que a cada $\lambda \in \Lambda$ associa a solução minimal correspondente $u_0(\cdot, \lambda)$ é não decrescente.*

Prova. Dados $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda^*$, considere $f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f$. Observe que $u_0(\cdot, \lambda)$ é a solução minimal de (S_{λ_2, f_1}). Sendo $f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f \leq f$ temos, da Proposição (2) que $\lambda^*(f) \leq \lambda^*(f_1)$ e $u_0(\cdot, \lambda_1) \leq u_0(\lambda_2, \cdot)$. ∎

Mostraremos mais adiante (Teorema (9)) que a função $\lambda \mapsto u_0(\cdot, \lambda)$ é de fato estritamente crescente e diferenciável.

1.3 Voltagem Crítica para Soluções Fracas

Seja

$$\lambda_* = \sup \{ \lambda > 0 : \ (S_\lambda) \text{ possui ao menos uma solução fraca } \},$$

é imediato que $\lambda_* \geq \lambda^*$. Veremos que, de fato, $\lambda_* = \lambda^*$, consequentemente não há solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ de (S_λ) para $\lambda > \lambda^*$.

Proposição 4 *Se* $w \in H_0^1(\Omega)$ *é supersolução fraca de* (S_λ)*, então, existe uma solução clássica* w_ε *de* $(S_{\lambda(1-\varepsilon)})$*. Portanto*

$$\lambda^* = \lambda_*.$$

Prova. Tome $\psi \in C^2([0,1])$ com $\psi(0) = 0$. Pelo Teorema (9) temos que $\psi(w) \in H_0^1(\Omega)$. Suponha também que ψ seja crescente e côncava, o que acarreta:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\psi(w)\nabla\phi = \int_\Omega \dot{\psi}(w)\nabla w\nabla\phi = \int_\Omega \nabla w\nabla(\dot{\psi}(w)\phi) - \int_\Omega \ddot{\psi}(w)\phi|\nabla w|^2 \\ \geq \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-w)^2}\dot{\psi}(w)\phi,\end{aligned} \tag{1.15}$$

para toda $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ (observe que não podemos garantir a integrabilidade de todos os termos envolvendo ϕ para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$). Sendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso em $H_0^1(\Omega)$, usando o Lema de Fatou concluímos que

$$\int_\Omega \nabla\psi(w)\nabla\phi \geq \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-w)^2}\dot{\psi}(w)\phi \quad \text{para toda } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

Fixado $\varepsilon \in (0,1)$, considere $\psi_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_\varepsilon(t) = 1 - (\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-t)^3)^{\frac{1}{3}}.$$

Tal função é diferenciável em $[0,1]$ pois é racional,

$$\dot{\psi}_\varepsilon(t) = (1-\varepsilon)((\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-t)^3)^{-2/3})(1-t)^2 = (1-\varepsilon)\frac{g(t)}{g(\psi_\varepsilon(t))}, \tag{1.17}$$

onde $g(s) := (1-s)^2$ e, $g(\psi_\varepsilon(t)) \neq 0$ visto que $\psi_\varepsilon(t) \leq 1 - \varepsilon^{1/3} < 1$ para $t \in [0,1]$. Note que $\dot{\psi}_\varepsilon \geq 0$, portanto ψ_ε é crescente e, $\psi(0) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\ddot{\psi}_\varepsilon(t) &= 2\dot{\psi}_\varepsilon(t)(1-\psi_\varepsilon(t))^{-3}(1-t)^2 - 2(1-\psi_\varepsilon(t))^{-2}(1-t) > 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{\psi}_\varepsilon(t)(1-\psi_\varepsilon(t))^{-3}(1-t)^2 > (1-\psi_\varepsilon(t))^{-2}(1-t) \\ &\Leftrightarrow \dot{\psi}_\varepsilon(t)(1-\psi_\varepsilon(t))^{-1}(1-t) > 1 \\ &\Leftrightarrow (1-\varepsilon)(1-\psi_\varepsilon(t))^{-3}(1-t)^3 > 1 \\ &\Leftrightarrow (1-\varepsilon)(\varepsilon + (1-\varepsilon)(1-t)^3)^{-1}(1-t)^3 > 1 \\ &\Leftrightarrow (1-\varepsilon)(1-t)^3 > \varepsilon + (1-\varepsilon)(1-t)^3 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon < 0.\end{aligned}$$

Contradição! Portanto, $\ddot{\psi}_\varepsilon(t) \leq 0$, isto é, ψ_ε é côncava para todo $\varepsilon \in (0,1)$.

Podemos então aplicar (1.17) e (1.15) obtendo

$$\int_\Omega \nabla\psi_\varepsilon(w)\nabla\phi \geq \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-w)^2}\dot{\psi}_\varepsilon(w)\phi$$
$$= \lambda(1-\varepsilon)\int_\Omega f(x)g(\psi_\varepsilon(w))\phi = \int_\Omega \frac{\lambda(1-\varepsilon)f}{(1-\psi_\varepsilon(w))^2}\phi.$$

Dessa forma, temos que $\psi_\varepsilon(w) \in H_0^1(\Omega)$ é uma supersolução fraca de $(S_{\lambda(1-\varepsilon)})$ com $0 \leq \psi_\varepsilon(w) \leq 1-\varepsilon^{1/3} < 1$. Como 0 é uma subsolução para todo $\lambda > 0$ temos, pelo Método de Sub- e Supersolução (veja seção (A.4)), que $(S_{\lambda(1-\varepsilon)})$ admite solução fraca $w_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ com $0 \leq w_\varepsilon \leq 1-\varepsilon^{1/3} < 1$. Podemos então concluir (seção (A.5)) que w_ε é de fato uma solução clássica.

■

1.4 Estimativas inferiores para λ^*

Nesta seção trazemos uma estimativa inferior para λ^* computacionalmente mais acessível do que aquela obtida em (1.4). Começaremos comparando $\lambda^*(\Omega, f)$ com $\lambda^*(B_R, f^*)$ onde $B_R \subset \mathbb{R}^N$ é a bola de raio R centrada na origem que tem o mesmo volume de Ω e f^* é uma simetrização apropriada de f. Mais especificamente, mostraremos que

$$\lambda^*(\Omega, f) \geq \lambda^*(B_R, f^*)$$

Este fato se verifica para problemas não lineares com não linearidade regular, como poder ser visto em [3] Teorema 4.10. A mesma demonstração pode ser adotada para cobrir o caso de não linearidade singular que aparece no problema que estamos estudando.

Para começar introduziremos algumas definições.

Definição 7 *Para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, definimos $A^* = B_R$ onde R é escolhido de forma que $|A| = |B_R|$. Para $h : A \to \mathbb{R}$, definimos $A(\mu) = \{x \in A : \mu \leq h(x)\}$ e $h^* : A^* \to \mathbb{R}$ a **simetrização de Schwarz** de h fazendo*

$$h^*(x) = \sup\{\mu : x \in A(\mu)^*\}.$$

A simetrização de Schwarz é um rearranjo radialmente simétrico e não crescente de funções. Para verificar que h^* é radial, basta tomar $x, y \in A$ com $\|x\| = \|y\|$ e perceber que $x \in A(\mu)^* \Leftrightarrow y \in A(\mu)^*$. Assim, $\sup\{\mu : x \in A(\mu)^*\} = \sup\{\mu : y \in A(\mu)^*\}$, ou seja $h^*(x) = h^*(y)$. Portanto h^* é radial. Se $\|x\| \leq \|y\|$ e $y \in A(\mu)^*$ então $x \in A(\mu)^*$ daí $\{\mu : x \in A(\mu)^*\} \subset \{\mu : y \in A(\mu)^*\} \Rightarrow \sup\{\mu : x \in A(\mu)^*\} \leq \sup\{\mu : y \in A(\mu)^*\} \Leftrightarrow h^*(x) \leq h^*(y)$, ou seja, h^* é radialmente não crescente. Note também que h^* assume todos os valores da imagem de h. Outra propriedade importante da simetrização é a seguinte:

Lema 7.1 *Dadas h, g funções contínuas sobre Ω, tem-se:*

$$\int_\Omega hg \leq \int_{B_R} h^* g^*.$$

A demonstração deste Lema pode ser encontrada em [3] (Lema 2.4) e em [13] (Teorema 1.2.2 p. 11).

Provemos agora o Lema proposto no início desta seção.

Lema 7.2 *Dados Ω domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e f sobre Ω com $0 \leq f \leq 1$, temos*

$$\lambda^*(\Omega, f) \geq \lambda^*(B_R, f^*)$$

onde $R > 0$ é escolhido de forma que se tenha $|B_R| = |\Omega|$ e f^* é a simetrização de Schwarz de f.

Prova. é suficiente mostrarmos que dado $\lambda \in (0, \lambda^*(B_R, f^*))$, o problema (S_λ) possui solução. Considere as sequências minimais (v_n) de (S_λ) e, $(\overline{v}_n)$ de

$$\begin{cases} -\Delta w = \dfrac{\lambda f^*}{(1-w)^2} & \text{em} \quad B_R \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases} \tag{1.18}$$

definidas no Teorema (6). Mais precisamente tomamos $v_0 = 0$ e $v_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ como sendo a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_{n-1})^2} & \text{em} \quad \Omega \\ v_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.19}$$

e, $\overline{v}_0 = 0$ e $\overline{v}_n \in C^{2,\alpha}(\overline{B_R})$ como sendo a solução de

$$\begin{cases} -\Delta \overline{v}_n = \dfrac{\lambda f^*(x)}{(1-\overline{v}_{n-1})^2} & \text{em} \quad B_R \\ v_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases}. \tag{1.20}$$

Usando o raciocínio análogo ao da demonstração do referido Teorema, concluímos que $v_n \leq C < 1$ para todo n, donde podemos garantir que $u_0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ é solução clássica (minimal) de (S_λ).

Como f^* é radial temos que $\overline{v}_1$ também o é e, se $\overline{v}_n$ é radial então $\overline{v}_{n+1}$ também é radial portanto $\overline{v}_n$ é radial para todo n. Além disso, pela construção do Teorema (6) temos que $0 \leq \overline{v}_n \leq w_0 < 1$ para todo n, onde w_0 é a solução minimal de $(S_\lambda(B_R, f^*))$.

Dado $0 < r < R$, integrando (1.20) sobre B_r obtemos

$$-\int_{B_r} \Delta\overline{v}_n dx = \int_{B_r} \frac{\lambda f^*}{(1-\overline{v}_{n-1})^2} dx \tag{1.21}$$

que em coordenadas polares fica

$$-\omega_N \int_0^r s^{N-1}\left(\frac{d^2}{dr^2}\overline{v}_n + \frac{N-1}{s}\frac{d}{dr}\overline{v}_n\right) ds = \lambda\omega_N \int_0^r \frac{s^{N-1} f^*}{(1-\overline{v}_{n-1})^2} ds. \tag{1.22}$$

Integrando o lado esquerdo de (1.22) por partes obtemos

$$-r^{N-1}\frac{d\overline{v}_n}{dr} = \lambda \int_0^r \frac{s^{N-1} f^*}{(1-\overline{v}_{n-1})^2} ds$$

e, finalmente,

$$\frac{d\overline{v}_n}{dr} + \frac{\lambda}{r^{N-1}} \int_0^r \frac{s^{N-1} f^*}{(1-\overline{v}_{n-1})^2} ds = 0 \quad \text{em } (0,R). \tag{1.23}$$

Seja v_n^* a simetrização de Schwarz de v_n, mostraremos que $0 \leq v_n^* \leq w_0 < 1$ em B_R para todo n. Com efeito, de modo análogo ao que foi feito no parágrafo anterior e, aplicando o lema (7.1) temos que

$$\frac{dv_n^*}{dr} + \frac{\lambda}{r^{N-1}} \int_0^r \frac{f^*}{(1-v_{n-1}^*)^2} ds \geq 0 \quad \text{em } (0,R). \tag{1.24}$$

Sendo $v_0^* = \overline{v}_0 = 0$ em $(0,R)$, temos de (1.24) e (1.23) que $dv_1^*/dr \geq d\overline{v}_1/dr$ e, por integração:

$$v_1^*(r) = v_1^*(r) - v_1^*(R) \leq \overline{v}_1(r) - \overline{v}_1(R) = \overline{v}_1(r)$$

para todo $r \in [0,R]$. Suponhamos agora que para algum $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$v_{n-1}^*(r) \leq \overline{v}_{n-1}(r), \quad r \in (0,R).$$

De (1.24) e (1.23) segue que $dv_n^*/dr \geq d\overline{v}_n/dr$ e, por integração, $v_n^*(r) \leq \overline{v}_n(r)$ para todo $r \in [0,R]$. Portanto, por indução temos que

$$v_n^*(r) \leq \overline{v}_n(r), \quad r \in (0,R), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, uma vez que $\max_\Omega v_n = \max_{B_R} v_n^*$, a sequência minimal (v_n) é limitada em Ω por $\max_{B_R} \overline{v}_0(x) < 1$. Concluímos portanto esta demonstração através do raciocínio descrito inicialmente. ∎

Iremos então estimar a voltagem máxima para bolas. Mostraremos que as funções da forma $w(x) = a(1 - (\frac{|x|}{R})^k)$ são supersoluções de (S_{λ,f^*}) para a, k e λ

apropriados e maximizaremos o intervalo que contém tais valores de λ com respeito a a e r obtendo assim, outras estimativas para λ^*.

Devemos ter $0 \leq w \leq 1$, donde faz-se necessário, primeiramente, exigir $k > 0$ e $0 < a \leq 1$. Devemos ter também $w \in H_0^1(B_R)$, que irá verificar-se desde que tenhamos $\|w\|_2 < \infty$ e $\|\nabla w\|_2 < \infty$. Como

$$\begin{aligned}\int_{B_R} w^2 &= \int_{B_R} 1 - 2\left(\frac{|x|}{R}\right)^k + \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2k} dx \\ &= R^{N-2}\omega_N \int_0^1 1 - t^k + t^{2k} dt \\ &= R^{N-2}\omega_N \left(t - \frac{t^{k+1}}{k+1} + \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^1 \right),\end{aligned}$$

teremos $w \in L^2(B_R)$ quando $k \geq -1/2$.E, uma vez que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla w|^2 &= \int_{B_R} \frac{k^2}{R^2}\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2k-2} dx \\ &= \omega_N R^{N-2} k^2 \int_0^1 t^{2k-2} dt,\end{aligned}$$

para termos $\int_{B_R} |\nabla w|^2 < \infty$, devemos exigir $k \geq 1/2$.

Por fim, nomeando $r := |x|$ e usando a forma polar do operador laplaciano temos que

$$-\Delta w = w_{rr} + \frac{(N-1)}{r} w_r = \left(\frac{k^2 + (N-2)k}{R^2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{k-2} \tag{1.25}$$

sobre $B_R \setminus \{0\}$.

Lema 7.3 *Vale a seguinte estimativa para λ^*:*

$$\lambda^* \geq \frac{8N}{27 \sup_\Omega f}\left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}. \tag{1.26}$$

Prova. Escolhendo R de forma que $|B_R| = |\Omega|$, ou seja, $R = \left(\frac{|\Omega|}{\omega_N}\right)^{\frac{1}{N}}$, temos que (1.26) é equivalente a

$$\lambda^* \geq \frac{8N}{27R^2 \sup_\Omega f}. \tag{1.27}$$

Fazendo $k = 2$ em (1.25) e lembrando que $\sup\limits_{B_R} f^* = \sup\limits_{\Omega} f$ temos que w satisfaz

$$
\begin{aligned}
-\Delta w = a\frac{2N}{R^2} &= a\frac{2N(1-a)^2}{R^2}\frac{1}{(1-a)^2} \\
&\geq \frac{2Na(1-a)^2}{R^2 \sup_\Omega f^*}\frac{f^*(x)}{\left(1-a\left(1-\left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right)\right)^2} \\
&= \frac{2Na(1-a)^2}{R^2 \sup_\Omega f}\frac{f^*(x)}{(1-w)^2}.
\end{aligned}
$$

Assim, w é uma supersolução de $(S_\lambda(B_R, f^*))$ para $\lambda \leq \dfrac{2Na(1-a)^2}{R^2 \sup_\Omega f}$. Aplicando o Método de Sub- e Supersolução temos que existe solução de $(S_\lambda(B_R, f^*))$ para tais valores de λ e, consequentemente

$$
\lambda^*(B_R, f^*) \geq \frac{2Na(1-a)^2}{R^2 \sup_\Omega f} \quad \text{para todo } a \in (0,1).
$$

Como o termo $a(1-a)^2$ atinge o valor máximo em $(0,1)$ para $a = 1/3$, temos que

$$
\lambda^*(B_R, f^*) \geq \frac{8N}{27R^2 \sup\limits_\Omega f}.
$$

O resultado segue utilizando-se o Lema (7.2). ■

Lema 7.4 *Se $N \geq 2$, vale a seguinte estimativa para λ^*:*

$$
\lambda^* \geq \frac{2(3N-4)}{9 \sup_\Omega f \left(\dfrac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}}. \tag{1.28}
$$

Prova. Voltando para (1.25) e fazendo $a = 1$, vemos que a condição

$$
\begin{aligned}
-\Delta w &\geq \left(\frac{k^2 + (N-2)k}{R^2}\right)\frac{1}{\sup\limits_\Omega f^*}\frac{f^*}{(1-w)^2} \\
&= \left(\frac{k^2 + (N-2)k}{R^2}\right)\frac{1}{\sup\limits_\Omega f}f^*\left(\frac{r}{R}\right)^{-2k},
\end{aligned}
$$

para $x \in B_R \setminus \{0\}$, será satisfeita para toda f se

$$
\left(\frac{r}{R}\right)^{k-2} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^{-2k} \quad \forall x \in B_R \setminus \{0\},
$$

ou seja, quando $k \leq 2/3$.

Para finalizar observamos que o termo $k^2 + (N-2)k$ atinge seu valor máximo em $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ quando $k = \frac{2}{3}$ e, para tal valor de k a função w é supersolução de $(S_\lambda(f^*))$ sempre que

$$0 \leq \lambda \leq \frac{2(3N-4)}{9 \sup_\Omega f}.$$

E o resultado segue. ■

1.5 Estimativas superiores para λ^*

Caso f não se anule, podemos exibir estimativas para λ^* que melhoram aquelas obtida em (1.4). Nas considerações seguintes ϕ_Ω representa autofunção positiva de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ associada ao primeiro autovalor μ_Ω e normalizada com $\|\phi_\Omega\|_1 = 1$.

Proposição 5

1. *Se f satisfaz $0 < \inf_\Omega f \leq f(x) \leq 1$ em Ω então*

$$\lambda^* \leq \overline{\lambda}_1 := \frac{4\mu_\Omega}{27 \inf_\Omega f}.$$

2. *Se f satisfaz $0 \leq f \leq 1$ em Ω e $f > 0$ em um conjunto de medida positiva então*

$$\lambda^* < \overline{\lambda}_2 := \frac{\mu_\Omega}{3}\left(\int_\Omega f\phi_\Omega\right)^{-1}.$$

Prova. Multiplicando (S_λ) por ϕ_Ω, e integrando sobre Ω, obtemos

$$\mu_\Omega \int_\Omega u\phi_\Omega dx = \lambda \int_\Omega \frac{f\phi_\Omega}{(1-u)^2} dx.$$

Observe que $u(1-u)^2$ atinge o valor máximo $4/27$ em $u \in [0,1]$ assim,

$$\mu_\Omega \int_\Omega u\phi_\Omega dx \geq \inf_\Omega f \lambda \int_\Omega \frac{\phi_\Omega}{(1-u)^2} \geq \inf_\Omega f \lambda \frac{27}{4} \int_\Omega u\phi_\Omega dx.$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{4\mu_\Omega}{27 \inf_\Omega f}$$

para λ arbitrário. Donde segue o item 1.

A fim de verificarmos o item 2, multipliquemos (S_λ) por $\phi_\Omega(1-u)^2$ e integremos sobre Ω obtendo

$$-\int_\Omega \phi_\Omega (1-u)^2 \Delta u dx = \int_\Omega \lambda f\phi_\Omega dx.$$

Usando o Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega \lambda f \phi_\Omega dx = -\int_{\partial\Omega}(1-u)^2\phi_\Omega \nabla u \nu dS + \int_\Omega \nabla u \nabla(\phi_\Omega(1-u)^2)dx \tag{1.29}$$

onde ν é a normal unitária exterior a $\partial\Omega$. Como $\phi_\Omega = 0$ sobre $\partial\Omega$, o primeiro termo do lado direito de (1.29) é nulo. Calculando o segundo termo obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda f \phi_\Omega dx &= \int_\Omega 2(1-u)\phi_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (1-u)^2 \nabla u \nabla \phi_\Omega dx \\ &\leq \int_\Omega (1-u)^2 \nabla u \nabla \phi_\Omega dx \\ &= -\int_\Omega \frac{1}{3}\nabla \phi_\Omega \nabla (1-u)^3 dx\end{aligned}$$

onde, novamente integrando por partes o termo do lado direito, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda f \phi_\Omega dx &\leq -\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}(1-u)^3 \nabla\phi_\Omega \cdot \nu dS + \frac{1}{3}\int_\Omega (1-u)^3 \Delta \phi_\Omega dx \\ &= -\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}(1-u)^3 \nabla\phi_\Omega \cdot \nu dS - \frac{\mu_\Omega}{3}\int_\Omega (1-u)^3 \phi_\Omega dx.\end{aligned} \tag{1.30}$$

O último termo do lado esquerdo de (1.30) é negativo. Além disso, como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}(1-u)^3\nabla\phi_\Omega \cdot \nu dS &= \int_{\partial\Omega} \nabla \phi_\Omega \cdot \nu dS \\ &= \int_\Omega \Delta\phi_\Omega dx \\ &= -\mu_\Omega \int_\Omega \phi_\Omega dx,\end{aligned} \tag{1.31}$$

onde as duas últimas igualdades seguem do Teorema da Divergência e da definição de μ_Ω respectivamente. Consequentemente

$$\int_\Omega \lambda f \phi_\Omega dx \leq \frac{\mu_\Omega}{3}\int_\Omega \phi_\Omega,$$

donde obtemos o item 2. ■

Observação 2 *Podemos melhorar estas estimativas para dimensões* $1 \leq N \leq 7$. *Mostraremos adiante (Teorema* (13)*) que neste caso existe uma constante* $C(N,\Omega,f) < 1$ *independente de* λ *tal que* $\|u\|_\infty \leq C(N,\Omega,f)$ *para toda solução minimal* u_λ. *Tomando então*

$$\alpha := (1 - C(N,\Omega,f))^3,$$

(note que $0 < \alpha < 1$) temos de (1.30) *e* (1.31) *que*

$$\int_\Omega \lambda f \phi_\Omega dx \leq \frac{\mu_\Omega(1-\alpha)}{3} \int_\Omega \phi_\Omega dx$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. Portanto

$$\lambda^* \leq \frac{\mu_\Omega(1-\alpha)}{3} \left(\int_\Omega \phi_\Omega dx \right) \left(\int_\Omega f \phi_\Omega dx \right)^{-1}.$$

1.6 Propriedades Espectrais das Soluções Minimais

Estudaremos agora o ramo das soluções minimais. Mostraremos resultados de diferenciabilidade, monotonicidade e compacidade destas soluções com respeito a λ. Estudaremos também a regularidade e estabilidade de tais soluções com ênfase na solução correspondente à voltagem crítica λ^*.

Nosso Problema pode ser reformulado da seguinte maneira: encontrar pares (λ, u) em $\mathbb{R} \times C$ onde

$$C = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ e } 0 \leq u \leq 1\}$$

que satisfaçam a quação

$$F(\lambda, u) = 0$$

onde

$$F(\lambda, u) = -\Delta u - \frac{\lambda f}{(1-u)^2}. \tag{1.32}$$

O conjunto C é um subespaço de $C^{2,\alpha}(\Omega)$ completo com relação à norma dada na Definição (23) no Apêndice (A.3).

Além disso, dado $0 < \delta < 1$ a função $F : \mathbb{R} \times C_\delta \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ dada por (1.32), onde $C_\delta = \{u \in C : u < \delta\}$ é contínua. O conjunto $\mathbb{R} \times C_\delta$ é aberto em $\mathbb{R} \times C$ e F é diferenciável nele com

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)\phi = -\Delta\phi - \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}\phi$$

onde $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)$, é contínua para todo $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C_\delta$.

Observação 3 *Como $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0) = -\Delta$, que é um operador invertível em C com inversa contínua, pelo Teorema da Função Implícita podemos garantir a existência de solução de (S_λ) para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.*

Observação 4 *Mais geralmente, se o par (λ, u) é tal que $F(\lambda, u) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)\phi \neq 0$ para todo $\phi \neq 0$, ou seja, $\ker \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u) = \{0\}$ temos que $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)$ é um difeomorfismo. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma única continuação de soluções para (S_λ) numa vizinhança de (λ, u).*

Escrevendo $L = L(u, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)$, considere $\mu_1 = \mu_1(\lambda, u)$ o menor autovalor de L, isto é, o menor μ correspondente ao problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \dfrac{2\lambda f(x)}{(1-u)^3}\phi = \mu\phi & \text{em } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em outras palavras,

$$\mu_1 = \mu_1(\lambda, u) := \inf_{\phi \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^2 - 2\lambda f(1-u)^{-3}\phi^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \phi^2 dx}.$$

Definição 8 *Dizemos que u, solução de (S_λ) é **estável** quando $\mu_1 > 0$ e **semiestável** quando $\mu_1 \geq 0$.*

Mostraremos agora, entre outras coisas, que soluções semiestáveis são necessariamente minimais.

Lema 8.1 *Dadas $u, v \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca e supersolução fraca, respectivamente de (S_λ). Temos,*

1. *Se $\mu_1(\lambda, u) \geq 0$, então $u \leq v$ q.t.p. em Ω.*
2. *Se u é regular ($u \in C^1(\Omega)$) e, se $\mu_1(\lambda, u) = 0$, então $u = v$ q.t.p. em Ω.*

Prova.
Dados $\theta \in [0, 1]$ e $0 \leq \phi \in H_0^1(\Omega)$, considere

$$I(\theta, \phi) := \int_\Omega \nabla(\theta u + (1-\theta)v)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{\lambda f}{(1-\theta u - (1-\theta)v)^2}\phi.$$

Devido às hipóteses a cerca de u e v,

$$I(\theta, \phi) \geq \lambda \int_\Omega f\left(\frac{\theta}{(1-u)^2} + \frac{1-\theta}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-\theta u - (1-\theta)v)^2}\right)\phi \geq 0.$$

Donde temos pela convexidade de $s \mapsto 1/(1-s)^2$ que

$$I(\theta, \phi) \geq 0.$$

Temos também que $I(\theta, \phi)$ é derivável com

$$\frac{\partial I}{\partial\theta}(\theta, \phi) = \int_\Omega \nabla(u-v)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-\theta u - (1-\theta)v)^3}(u-v)\phi \leq 0 \qquad (1.33)$$

para todo $0 \leq \phi \in H_0^1(\Omega)$. Como $I(1,\phi) = 0$, a derivada de I em $\theta = 1$ é não positiva, isto é

$$\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}(u-v)\phi \leq 0 \quad \forall 0 \leq \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.34}$$

Tomando $\phi = (u-v)^+$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla(u-v)^+|^2 - \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}((u-v)^+)^2 \leq 0. \tag{1.35}$$

Se fosse $\mu_1 > 0$ não haveria mais o que provar pois a única forma de (1.35) ocorrer é termos $(u-v)^+ = 0$ e, nesse caso, $u \leq v$ q.t.p. em Ω.

No caso geral ($\mu_1(u) \geq 0$), (1.35) ainda pode ocorrer desde que tenhamos

$$\int_\Omega |\nabla(u-v)^+|^2 - \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}((u-v)^+)^2 = 0, \tag{1.36}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla\hat{\phi} - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}(u-v)\hat{\phi} = 0 \tag{1.37}$$

onde $\hat{\phi} = (u-v)^+$. Note que (1.37) coincide com $I(1,\hat{\phi})$ e com $\dfrac{\partial I}{\partial\theta}(1,\hat{\phi})$, isto é,

$$\frac{\partial I}{\partial\theta}(1,\hat{\phi}) = I(1,\hat{\phi}) = 0.$$

Se tivéssemos $\dfrac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(1,\hat{\phi}) < 0$ isto acarretaria $\dfrac{\partial I}{\partial\theta}(\theta_0,\phi) < \dfrac{\partial I}{\partial\theta}(1,\phi) = 0$ para todo $1-\varepsilon < \theta_0 < 1$ com ε suficientemente pequeno. Consequentemente teríamos $I(\theta_0) < 0$ o que contradiz as considerações anteriores. Portanto $\dfrac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(1,\hat{\phi}) \geq 0$.

Ora,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(\theta,\phi) = -\int_\Omega \frac{6\lambda f}{(1-(\theta u + (1-\theta)v))^4}(u-v)^2\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(1,\hat{\phi}) = -\int_\Omega \frac{6\lambda f}{(1-u)^4}(u-v)^2\hat{\phi},$$

ou seja, $\dfrac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(1,\hat{\phi}) \leq 0$. Devemos ter então $\dfrac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(1,\hat{\phi}) = 0 \Rightarrow (u-v)^+ = 0$ q.t.p. em $\Omega \setminus \Omega_0$ onde $\Omega_0 = \{f = 0\}$. Juntando tal informação a (1.37), obtemos que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u-v)^+|^2 = 0$, donde concluímos que $u \leq v$ q.t.p. em Ω.

Provaremos agora (2). Para tanto faz se necessário o uso da seguinte informação:

Afirmação 8.1 *Se $u < v - t_0\phi_1$ sobre um conjunto A de medida positiva, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $u < v - t\phi_1$ q.t.p. em Ω para todo $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$.*

De fato, uma vez que $\mu_0 = 0$, temos que ϕ_1 está no núcleo de L assim, (1.34) é ainda válido quando substituímos $u - v$ por $u - v - t\phi_1$:

$$\int_\Omega \nabla(u - v - t\phi_1)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}(u - v - t\phi_1)\phi = 0 \quad \forall\phi H_0^1(\Omega).$$

Tomando $\phi = (u - v - t\phi_1)^+$, uma vez que estamos supondo $\mu_1 = 0$, como anteriormente, temos que

$$\int_\Omega |\nabla(u - v - t\phi_1)^+|^2 - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}((u - v - t\phi_1)^+)^2 = 0. \tag{1.38}$$

Da caracterização variacional de ϕ_1, devemos ter $(u - v - t\phi_1)^+ = \beta\phi_1$ q.t.p. em Ω para algum β. Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno podemos encontrar um conjunto $A' \subset\subset A$ de medida positiva de tal forma que $u < v - t_0\phi_1 - \delta$ em A'. Consequentemente existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $u < v - t\phi_1$ para todo $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Nestas condições, $(u - v - t\phi_1)^+ = 0$ em A', ou seja, $\beta\phi_1 = 0$ em A'. Como $\phi_1 > 0$ em Ω, devemos ter $\beta = 0$ portanto $u < v - t\phi_1$ q.t.p. em Ω para todo $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$ o que prova nossa afirmação.

Provada a Afirmação (8.1), retornemos à demonstação de (2). De (1) temos que $u \leq v$. Suponha por contradição que podemos encontrar um conjunto A de media positiva tal que $u < v$ em A. Aplicando a afirmação anterior com $t_0 = 0$, temos que existe $\varepsilon > 0$ para o qual $u < v - t\phi_1$ em Ω para todo $0 \leq t < \varepsilon$. Dessa forma $T = \{t > 0 : u < v - t\phi_1 \text{ q.t.p. em } \Omega\} \neq \emptyset$. Além disso T é limitado uma vez que $0 \leq u, v \leq 1$.

Tomemos então $\bar{t} = \sup T$ que é um número positivo bem definido para o qual $u \leq v - \bar{t}\phi_1$ q.t.p. em Ω. Se fosse $u < v - \bar{t}\phi_1$ em algum conjunto B de medida positiva, usando a Afirmação (8.1) contradiríamos a maximalidade de $\bar{t}$ assim, devemos ter $u = v - \bar{t}\phi_1$ q. t. p. em Ω.

Portanto

$$\int_\Omega \nabla(u - v - \bar{t}\phi_1)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}(u - v - \bar{t}\phi_1)\phi = 0 \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla(u - v)\nabla\phi - \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}(u - v)\phi = 0 \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $\phi = v - u$ chegamos a uma identidade análoga a (1.36) e, raciocinando como anteriormente obtemos finalmente $\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 = 0$. Mas isto contradiz a hipótese $u < v$ num conjunto de medida positiva! Portanto $u = v$ q.t.p. em Ω.

■

Teorema 9 *A função $\lambda \mapsto u_0(\lambda,\cdot)$ que a cada $\lambda \in (0,\lambda^*)$ associa $u_0(\lambda,\cdot)$ a solução minimal de (S_λ) é estritamente crescente e diferenciável em $(0,\lambda^*)$. Consequentemente, a função $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda) := \mu_1(\lambda, u_0(\lambda,\cdot))$ é decrescente em $(0,\lambda_*)$. Além disso $u_0(\lambda,\cdot)$ é estável.*

Prova.
Se $\lambda_0 \in \Lambda$ é tal que $\mu_1(\lambda_0) > 0$, pela Observação (4) existe uma continuação do ramo de soluções para além de λ_0. Mais explicitamente, existem vizinhanças U de λ_0 e V de u_{λ_0} e uma função $\lambda \mapsto \hat{u}_0(\lambda,\cdot)$ de U em V diferenciável, com $\hat{u}_0(\lambda_0,\cdot) = u_0(\lambda_0,\cdot)$, cujo par $(\lambda,\hat{u}_0(\lambda,\cdot))$ resolve (S_λ) e estas são as únicas soluções de (S_λ) em $U \times V$. Pela definição de solução minimal e pela Proposição (3) devemos ter $u_0(\lambda_0,\cdot) \le u_0(\lambda,\cdot) \le \hat{u}_0(\lambda,\cdot)$ para todo $\lambda_0 \le \lambda \in U$. Portanto $u_0(\lambda,\cdot) \in V$ para tais valores de λ, o que implica que $u_0(\lambda,\cdot) = \hat{u}_0(\lambda,\cdot)$, ou seja, existe uma continuação do ramo de soluções minimais para $\lambda > \lambda_0$.

Note que quando $\lambda = 0$, $\mu_1(\lambda) = \mu_\Omega$ onde μ_Ω é o primeiro autovalor positivo de $-\Delta$ em Ω. Assim,

$$\Lambda^* := \{\lambda \ge 0 : u_0(\lambda,\cdot) \text{ é uma solução estável de } (S_\lambda)\} \neq \emptyset$$

e, consequentemente $\lambda^{**} = \sup \Lambda^*$ está bem definido com $\lambda^{**} \le \lambda^*$.

Como $\mu_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in \Lambda^*$, pela maximalidade de λ^{**} devemos ter $\mu_1(\lambda^{**}) \ge 0$. Se fosse $\mu_1(\lambda^{**}) > 0$, pelas considerações feitas no início desta demonstração teríamos, para algum $\varepsilon > 0$, uma continuação do ramo de soluções minimais diferenciável em λ para $\lambda_{**} \le \lambda \le \lambda_{**} + \varepsilon$. Daí, pela caracterização variacional de $\mu_1(\lambda)$ a mesma seria contínua em λ neste intervalo. Assim, para algum $\underline{\varepsilon} > 0$, $\mu_1(\lambda) > 0$ sempre que $\lambda_{**} \le \lambda \le \lambda_{**} + \underline{\varepsilon}$, o que contradiz a maximalidade de λ_{**}. Portanto $\mu_1(\lambda^{**}) = 0$.

Se fosse $\lambda^{**} < \lambda^*$, como $u_0(\lambda,\cdot)$ é supersolução de $S(\lambda^{**})$ para todo $\lambda_{**} \le \lambda \le \lambda_*$, teríamos pelo Lema (8.1) $u_0(\lambda^{**},\cdot) = u_0(\lambda,\cdot)$ nesse intervalo, o que novamente contradiz a maximalidade de $\mu_{\lambda^{**}}$. Isto prova que $\lambda^{**} = \lambda^*$ e, portanto toda solução minimal é estável.

Dessa forma, o operador $L(\lambda, u_0(\lambda,\cdot))$ é invertível para todo $0 \le \lambda < \lambda^*$ e pelo Teorema da Função Implícita temos que $\lambda \mapsto u_0(\lambda,\cdot)$ é diferenciável. Pela Proposição (3) temos que $\dfrac{du_0(\lambda,\cdot)}{d\lambda} \ge 0$ sobre Ω. Se fosse $\dfrac{du_0(\lambda,\cdot)}{d\lambda} \equiv 0$, derivando (S_λ) com relação a λ obteríamos

$$-\Delta \frac{du_0(\lambda,\cdot)}{d\lambda} - \frac{2\lambda f}{(1-u_0(\lambda,\cdot))^3}\frac{du_0(\lambda,\cdot)}{d\lambda} = \frac{f}{(1-u_0(\lambda,\cdot))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{(1-u_0(\lambda,\cdot))^2} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

o que contradiz as hipóteses sobre f. Portanto $\lambda \mapsto u_0(\lambda,\cdot)$ é estritamente crescente.

Que $\lambda \mapsto \mu_1$ é decrescente segue da caracterização variacional de μ_1 e da monotonicidade de $(1-u)^3$ com relação a u. ■

Voltemos nossa atenção agora ao estudo da equação correspondente à voltagem crítica λ^*. Devido á monotonicidade do ramo de soluções minimais e de sua limitação uniforme em $H_0^1(\Omega)$, com um raciocínio análogo ao do final da demonstração do Teorema (6) temos que a função

$$u^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_0(\lambda, \cdot)$$

existe em $H_0^1(\Omega)$ e é solução de (S_{λ^*}) no sentido fraco.

Além disso, $\mu_1(\lambda^*) \geq 0$, ou seja, u^* é uma solução semiestável de $S(\lambda^*)$. Mostraremos a seguir que se $\|u\|_\infty = 1$, vale a recíproca.

Corolário 5.1 *Dada $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (S_λ) com $\|u\|_\infty = 1$, são equivalentes*

1. $\mu_1 \geq 0$, *isto é*
$$\int_\Omega |\nabla \phi|^2 \geq \int_\Omega \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}\phi^2 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

2. $\lambda = \lambda^*$ *e* $u = u^*$.

Prova.

Não podemos ter $\lambda > \lambda^*$. Como $\|u_0(\lambda, \cdot)\|_\infty < 1$ sempre que $\lambda \in (0, \lambda^*)$, devemos ter então $\lambda = \lambda^*$. Além disso, assumindo (1) e usando o Lema (8.1) temos que $u_0(\lambda, \cdot)$ é a única $H_0^1(\Omega)$-solução fraca de (S_{λ_*}), ou seja, $u_0(\lambda, \cdot) = u^*$. ■

1.7 Regularidade das Soluções Fracas

O primeiro resultado desta seção identifica cotas de energia com as quais conseguimos regularidade das soluções do seguinte problema mais geral:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \dfrac{f(x)}{(1-u)^2} \qquad \text{em} \quad \Omega \\ u &= \overline{u} \qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{1.39}$$

Aqui, por conveniência omitimos o λ exigindo, ainda, que f satisfaça (1.2), obviamente, com exceção da condição $f \leq 1$. Exigimos também $0 \leq \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\|\overline{u}\|_\infty < 1$. Estabelecemos, em concordância com a definição (1) que u é solução fraca de (1.39) se:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega \frac{f\phi}{(1-u)^2} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad u - \overline{u} \in H_0^1(\Omega) \tag{1.40}$$

convencionando-se que $\dfrac{f}{(1-u)^2} = 0$ quando $f = 0$

Teorema 10 *Seja $\Omega_0 = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, se u é solução fraca positiva de* (1.39) *satisfazendo:*

$$\left\| \frac{f}{(1-u)^3} \right\|_{L^1(\Omega)} \leq A \text{ no caso } N = 1 \tag{1.41}$$

ou

$$\left\| \frac{f}{(1-u)^3} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} \leq A \text{ no caso } N \geq 2 \tag{1.42}$$

Temos que:

1. *Se $\Omega \setminus \Omega_0$ é conexo então $u \leq 1$ q.t.p. em Ω;*

2. *Se $u \leq 1$ q.t.p. em Ω, então $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C = C(A, N, \overline{u}, \Omega, f)$ tal que*
$$0 < u \leq C < 1 \text{ em } \Omega.$$

Prova.

Provaremos o Teorema primeiramente para o caso $N = 1$. Neste caso temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{f}{(1-u)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \|f\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|f(1-u)^{-3}\|_{L^1(\Omega)} < \infty,$$

ou seja, $f(1-u)^{-2} \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. Donde, por Teoria de Regularidade (veja o Teorema (25)), segue que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e consequentemente (veja o Teorema (24)):

$$u \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{1.43}$$

Suponha, por contradição que existe $x_0 \in \Omega \setminus \Omega_0$ tal que $u(x_0) = 1$. Por (1.43) temos que

$$|1 - u(x)| \leq C|x_0 - x|$$

para alguma constante $C > 0$. Tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $B_\delta(x_0) \subset \Omega \setminus \Omega_0$. Temos que $\inf\limits_{B_\delta(x_0)} f > 0$ e

$$\left(\inf_{B_\delta(x_0)} f \right)^{-1} \int_{B_\delta(x_0)} \left| \frac{f}{(1-u)^3} \right| \geq \int_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{(1-u)^3} \geq \frac{1}{C} \int_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{(x-x_0)^3} = \infty,$$

o que contradiz (1.41). Concluímos, portanto, para este caso, que $u \neq 1$ em $\Omega \setminus \Omega_0$.

Daí, supondo $\Omega \setminus \Omega_0$ conexo, como $u \neq 1$ em $\Omega \setminus \Omega_0$ e $u = \overline{u} < 1$ em $\partial\Omega$, concluímos, pela continuidade de u, que $u < 1$ em $\Omega \setminus \Omega_0$. Assim, $u \leq 1$ em $\partial\Omega_0$, ou seja, $(1-u)^- = 0$ sobre $\partial\Omega_0$. Considerando $\phi = (1-u)^-\chi_{\Omega_0} \in H_0^1(\Omega)$ como função teste em (1.50), temos que

$$0 \leq \int_{\Omega_0} |\nabla(1-u)^-|^2 \leq \int_{\Omega_0} \nabla u \nabla(1-u)^- = \int_{\Omega_0} \frac{f(1-u)^-}{(1-u)^2} = 0.$$

Donde segue que, $(1-u)^- = 0$ q.t.p. em Ω_0 e, consequentemente, $u \leq 1$ q.t.p. em Ω.

A fim de provarmos (2) para o caso $N = 1$, considere $T_k u = min\{u, 1-k\}$, o truncamento de u no nível $1-k$ com $0 < k < 1$. Temos que $T_k u \leq 1-k < 1$, assim, $(1-T_k u)^{-1}$ está bem definida. Além disso,

$$\int_\Omega \frac{1}{(1-T_k u)^2} \leq \int_\Omega \frac{1}{k^2} < \infty$$

e

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{1}{1-T_k u}\right)\right|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla T_k u|^2}{(1-T_k u)^4} \leq \frac{1}{k^4}\int_\Omega |\nabla u|^2 < \infty,$$

ou seja, $(1-T_k u)^{-1} \in H^1(\Omega)$.

Tomando k suficientemente pequeno de sorte que $0 < \|\overline{u}\|_\infty \leq 1-k < 1$ temos que $T_k u = min\{u, 1-k\} = min\{\overline{u}, 1-k\} = \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$. Temos também que $(1-\overline{u})^{-1} \in H^1(\Omega)$ pois, $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, $\phi = (1-T_k u)^{-1} - (1-\overline{u})^{-1} \in H^1(\Omega)$ e, como $\phi \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ temos pelo Teorema (10) que $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Fazendo ϕ como função teste em (1.40), temos que:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla((1-T_k u)^{-1} - (1-\overline{u})^{-1}) = \int_\Omega \frac{f((1-T_k u)^{-1} - (1-\overline{u})^{-1})}{(1-u)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla T_k u}{(1-T_k u)^2} &= \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^2} + \int_\Omega \frac{f((1-T_k u)^{-1} - (1-\overline{u})^{-1})}{(1-u)^2} \\ &\leq \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^2} + \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3} - \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2(1-\overline{u})} < C \end{aligned} \tag{1.44}$$

onde C independe de k.

Uma vez que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k u|^2}{(1-T_k u)^2} \leq \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla T_k u}{(1-T_k u)^2}$$

temos que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k u|^2}{(1-T_k u)^2} < C$$

Assim,
$$\left|\nabla \log\left(\frac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)\right| = \left|\frac{\nabla T_k u}{1-T_k u} - \frac{\nabla \overline{u}}{1-\overline{u}}\right| \in L^2(\Omega).$$

Como $\log\left(\dfrac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right) \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\log\left(\dfrac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right) \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que, $\log\left(\dfrac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right) \in H_0^1(\Omega)$. Usando o fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ para $N = 1$, temos que

$$S\left\|\log\left(\frac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)\right\|_\infty^2 \leq \int_\Omega \left|\nabla \log\left(\frac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)\right|^2 \leq C\left(1 + \int_\Omega \frac{|\nabla T_k u|}{(1-T_k u)^2}\right) \leq C,$$

onde S é a constante de imersão e C independe de k. Tomando o limite quando $k \to 0$, concluímos que $\log\left(\dfrac{1-\overline{u}}{1-u}\right) \in L^\infty(\Omega)$ e, portanto, $u \leq C < 1$ com queríamos.

Provemos agora o Teorema para $N = 2$. De modo análogo ao que foi feito para $N = 1$, das hipóteses do Teorema, temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{f}{(1-u)^2}\right)^{\frac{3N}{4}} = \int_\Omega \left(\frac{f}{(1-u)^3}\right)^{\frac{N}{2}} f^{\frac{N}{4}} \leq \|f\|_\infty^{\frac{N}{4}} \|f(1-u)^{-3}\|_{L^{N/2}(\Omega)} < \infty,$$

ou seja, $f(1-u)^2 \in L^{\frac{3N}{4}}(\Omega)$, donde concluímos via Teoria de Regularidade que $u \in C^{0,\frac{2}{3}}(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$.

Suponha por contradição que $u(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \Omega \setminus \Omega_0$. A Hölder-continuidade de u implica que:

$$|1 - u(x)| = |u(x_0) - u(x)| \leq |x - x_0|^{\frac{2}{3}}.$$

Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\inf\limits_{B_\delta(x_0)} f > 0$, temos que

$$\left(\inf_{B_\delta(x_0)} f\right)^{-\frac{N}{2}} \int_{B_\delta(x_0)} \left|\frac{f}{(1-u)^3}\right|^{\frac{N}{2}} \geq \int_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{(1-u)^{\frac{3N}{2}}} \geq \frac{1}{C}\int_{B_\delta(x_0)} \frac{1}{(x-x_0)^N} = \infty,$$

o que contradiz (1.42). Logo $u = 1$ pode ocorrer apenas em Ω_0, e o resultado segue.

Provemos (2) para o caso $N = 2$. Usando a Desigualdade de Moser-Trudinger: existe $S > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{pv} \leq S \exp\left(\frac{p^2}{16\pi}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad p > 1; \tag{1.45}$$

para $v = \log\left(\dfrac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)$, temos:

$$\int_\Omega (1-T_k u)^{-p} \leq C\int_\Omega \left(\frac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)^p \leq CS\exp\left(\frac{p^2}{16\pi}\int_\Omega \left|\nabla \log\left(\frac{1-\overline{u}}{1-T_k u}\right)\right|^2\right) \leq C$$

onde C independe de k. Fazendo $k \to 0$, temos:

$$\|(1-u)^{-1}\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \quad \forall p > 1 \tag{1.46}$$

onde C_p depende apenas de $A, N, \overline{u}, \Omega$ e f. ■

Veja na Seção (A.5), Proposição (11) que se $u \in H_0^1(\Omega)$, solução de (S_λ) satisfaz a condição $0 \leq u \leq C < 1$ q.t.p. em Ω então u é solução clássica de (S_λ).

Definição 11 *Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca semi-estável de* (1.39) *se*

$$\int_\Omega \left(|\nabla\phi| - \frac{2f}{(1-u)^3}\phi^2\right)dx \geq 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.47}$$

Teorema 12 *Dada $u \in H^1(\Omega)$ solução fraca semi-estável de* (1.39), *para cada* $1 \leq p < 1 + \frac{4}{3} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ *existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$\|f(1-u)^3\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p.$$

Prova.

Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (1.39), vale

$$\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2} < \infty.$$

De fato, para $\phi = u - \overline{u}$ em (1.40), devemos ter

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \nabla(u-\overline{u}) &= \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}(u-\overline{u}) \\ &= \int_\Omega \left(\frac{f}{(1-u)^2}(1-\overline{u}) - \frac{f}{1-u}\right)\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}(1-\overline{u}) = \int_\Omega \nabla u\nabla(u-\overline{u}) + \int_\Omega \frac{f}{1-u}. \tag{1.49}$$

Lembrando que $\|\overline{u}\|_\infty < 1$, concordamos que existe $C > 0$ tal que

$$1 \leq C(1-\overline{u})$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2} \leq C \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}(1-\overline{u}).$$

que, junto com (1.49) e a desigualdade $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$, válida para $\varepsilon > 0$, nos dá

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2} &\leq C\left(\int_\Omega \nabla u \nabla(u-\overline{u}) + \int_\Omega \frac{f}{1-u}\right)\\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u-\overline{u}\|_{H^1(\Omega)}\right) + \varepsilon \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2} + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega f\right)\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{2C}$, temos que

$$\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2} \leq C'$$

para algum $C' > 0$ como queríamos.

Mostremos agora que

$$\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3} < \infty.$$

Tomando $\phi = u - \overline{u}$ em (1.47) obtemos

$$\int_\Omega \frac{2f}{(1-u)^3}(u-\overline{u})^2 \leq \int_\Omega |\nabla(u-\overline{u})|^2$$

ou, equivalentemente,

$$\int_\Omega \frac{2f}{(1-u)^3}\left((1-\overline{u})^2 - (1-u)^2 - 2(u-\overline{u})(1-u)\right) \leq \int_\Omega |\nabla(u-\overline{u})|^2. \qquad (1.50)$$

Como anteriormente, tomemos $C > 0$ tal que

$$1 \leq 2C(1-\overline{u})^2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3} \leq 2C \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3}(1-\overline{u})^2$$

e, a aplicando seguidamente (1.50), (1.48) e $2ab \leq a^2 + b^2$ ficamos com

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3} &\leq C\left(\int_\Omega |\nabla(u-\overline{u})|^2 dx + \int_\Omega \frac{2f}{1-u}dx + \int_\Omega \frac{4f}{(1-u)^2}(u-\overline{u})dx\right)\\ &= C\left(\int_\Omega |\nabla(u-\overline{u})|^2 dx + \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}dx + \int_\Omega f + 4\int_\Omega \nabla u \nabla(u-\overline{u})\right) < \infty.\end{aligned}$$

Mostraremos agora que

$$\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3}(1-T_k u)^{-3(p-1)} \leq C$$

onde C independe de k. Fazendo $k \to 0$ concluímos a demonstração do Teorema.

Tomando $\phi = (1 - T_k u)^{-3p+2} - (1-\overline{u})^{-3p+2}$ em (1.40) temos

$$\begin{aligned}(3p-2)\int_\Omega \frac{\nabla T_k u \nabla u}{(1-T_k u)^{3p-1}} - \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^{3p-1}} dx \\ = \int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}\left((1-T_k u)^{-3p+2} - (1-\overline{u})^{-3p+2}\right) dx.\end{aligned} \tag{1.51}$$

Daí, tomando $\phi = (1-T_k u)^{-\frac{3(p+2)}{2}} - (1-\overline{u})^{-\frac{3(p+2)}{2}}$ em (1.47) e, usando

$$(a+b)^2 \leq (\delta+1)a^2 + \frac{\delta+1}{\delta} b^2 \text{ para } \delta > 0 \tag{1.52}$$

e (1.51) sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
&2\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3}\left((1-T_k u)^{-\frac{3(p+2)}{2}} - (1-\overline{u})^{-\frac{3(p+2)}{2}}\right)^2 \\
&\leq \frac{9(p-1)^2}{4}\int_\Omega \left\| \frac{\nabla T_k u \nabla u}{(1-T_k u)^{\frac{3(p-1)}{2}}} - \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^{\frac{3(p-1)}{2}}} dx \right\|^2 dx \\
&\leq \frac{9(p-1)^2}{4}(\delta+1)\int_\Omega \frac{\nabla T_k u \nabla u}{(1-T_k u)^{\frac{3p-1}{2}}} dx + C \\
&= \frac{9(p-1)^2}{4}(\delta+1)\int_\Omega \frac{\nabla T_k u \nabla u}{(1-T_k u)^{\frac{3p-1}{2}}} - \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^{3p-1}} + \frac{\nabla u \nabla \overline{u}}{(1-\overline{u})^{3p-1}} dx + C \\
&= \frac{9(p-1)^2(\delta+1)}{4(3p-2)}\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}\left((1-T_k u)^{-3p+2} - (1-\overline{u})^{-3p+2}\right) dx + C \\
&\leq \frac{9(p-1)^2(\delta+1)}{4(3p-2)}\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}(1-T_k u)^{-3p+2} dx + C \\
&\leq \frac{9(p-1)^2(\delta+1)}{4(3p-2)}\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^2}\left((1-T_k u)^{-\frac{3(p-1)}{2}} - (1-\overline{u})^{-\frac{3(p-1)}{2}}\right)^2 dx + C,
\end{aligned}$$

uma vez que de (1.52)

$$(1-T_k u)^{-p} \leq (1-\delta)\left((1-T_k u)^{-p/2} - (1-\overline{u})^{-p/2}\right)^2 + \frac{1+\delta}{\delta}(1-\overline{u})^{-p}. \tag{1.53}$$

Para p satisfazendo $\dfrac{9(p-1)^2}{4(3p-2)} < 2$ (que ocorre desde que tenhamos $1 < p < 1 + \dfrac{4}{3} + 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$), existe δ suficientemente pequeno, de sorte que

$$2 - \frac{9(p-1)^2(\delta+1)^2}{4(3p-2)} > 0.$$

Daí,

$$\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3}(1-T_k u)^{-3(p-1)}$$
$$\leq 2\int_\Omega \frac{f}{(1-u)^3}\left((1-T_k u)^{-\frac{3(p+2)}{2}} - (1-\overline{u})^{-\frac{3(p+2)}{2}}\right)^2 + C \leq C'$$

onde C' independe de k. ∎

Teorema 13 *Para $1 \leq N \leq 7$ existe $C(N, \Omega, f) < 1$ tal que, dado $0 < \lambda < \lambda^*$, a solução minimal $u_0(\lambda, \cdot)$ de (S_λ) satisfaz $\|u_0(\lambda, \cdot)\|_\infty \leq C$. Consequentemente,*

$$u^* = \lim_{\lambda \to \lambda^*} u_0(\lambda, \cdot)$$

existe na topologia de $C^2(\Omega)$ e $\mu(u^*) = 0$. Mais ainda, u^* é a única solução clássica de (S_{λ^*}) entre todas as $H_0^1(\Omega)$ soluções fracas.

Prova.
A existência de u^* como solução clássica segue da combinação entre os Teoremas (10) e (12), uma vez que $\frac{N}{2} < 1 + \frac{4}{3} + 2\sqrt{2/3}$, ocorre quando $N \leq 7$.

Além disso, uma vez que $\mu_1(\lambda) > 0$ para todo $\lambda < \lambda^*$, passando o limite em λ, temos que $\mu_1(\lambda^*) \geq 0$. Se fosse $\mu_1(\lambda^*) > 0$, o Teorema da Função Implícita aplicado ao operador $L(u^*, \lambda^*)$ implicaria em uma continuação para o operador $\lambda \mapsto u_0(\lambda, \cdot)$ para $\lambda > \lambda^*$, o que contradiz a maximalidade de λ^*. Portanto $\mu_{1,\lambda^*} = 0$ e, a unicidade de u^* segue do Lema (8.1). ∎

Capítulo 2

Problema de Quarta Ordem

Estudaremos agora o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u \;=\; \dfrac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} & \text{em} \quad B_R, \\ 0 \leq u < \; 1 & \text{em} \quad B_R, \\ u \;=\; \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \;=\; 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{R_λ}$$

Análogo ao que foi feito no Capítulo 1, provamos a existência de uma constante λ^* para a qual (R_λ) possui uma solução clássica minimal u_λ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Para $\lambda > \lambda^*$ não há solução (nem mesmo no sentido fraco). No caso $\lambda = \lambda^*$, existe uma única solução fraca que chamamos de solução extrema.

No Capítulo 1, o Princípio do Máximo foi crucial para a obtenção de resultados dessa natureza. No entanto, tal propriedade não é válida para o operador Δ^2 em domínios gerais - ao menos com as condições de fronteira pedidas (veja um contraexemplo na Seção (A.2) Observação (6)). Restringiremos nosso estudo então para o caso $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ e f radial. Para $\Omega = B_R$, o operador Δ^2 preserva o sinal das funções. Esta propriedade é parte de um resultado de 1905 chamado Princípio de Boggio [5](veja Teorema (21)).Outra vantagem de trabalharmos em bolas é o fato que todas as soluções são radialmente simétricas e decrescentes, como foi mostrado em [4].

Definição 14 *Denotamos por $H_0^2(B_R)$ o espaço de Sobolev usual, que pode ser definido por completamento como*

$$H_0^2(B_R) := cl\{u \in C_0^\infty(B_R) : \|\Delta u\|_2 < \infty\}.$$

O mesmo vem a ser um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$(u, v)_{H_0^2(B_R)} := \int_{B_R} \Delta u \Delta v dx.$$

Definição 15 *Quando $u \in C^4(\overline{B})$ satisfaz (R_λ), com*

$$\frac{f(x)}{(1-u)^2} = 0$$

*sempre que $f(x) = 0$, dizemos que u é **solução clássica de** (R_λ).*

*Dizemos que $u \in L^1(B_R)$ é **solução fraca** de (R_λ) quando $0 \leq u \leq 1$ q.t.p. em Ω, $(1-u)^{-2} \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx = \lambda \int_{B_R} \frac{f}{(1-u)^2}\phi dx, \quad \forall\ \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R). \tag{2.1}$$

*Quando (2.1) é satisfeita com $\leq$ ou $\geq$ em lugar de $=$ dizemos que u é **subsolução** ou **supersolução** respectivamente de (R_λ).*

2.1 Teoremas de Existência

Com o Princípio de Boggio desempenhando o papel que no Capítulo 1 era do Princípio do Máximo, derivamos, de maneira análoga ao que foi feito para o problema (S_λ), o resultado a seguir. Nas considerações seguintes μ_R denota o primeiro autovalor do operador biharmônico sobre B_R com condição de fronteira de Dirichlet e, ψ_R denota a autofunção correspondente com $\sup\limits_{B_R} |\psi_R| = 1$. De acordo com [4] (Remark 1.(iii)), $\mu_R > 0$ e ψ_R tem simetria esférica e é radialmente decrescente.

Teorema 16 *Seja*

$$\Lambda := \{\lambda \geq 0 : (R_\lambda) \text{ possui solução clássica } \}$$

temos que Λ é um intervalo limitado e, além disso,

$$\lambda^* := \sup \Lambda \leq min \left\{ \frac{4\mu_R}{27 \inf\limits_{x \in B_R} f(x)}, \frac{\mu_R \|\psi_R\|_1}{\displaystyle\int_{B_R} \psi_R f dx} \right\}$$

Prova. Primeiramente mostraremos que dado $\theta \in (0,1)$, a função $\psi := \theta\psi_R$ é uma supersolução de (R_λ) para algum $\lambda > 0$. Como $u \equiv 0$ é subsolução de (R_λ) para todo λ, segue do Teorema de Sub- e Supersolução, que (R_λ) possui uma solução clássica para algum $\lambda > 0$.

De fato, já temos

$$0 < 1 - \theta\psi_R < 1 \quad \text{em } \Omega.$$

A condição

$$\Delta^2\psi \geq \frac{\lambda f}{(1-\psi)^2} \quad \text{em } \Omega$$

ocorrerá para algum $\lambda > 0$ desde que tenhamos

$$\mu_R\theta\psi_R \geq \frac{\lambda f}{(1-\theta\psi_R)^2},$$

ou equivalentemente,

$$\mu_R\theta\psi_R(1-\theta\psi_R)^2 \geq \lambda f \quad \text{em } B_R.$$

Como

$$0 < s_1 := \inf_{x\in B_R} \psi < s_2 := \sup_{x\in B_R} \psi < 1$$

e $\partial\psi/\partial\eta < 0$ sobre ∂B_R, temos que $g(s) = s(1-s)^2$ é limitada em $[s_1, s_2]$ logo, podemos escolher $\lambda > 0$ suficientemente pequeno de forma que

$$\mu_R \inf_{x\in B_R} g(\theta\psi_R(x)) > \lambda \sup_{x\in B_R} f(x). \tag{2.2}$$

Com isso, podemos derivar uma limitação superior para λ. Com efeito, seja u uma solução de (R_λ), temos

$$\begin{aligned}
\mu_R \geq \mu_R \int_{B_R} u\frac{\psi_R}{\|\psi_R\|_1}dx &= \int_{B_R} u\Delta^2\left(\frac{\psi_R}{\|\psi_R\|_1}\right)dx \\
&= \int_{B_R} \Delta^2 u\frac{\psi_R}{\|\psi_R\|_1}dx = \lambda\int_{B_R} \frac{f\psi_R}{\|\psi_R\|_1(1-u)^2}dx \\
&\geq \lambda\int_{B_R} f\frac{\psi_R}{\|\psi_R\|_1}dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda^* \leq \frac{\mu_R\|\psi_R\|_1}{\displaystyle\int_{B_R} f\psi_R dx} < \infty.$$

Para verificar a outra estimativa basta multiplicarmos (R_λ) por ψ_Ω e integrarmos sobre Ω, obtendo

$$\mu_R\int_{B_R} u\psi_R dx = \lambda\int_{B_R} \frac{f\psi_R}{(1-u)^2}dx.$$

Como $u(1-u)^2$ atinge o valor máximo $4/27$ em $u \in [0,1]$, temos que

$$\mu_R\int_{B_R} u\psi_R dx \geq \inf_{B_R} f\lambda\int_{B_R} \frac{\psi_{B_R}}{(1-u)^2} \geq \inf_{B_R} f\lambda\frac{27}{4}\int_{B_R} u\psi_{B_R}dx.$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{4\mu_R}{27 \inf_{B_R} f}$$

para λ arbitrário. ∎

Também para este problema, garantimos a existência de um ramo de soluções minimais. Entendemos por **solução minimal de** (R_λ), e denotamos por u_λ, uma solução de (R_λ) que está por baixo de qualquer outra:

$$u_\lambda \leq u \quad \text{para toda } u \text{ solução de } (R_\lambda).$$

Garantimos também que as soluções minimais são estáveis onde dizemos que u, solução de (R_λ), é **estável** se

$$\mu(u) = \inf\{\langle L\phi, \phi\rangle : \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R),\ \|\phi\|_2 = 1\} > 0,$$

onde L é o operador linear

$$L = \Delta^2 - \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}$$

e, **semiestável** quando $\mu(u) \geq 0$.

Lema 16.1 *Dadas $u, U \in H_0^2(B_R)$ tais que u é uma subsolução semiestável de (R_λ) e U é uma supersolução de (R_λ) então,*

$$u \leq U \quad \text{q.t.p. em } B_R.$$

Além disso, se u é uma solução de (R_λ) com $\mu_1(u) = 0$ e U é supersolução clássica então $u = U$.

Prova. Considere $v := u - U$. Pelo Teorema (22) existem $v_1, v_2 \in H_0^2(B_R)$ tais que $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \perp v_2$, $v_1 \geq 0$ e $v_2 \leq 0$, donde segue que $v_1 \geq v$. Dessa forma

$$\int_{B_R} \Delta(u-U)\Delta v_1 = \int_{B_R} \Delta(v_1+v_2)\Delta v_1 dx = \int_{B_R} |\Delta v_1|^2 dx. \tag{2.3}$$

Uma vez que u é semiestável, isto é

$$|\Delta\phi|^2 - \frac{2\lambda f}{(1-u)^3}\phi^2 \geq 0 \tag{2.4}$$

para todo $\phi \in H_0^2(B_R)$, temos, em particular para $\phi = v_1$, que

$$|\Delta v_1|^2 \geq \frac{2\lambda f}{(1-u)^3} v_1^2. \tag{2.5}$$

E como

$$\int_{B_R} \Delta(u-U)\Delta\phi dx \leq \lambda \int_{B_R} f \left[\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1-U)^2}\right] \phi dx$$

para toda $\phi \in H_0^2(B_R)$, tomando $\phi = v_1$, temos que

$$\int_{B_R} \Delta(u-U)\Delta v_1 dx \leq \lambda \int_{B_R} f \left[\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1-U)^2}\right] v_1 dx. \tag{2.6}$$

Finalmente, juntando (2.4) (2.5) e (2.6) obtemos

$$\int_{B_R} \frac{2\lambda f}{(1-u)^3} v_1^2 dx \leq \lambda \int_{B_R} f \left[\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1-U)^2}\right] v_1 dx,$$

ou equivalentemente,

$$0 \leq \int_{B_R} f \left[\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1-U)^2} - 2\frac{v_1}{(1-u)^3}\right] v_1 dx.$$

E, como $v_1 \geq v$,

$$0 \leq \int_{B_R} f \left[\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1-U)^2} - 2\frac{u-U}{(1-u)^3}\right] v_1 dx.$$

Mas $\dfrac{1}{(1-u)^2} - \dfrac{1}{(1-U)^2} \leq 0$, logo devemos ter obrigatoriamente

$$u - U \leq 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Isto prova a primeira parte do Lema.

Considere agora a função $Q[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(\tau) := \Delta^2(u - \tau(U-u)) - \frac{\lambda f}{[1-(u-\tau(U-u))]^2}.$$

Note que $Q(0) = 0$ e como $\mu_1(u) = 0$ temos que

$$Q'(\tau) := \Delta^2(U-u) - \frac{2\lambda f}{[1-(u-\tau(U-u))]^3}(U-u) \geq 0,$$

o que implica que $Q'(0) = 0$. Além disso, pela convexidade da função $s \mapsto 1/(1-u)^2$, temos que $Q(\tau) \geq 0$ para todo $\tau \in [0,1]$ donde necessariamente devemos ter

$$Q''(0) = -6\lambda f \frac{(U-u)^2}{(1-u)^4} \geq 0$$

e, consequentemente, $U = u$. ∎

Teorema 17 *Dado $0 \leq \lambda < \lambda^*$ existe uma única solução minimal clássica de (R_λ) a qual é estável e pode ser obtida como limite da sequência dada recursivamente fazendo $v_0 \equiv 0$ e $v_n \in C^4(\overline{\Omega})$ a única solução de*

$$\begin{cases} \Delta^2 v_n = \dfrac{\lambda f(x)}{(1-v_{n-1})^2} & em \quad B_R, \\ v_n = \dfrac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0 & sobre \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{2.7}$$

Além disso a função $\lambda \mapsto u_\lambda$ é diferenciável e estritamente crescente para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e, consequentemente, a função $\lambda \mapsto \mu_1(u_\lambda)$ é decrescente.

Prova. Primeiramente note que se $v_{n-1} \in C^{4,\alpha}(\overline{B_R})$ então v_n existe e tem a mesma regularidade devido ao Teorema (24). Como $v_0 \in C^{4,\alpha}(\overline{B_R})$ temos, por indução, que (v_n) está bem definida.

Dada u solução de (R_λ), devido à monotonicidade de $s \mapsto \frac{1}{(1-s)^2}$ temos que se $0 \leq v_n \leq u$ então

$$\begin{cases} \Delta^2(u - v_n) = \lambda f \left[\dfrac{1}{(1-u)^2} - \dfrac{1}{(1-v_{n-1})^2} \right] \geq 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u - v_n = \dfrac{\partial (u - v_n)}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases}$$

e, pelo Princípio de Boggio (Teorema (21)) segue que $v_n \leq u$. Como esta condição é satisfeita para $n = 0$ temos que $v_n \leq u$ para todo n.

Também pelo Princípio de Boggio segue que $v_1 \geq v_0 \equiv 0$ visto que $\Delta^2 v_1 = 0$. E como

$$\begin{cases} \Delta^2(v_{n+1} - v_n) = \lambda f \left[\dfrac{1}{(1-v_n)^2} - \dfrac{1}{(1-v_{n-1})^2} \right] \geq 0 & \text{em} \quad B_R, \\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{\partial (v_{n+1} - v_n)}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases}$$

quando se supõe $v_{n+1} - v_n \geq 0$, temos que (v_n) é monótona crescente.

Utilizando o Teorema da Convergência Monótona, podemos então definir $u_\lambda \in L^1(B_R)$ fazendo

$$u_\lambda(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x).$$

A mesma vem a ser solução clássica de (R_λ) devido à Proposição (11).

Para verificar que u_λ é estável devemos mostrar que

$$\lambda_{**} := \sup\{\lambda \in [0, \lambda^*) : \mu_1(u_\lambda) > 0\} = \lambda^*.$$

O número λ^{**} está bem definido uma vez que para $\lambda = 0$, $\mu_1(u_\lambda) = \mu_R > 0$. Suponha que $\lambda_{**} < \lambda^*$. Devido à função $\lambda \mapsto \mu_1(u_\lambda)$ ser semicontínua inferiormente, devemos ter $\mu_1(\lambda^{**}) = 0$ pois se fosse $\mu_1(\lambda^{**}) > 0$ teríamos uma continuação do ramo de soluções minimais estáveis para além de λ^{**}, o que contradiz a maximalidade de λ^{**}. Portanto, pelo Lema (16.1) deveríamos ter $u_\lambda = u_{\lambda^{**}}$ para todo $\lambda^{**} < \lambda < \lambda^*$ (um absurdo).

Finalmente, uma vez que toda solução minimal é estável, temos, pelo Teorema da Função Implícita que $\lambda \mapsto u_\lambda$ é diferenciável. A monotonicidade de tal função segue imediatamente do Princípio de Boggio donde, consequentemente, devido à caracterização variacional de $\mu_1(\lambda)$, segue que $\lambda \mapsto \mu_1(\lambda)$ é decrescente. ∎

Lema 17.1 *Se u é solução fraca de (R_λ) então $(R_{\lambda-\varepsilon})$ possui solução clássica para todo $0 < \varepsilon < 1$. Consequentemente*

$$\lambda^* = \{\lambda \geq 0 : (R_\lambda) \text{ possui solução fraca } u \in L^1(B_R)\}.$$

Prova. Considere $\widetilde{u} \in L^1(B_R)$ a única solução (Lema (22.1)) de

$$\int_{B_R} \widetilde{u}\Delta^2\phi dx = \int_{B_R} (1-\varepsilon)\lambda \frac{f}{(1-u)^2}\phi dx, \quad \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R).$$

Por hipótese

$$\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx = \int_{B_R} \lambda \frac{f}{(1-u)^2}\phi dx, \quad \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R).$$

Assim, pela unicidade de $\widetilde{u}$ devemos ter

$$\widetilde{u} = (1-\varepsilon)u.$$

Em particular, $\widetilde{u} < u < 1$ exceto onde u se anula. Em qualquer um dos casos, $\widetilde{u} < 1$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \widetilde{u}\Delta^2\phi dx = \int_{B_R} (1-\varepsilon)\lambda & \frac{f}{\left(1 - \dfrac{\widetilde{u}}{1-\varepsilon}\right)^2}\phi dx \\ & \geq (1-\varepsilon)\lambda \frac{f}{(1-\widetilde{u})^2}\phi dx, \quad \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R), \end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{u}$ é uma supersolução de $(R_{(1-\varepsilon)\lambda})$. Daí, Teorema (28), $(R_{(1-\varepsilon)\lambda})$ admite solução fraca v satisfazendo

$$0 \leq v \leq \widetilde{u} < 1$$

que pela Proposição (11) é uma solução clássica. ∎

Devido ao Teorema (17) podemos definir pontualmente

$$u^* := \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda. \tag{2.8}$$

Além disso, o Teorema da Convergência Monótona garante que $u_\lambda \to u^*$ em $L^2(B_R)$ quando $\lambda \to \lambda^*$. Mostraremos agora que u^* é solução fraca de (R_λ).

Proposição 6 *A função u^* dada por (2.8) é uma $H_0^2(B_R)$-solução de (R_λ). Além disso, u^* é fracamente estável e se $\|u^*\|_\infty < 1$ então $\mu_1(u^*) = 0$.*

Prova. Uma vez que u_λ é estável, devemos ter

$$2\lambda \int_{B_R} \frac{f u_\lambda^2}{(1-u_\lambda)^3} dx \le \int_{B_R} |\Delta u_\lambda|^2 dx = \int_{B_R} u_\lambda \Delta^2 u_\lambda dx = \lambda \int_{B_R} \frac{f u_\lambda}{(1-u_\lambda)^2}. \tag{2.9}$$

Tomando $C > 0$ tal que

$$(1-C)\frac{s}{(1-s)^2} \le \frac{s^2}{(1-s)^3} + (1+C), \quad \forall s \in (0,1)$$

em vista de (2.9) devemos ter

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B_R} \frac{f u_\lambda}{(1-u_\lambda)^2} dx &\ge 2\lambda \int_{B_R} \frac{f u_\lambda^2}{(1-u_\lambda)^3} dx \\ &\ge 2\lambda(1-C) \int_{B_R} \frac{f u_\lambda}{(1-u_\lambda)^2} - 2\lambda(1-C) \int_{B_R} f dx. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\|\Delta u_\lambda\|_2^2 = \lambda \int_{B_R} \frac{f u_\lambda}{(1-u_\lambda)^2} dx \le 2\lambda^* \frac{(1-C)}{C} \|f\|_1.$$

Dessa forma existe $v \in H_0^2(B_R)$ tal que $u_\lambda \rightharpoonup v$ em $H_0^2(B_R)$. Pela unicidade do limite fraco e tendo em vista o comentário que antecede o Teorema, devemos ter $v = u^*$. Portanto u^* é uma $H_0^2(B_R)$-solução fraca de (R_λ).

Agora, se $\|u^*\|_\infty < 1$ então u^* é uma solução clássica de (R_λ) (veja Seção(A.5)) e o operador linearizado

$$L(\lambda^*, u^*) = \Delta^2 - \frac{2\lambda^* f}{(1-u^2)^3}$$

está bem definido em $C^{4,\alpha}(B_R) \times \mathbb{R}$. Se fosse $\mu_1(u^*) > 0$ teríamos, de acordo com o Teorema da Função Implícita, uma continuação do ramo de soluções para além de λ^*, o que contradiz a maximalidade de λ^*. Portanto devemos ter $\mu_1(u^*) = 0$.

■

2.2 Estimativas Inferiores para λ^*

Exibiremos agora estimativas inferiores para o valor de λ^* que, como ressaltamos na Introdução, são importantes em aplicações para fazer a regulagem dos dispositivos que motivaram o estudo destas equações.

Proposição 7

$$\lambda^* \geq \frac{32}{27}\frac{10N - N^2 - 12}{R^4\|f\|_\infty}.$$

Prova.

Dado $\alpha \in (0,1)$, considere a função

$$w_\alpha := \alpha\left(1 - \frac{|x|^4}{R^4}\right).$$

Note que w_α satisfaz

$$0 \leq w_\alpha(x) < 1 \text{ para } x \in B_R$$

e

$$w_\alpha(x) = 0, \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial \eta} \leq 0 \text{ para } x \in \partial B_R.$$

A ideia é mostrar que w_α é supersolução de (R_λ) para $\lambda \leq C(\alpha)$ e maximizar tal constante em α. Como

$$\begin{aligned}
\Delta^2 w_\alpha(r) &= \frac{d^4 w_\alpha}{dr^4} + \frac{2(N-1)}{r}\frac{d^3 w_\alpha}{dr^3} + \frac{(N-1)(N-3)}{r^2}\frac{d^2 w_\alpha}{dr^2} - \frac{(N-1)(N-3)}{r^3}\frac{dw_\alpha}{dr} \\
&= (-24 + 48(N-1) - 8(N-1)(N-3))\alpha\frac{r}{R^4} \\
&= C(N)\alpha\frac{s}{R^4},
\end{aligned}$$

onde $C(N) = -24 + 48(N-1) - 8(N-1)(N-3) = 80N - 8N^2 - 96$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta^2 w_\alpha(x) = \frac{C(N)\alpha}{R^4}(1-\alpha)^2\frac{1}{(1-\alpha)^2} &\geq \frac{C(N)s(1-s)^2}{R^4\|f\|_\infty}\frac{f}{\left(1 - s(1 - \frac{|x|^4}{R^4})\right)^2} \\
&= \frac{C(N)s(1-s)^2}{R^4\|f\|_\infty}\frac{f}{(1-w_s)^2}.
\end{aligned}$$

Donde deduzimos que

$$\lambda^* \geq \sup_{\alpha\in(0,1)} \frac{C(N)\alpha(1-\alpha)^2}{R^4\|f\|_\infty} = \frac{4}{27}\frac{C(N)}{R^4\|f\|_\infty}.$$

O que finaliza nossa prova. ∎

Proposição 8

$$\lambda^* \geq \frac{c(N)}{R^4\|f\|_\infty}.$$

Prova. Basta notar que a função $w = 1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{\frac{4}{3}}$ satisfaz

$$\frac{1}{(1-\widetilde{u})^2} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{\frac{4}{3}} \in L^1(B_R)$$

e de

$$\begin{aligned}
\Delta^2 w(r) &= \frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2(N-1)}{r}\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{(N-1)(N-3)}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{(N-1)(N-3)}{r^3}\frac{dw}{dr} \\
&= \left(\frac{40}{81} - \frac{16}{27}(N-1) + \frac{4}{9}(N-1)(N-3) - \frac{4}{3}(N-1)(N-3)\right)\frac{r^{-8/3}}{R^{4/3}}, \\
&= \frac{72N^2 - 240N + 128}{81}\frac{1}{R^4}\frac{1}{(1-w)^2}
\end{aligned}$$

ou seja, w é solução fraca de (R_λ) desde que tenhamos

$$\lambda f(x) \leq \frac{c(N)}{R^4} \qquad \text{para todo } x \in B_R,$$

onde $c(N) = \dfrac{72N^2 - 240N + 128}{81}$. Assim, é suficiente tomarmos

$$\lambda \leq \frac{c(N)}{R^4\|f\|_\infty}.$$

■

2.3 Unicidade para o Problema R_{λ_*}

Teorema 18 *Se v é uma supersolução de (R_{λ^*}), então $v = u^*$. Em particular, (R_{λ^*}) possui uma única solução fraca que chamamos de solução extrema.*

Prova.

Considere a perturbação do problema (R_{λ^*}) dada por

$$\begin{cases}
\Delta^2 u = \dfrac{\lambda^* f(x)}{(1-u)^2} + \mu_0\dfrac{\xi(x)f(x)}{(1-u)^2} & \text{em} \quad B_R, \\
0 \leq u < 1 & \text{em} \quad B_R, \\
u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R.
\end{cases} \qquad (\widetilde{R}_\lambda)$$

onde $\xi \in C_c^\infty$ é uma função cut-off e $\mu_0 > 0$ é uma constante a ser escolhida. Dada v supersolução de (R_{λ^*}), supondo por contradição que $v \neq u^*$ mostraremos que existe uma supersolução para o Problema $(\widetilde{R}_\lambda)$, o que nos permitirá encontrar uma supersolução de (R_λ) para $\lambda > \lambda^*$.

Ora, a solução minimal u^* satisfaz $u^* \leq v$ q.t.p. em B_R para toda v supersolução de (R_{λ^*}). Assim,

$$\int_{B_R} (v - u^*)\Delta^2\phi dx \geq \int_{B_R} \lambda^* f \left[\frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-u^*)^2}\right] \phi dx \geq 0$$

para toda $0 \leq \phi \in C_c^\infty(B_R)$. Do Princípio de Boggio segue que $v \equiv u^*$ q.t.p. em B_R ou $v > u^*$ q.t.p. em B_R. Suponhamos que a segunda possibilidade ocorra, existem então $c_0, \rho > 0,\ \rho < R$, tais que

$$v - u^* \geq c_0 > 0 \quad \text{q.t.p. em } B_\rho.$$

Consideremos então

$$u_0 := \frac{u^* + v}{2}.$$

Note que $0 \leq u_0 \leq 1$, o que implica que $\dfrac{1}{(1-u_0)} \geq 1$. Pela concavidade da função $s \mapsto \dfrac{1}{(1-s)^2}$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} \left(\frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{(1-u)^2}\right)\phi dx &\geq \int_{B_R} \frac{2}{\left(1 - \dfrac{u^*+v}{2}\right)^2}\phi dx \\ &\geq \int_{B_R} \frac{1}{(1-u_0)}\left(2 + \frac{(v-u^*)^2}{2(1-u_0)^2}\right)\phi dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{B_R} u_0\Delta^2\phi dx &\geq \int_{B_R} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-u^*)^2} + \frac{1}{(1-v)^2}\right)\lambda^* f\phi dx \\ &\geq \int_{B_R} \frac{\lambda^* f}{(1-u_0)^2}\left(1 + \frac{(v-u^*)^2}{4(1-u_0)^2}\right)\phi dx \\ &\geq \int_{B_R} \left(\frac{\lambda^* f}{(1-u_0)^2} + \frac{\lambda^* f(v-u^*)^2}{4(1-u_0)^2}\frac{1}{(1-u_0)^2}\right)\phi dx \\ &\geq \int_{B_R} \left(\frac{\lambda^* f(x)}{(1-u_0)^2} + \frac{\lambda^* f(x)(v-u^*)^2}{4(1-u_0)^2}\right)\phi dx \\ &\geq \int_{B_R} \left(\frac{\lambda^* f(x)}{(1-u_0)^2} + \frac{\lambda^* c_0^2\xi(x)f(x)}{4(1-u_0)^2}\right)\phi dx\end{aligned}$$

escolhendo $\mu_0 = (\lambda^* c_0^2)/4$ e ξ tendo suporte em B_ρ. Dessa forma, u_0 é uma supersolução fraca de $(\widetilde{R}_\lambda)$.

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere u_ε uma solução clássica de $(R_{\lambda^*-\varepsilon})$, cuja existência é garantida pelo Lema (17.1). Considere também

$$\mu_\varepsilon := \frac{(\lambda^* - \varepsilon)c_0^2}{4}$$

e $\psi \in C^4(B_R)$ a única solução clássica de

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = \mu_\varepsilon \dfrac{\xi(x) f(x)}{(1-u_\varepsilon)^2} & \text{em} \quad B_R, \\ \psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{2.10}$$

Tomando M suficientemente grande de modo que tenhamos $u_\varepsilon \leq M\psi$ ou, equivalentemente $\psi - \dfrac{1}{M} w_\varepsilon \geq 0$, e δ suficientemente pequeno de forma que $\dfrac{\delta}{\lambda^* - \varepsilon} \leq \dfrac{1}{M}$, considerando

$$w := \frac{(\lambda^* - \varepsilon) + \delta}{\lambda^* - \varepsilon} u_\varepsilon - \psi$$

vemos que $u_\varepsilon - w = -\dfrac{\delta}{\lambda^* - \varepsilon} u_\varepsilon + \psi \geq 0$

$$\Rightarrow w \leq u_\varepsilon < 1.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \Delta^2 (u_\varepsilon - \psi) = (\lambda^* - \varepsilon) \dfrac{\xi(x) f(x)}{(1-u_\varepsilon)^2} \geq 0 & \text{em} \quad B_R, \\ (u_\varepsilon - \psi) = \dfrac{\partial (u_\varepsilon - \psi)}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R. \end{cases} \tag{2.11}$$

Donde temos, pelo Princípio de Boggio que $\psi \leq u_\varepsilon$. Assim,

$$w \geq 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta^2 w &= (\lambda^* - \varepsilon + \delta) \frac{f}{(1-u_\varepsilon)^2} + \frac{(\lambda^* - \varepsilon + \delta)c_0^2}{4} \frac{\xi f}{(1-u_\varepsilon)^2} - \mu_\varepsilon \frac{\xi f}{(1-u_\varepsilon)^2} \\ &\geq (\lambda^* - \varepsilon + \delta) \frac{f}{(1-u_\varepsilon)^2} \end{aligned}$$

e, escolhendo ε suficientemente pequeno de modo que $0 < \varepsilon < \delta$ obtemos uma supersolução e, consequentemente uma solução clássica, de (R_λ) para $\lambda > \lambda^*$, o que é uma contradição. ■

Apêndice A

Alguns Resultados Utilizados no Texto

Trazemos aqui o enunciado e alguns comentários de resultados que foram citados ao longo do texto. Incluímos a demonstração de alguns deles, os demais, cuja demonstração foge o objetivo central desta dissertação estão acompanhados de referências a textos onde são tratados com mais detalhes.

A.1 Sobre os Espaços de Funções

Aqui estão algumas propriedades dos espaços de Sobolev que utilizamos no texto.

Proposição 9 (Derivação de uma Composição) *Dadas $G \in C^1(\mathbb{R})$ com $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$ então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad (G' \circ u)\frac{\partial}{\partial x_i}u$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Para a prova veja [6] Proposição IX.5 p. 155.

Observação 5 *Mostraremos como consequência deste resultado que se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $u^+ := \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ considere a função real H_ε dada por*

$$H_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & se\ z \geq 0 \\ 0 & se\ z < 0 \end{cases}.$$

Da maneira que definimos H_ε temos que $H_\varepsilon(0) = 0$ e, $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ com

$$H'_\varepsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{(z^2+\varepsilon^2)^{1/2}} & se\ z \geq 0 \\ 0 & se\ z < 0 \end{cases}.$$

Além disso, uma vez que $\lim_{z\to\infty} H'_\varepsilon(z) = 1$ *temos que* $|H'_\varepsilon|$ *é limitada. Podemos usar então a Proposição* (9)*, com a qual garantimos que* $H_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *para toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Como $0 < z^2 + \varepsilon^2 < z^2$*, temos que* $(z^2+\varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon < |z| - \varepsilon$ *e, consequentemente*

$$\int_\Omega |F_\varepsilon(u)|^2 dx \leq \int_\Omega |u|^2 + \varepsilon^2 dx < \infty.$$

Temos também que $u^+(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(u(x))$*. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada:* $\|F_\varepsilon(u) - u^+\|_2 \to 0$.

De maneira análoga, uma vez que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} F_\varepsilon(u)\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x_i} u\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i} u\right|^2 < \infty$$

e,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right)^+ (x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial}{\partial x_i} F_\varepsilon(u(x)),$$

temos que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} F_\varepsilon(u) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right)^+\right\|_2 \to 0.$$

Com as considerações feitas até aqui verificamos que $F_\varepsilon(u)$ *é de Cauchy em* $W^{1,p}(\Omega)$ *e pela unicidade do limite devemos ter* $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$*. Além disso,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u^+) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right)^+.$$

O resultado seguinte é uma caracterização do espaço $W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ([6] Teorema IX.17 p. 171.)

Proposição 10 *Suponha que* $\partial\Omega$ *é de classe* C^1*. Dada* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*, então*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

A.2 Preservação do Sinal

Teorema 19 (Princípio do Máximo) *Dada* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0$ *então*

$$\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Em particular, se $u \equiv 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *então* u *é não negativa.*

O Princípio do Máximo é ainda válido quando substituímos $-\Delta$ por um operador Elíptico qualquer (veja [12]) e, inclusive para funções em um Espaço de Sobolev.

Teorema 20 *Se* $u \in H_0^1(\Omega)(\Omega)$ *satisfaz* $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx \geq 0$ *para todo* $\phi \in H_0^1(\Omega)$ *então*

$$u \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Observação 6 *O operador* Δ^2 *não goza desta propriedade para o caso de domínios gerais e condição de fronteira de Dirichlet (obviamente um resultado análogo vale para condições fronteira de Newmann,* $\Delta u = 0$*, como consequência do Teorema* (19)*). Em 1951 Garabedian [10] mostrou que havia um contraexemplo no caso em que* Ω *é uma elipse suficientemente excêntrica. Em 1994 Shapiro e Tegmark [17] exibiram um contraexemplo elementar, que incluímos a seguir.*

Sejam $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x, y) < 0\}$*, onde* $Q(x, y) := x^2 + 25y^2 - 1$*, a elipse com semi-eixos* 1 *e* $1/5$ *e,* $f(x) := (1 - x)^2(4 - 3x)$*, mostraremos que* $\Delta^2 Q^2 f > 0$ *sobre* $\overline{\Omega}$*. Por agora suponhamos que isto está provado. Podemos então escolher* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno de sorte que a função*

$$u := Q^2(f - \varepsilon)$$

satisfaça $\Delta^2 u > 0$ *e* $0 < \varepsilon < \max_{\overline{\Omega}} f$ *para que* u *mude de sinal. Isto é possível pois como* $f(1) = 0$*, devemos ter* $f(x) - \varepsilon < 0 \Rightarrow u(x) < 0$ *para* x *próximo de* 1*. Observe também que*

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = \langle \nabla u, \eta \rangle = \langle (2QQ_x(f - \varepsilon) + Q^2 f_x, 2QQ_y(f - \varepsilon)), \eta \rangle = 0 = u$$

sobre $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Q(x, y) = 0\}$*. Resumindo,* $\Delta^2 u > 0$*,* u *satisfaz as condições de fronteira de Dirichlet, no entanto* u *muda de sinal.*

Uma vez que $\Delta^2(Q^2 f) = 96P$ *onde*

$$P(x, y) = 596 - 1825x + 1850x^2 - 620x^3 + 3250y^2 - 3000xy^2,$$

é suficiente mostrarmos que

$$P(x, y) > 0 \quad \forall\ (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Provaremos primeiramente que P *é positivo sobre* $\partial\Omega$*. Substituindo então* y^2 *por* $(1 - x^2)/25$ *obtemos que*

$$P(x, y) = R(x) := 726 - 1945x + 1720x^2 - 500x^3 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Temos então que mostrar que R *é positivo sobre* $[1,-1]$. *Como*

$$R'(x) = -1945 + 3440x - 1500x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{172-\sqrt{409}}{150} > 1 \quad ou \quad x = \frac{172+\sqrt{409}}{150} > 1,$$

temos que $R'(x) < 0$ *para* $x < 1$, *consequentemente,* $R(x) \geq R(1) = 1$ *em* $[-1,1]$.

Suponha agora que P *assume algum valor negativo em* Ω. *Dessa forma* P *assume um valor mínimo, o qual é negativo, em algum ponto* (x_0, y_0) *em* Ω. *Este deve satisfazer:*

$$P_x(x_0, y_0) = 0 \tag{A.1}$$

e

$$P_y(x_0, y_0) = 0. \tag{A.2}$$

Como $P_y(x,y) = 500y(13-12x)$, *para que A.2 ocorra é preciso termos* $y_0 = 0$. *Fixada esta informação, para que* (A.1) *ocorra é preciso que* x_0 *seja raiz da equação*

$$P_x(x,0) = 372x^2 - 740x + 365 = 0.$$

Esta equação tem exatamente uma raiz em $(-1,1)$, *a saber*

$$x_0 = \frac{185 - 2\sqrt{70}}{186}.$$

Mas $P(x_0, 0) > 0$. *Concluímos portanto que* $\Delta^2 Q^2 f \geq 0$ *em* Ω.

No entanto sabemos que se Ω tiver simetria esférica vale a preservação do sinal para o operador biharmônico. Este é um resultado de 1905 devido a Boggio [5].

Teorema 21 (Princípio de Boggio) *Dada* $u \in L^1(\Omega)$, *caso ocorra alguma das alternativas seguintes:*

1. $u \in C^4(\overline{B})$, $\Delta^2 u \geq 0$ *sobre* B, *e* $u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ *sobre* ∂B;
2. $\displaystyle\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx \geq 0$ *para todo* $0 \leq \phi \in C^4(\overline{B}) \cap H_0^2(B_R)$;
3. $u \in H_0^2(B_R)$, $u = 0$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0$ *sobre* ∂B, *e* $\displaystyle\int_{B_R} \Delta u \Delta\phi \geq 0$ *para todo* $0 \leq \phi \in H_0^2(B_R)$;

teremos $u \equiv 0$ *ou* $u > 0$ *q.t.p. em* B.

Usaremos agora o Princípio de Boggio para obter um resultado conhecido como Decomposição de Moreau [14]. Para tanto considere em $H_0^2(B_R)$ o cone convexo e fechado das funções não negativas

$$K = \{v \in H_0^2(B_R) : v \geq 0 \text{ q.t.p. em } B_R\}$$

e seu cone dual

$$K' = \{w \in H_0^2(B_R) : (w,v)_2 \leq 0 \text{ para todo } v \in K\}.$$

A decomposição de Moreau estabelece que $K' \subset K$. Em particular dado $v \in H_0^2(B_R)$ existem $v_1, v_2 \in H_0^2(B_R)$ tais que $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \perp v_2$, $v_1 \geq 0$ e $v_2 \leq 0$.

Teorema 22 (Decomposição de Moreau) *Na notação acima, se $w \in K'$ então $w \leq 0$ q.t.p. em B_R.*

Prova. Dado $w \in K'$, considere v a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v = h & \text{em } B_R \\ v = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial B \end{cases},$$

onde $h \in C_0^\infty(B_R) \cap K$. Pelo Princípio de Boggio segue que $v \in K$. Assim,

$$0 \geq (w,v)_2 = \int_{B_R} w\Delta^2 v dx = \int_{B_R} whdx,$$

ou seja, $\int_{B_R} whdx \leq 0$ para toda $h \in C_0^\infty(B_R) \cap K$ e, por densidade $\int_{B_R} whdx \leq 0$ para toda $h \in L^2(B_R)$ satisfazendo $h \geq 0$ q.t.p. em B_R. Portanto $w \leq 0$ q.t.p. em B_R. ∎

A.3 Existência e Regularidade de Soluções

Observação 7 *Sabemos que desde que tenhamos $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad \Omega, \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}. \tag{A.3}$$

Basta observar que $\phi \mapsto \int_\Omega \phi f dx$ define um operador linear limitado em $H_0^1(\Omega)$ e, uma vez que $H_0^1(\Omega)$ munido do produto interno $\langle u,v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$ é um espaço *de Hilbert, o Teorema de Representação de Riesz garante a existência e unicidade de um elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx \quad \text{para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

De modo análogo, uma vez que $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v + Cuv\, dx$ para $C > 0$ também define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$, concluímos que existe solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + Cu \;=\; f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \;0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases},$$

e para o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}, \tag{A.4}$$

existe uma única $u \in H_0^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \phi dx = \int_\Omega f \phi \quad \text{para toda } \phi \in H_0^2(\Omega).$$

No caso $\Omega = B_R$ podemos tratar de funções que satisfazem (A.4) num sentido ainda mais fraco. O resultado seguinte foi provado em [2] (Lema17) e desempenha, para o estudo do Problema (R_λ), um papel semelhante ao que a Observação (7) desempenha no estudo do Problema (S_λ).

Lema 22.1 *Dada $g \in L^1(B_R)$, $g \geq 0$ q.t.p., existe uma única $u \in L^1(B_R)$ tal que $u \geq 0$ q.t.p. em B_R e*

$$\int_{B_R} u \Delta^2 \phi dx = \int_{B_R} g \phi dx, \quad \phi \in C^4(\overline{B_R}) \cap H_0^2(B_R).$$

Além disso, existe $C > 0$ que não depende de g tal que $\|u\|_1 \leq C\|g\|_1$.

A obtenção de regularidade das soluções no nosso estudo segue dos resultados a seguir. Primeiramente, introduziremos a definição de Espaço de Hölder e, em seguida exibiremos tais resultados.

Definição 23 *Dado $\alpha > 0$, definimos*

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\},$$

o espaço vetorial das funções Hölder contínuas com expoente α. Definimos também

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^m(\overline{\Omega}) : D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \forall \beta \text{ com } |\beta| \leq m \right\}.$$

Chamando

$$[u] = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

temos que $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach quando munido com a norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_\infty + [u]. \tag{A.5}$$

O mesmo vale para $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ com

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}} = \sum_{|\beta|\leq m} \|D^\beta u\|_\infty + \sum_{\alpha=|k|} [D^\alpha u].$$

Os resultados seguintes valem para uma classe mais geral de operadores elípticos de grau $2m$ (veja [1]) mas, para evitar discussões extensas e que fogem do caminho que seguimos neste trabalho optamos por enunciar estes resultados de uma forma mais simplificada. Os Teoremas a seguir são portanto casos particulares de resultados mais gerais de [1].

Teorema 24 (Schauder) *Dado $0 < \alpha < 1$, desde que tenhamos Ω limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ e $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + gu &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D}$$

admite solução clássica $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. E o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + gu &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B}$$

admite solução clássica $u \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Outro Teorema crucial para garantir regularidade das soluções é:

Teorema 25 (De Giorgi-Stampacchia) *Dado Ω limitado e de fronteira regular, se $f \in L^p(\Omega)$ para $p > N/2$, então os problemas (D) e (B) admitem solução única $u \in W^{2,p}_{loc} \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u \in W^{4,p}_{loc} \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, respectivamente, para algum $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = \alpha(\Omega, p)$).*

A.4 Método de Sub- e Supersolução

Exibiremos agora um método para garantir a existência de solução para problemas em equações diferenciais. A ideia é semelhante à do Teorema de Rolle, mostraremos que entre uma subsolução e uma supersolução existe uma solução.

Nas considerações seguintes estaremos analisando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= F(\cdot, u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

com Ω sendo um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ de fronteira suave, $F : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ contínua, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, lipchitziana na segunda variável, ou seja, para algum $K > 0$,

$$|F(x, z_1) - F(x, z_2)| \leq K|z_1 - z_2| \quad \forall (x, z_1), (x, z_2) \in \Omega \times I. \tag{A.6}$$

Definição 26 (Solução Fraca) *Diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma **solução fraca** de (P) quando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega F(\cdot, u)\phi dx = 0 \quad \textit{para cada} \quad \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{A.7}$$

Definição 27 (Subsolução e Supersolução Fraca) *Se $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \phi dx - \int_\Omega F(\cdot, \underline{u})\phi dx \leq 0 \quad \textit{para cada} \quad \phi \in H_0^1(\Omega), \ \phi \geq 0 \ \textit{q.t.p.}, \tag{A.8}$$

*diremos que $\underline{u}$ é **subsolução fraca** de (P). De forma análoga, $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ é dita **supersolução fraca** de (P) quando satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \phi dx - \int_\Omega F(\cdot, \overline{u})\phi dx \geq 0 \quad \textit{para cada} \quad \phi \in H_0^1(\Omega), \ \phi \geq 0 \ \textit{q.t.p.}. \tag{A.9}$$

Observação 8 *Note que exigimos, implicitamente, nestas definições, $u(\Omega) \subset I$.*

Teorema 28 (Sub- e Supersolução) *Dadas $\underline{u}$ e $\overline{u}$ subsolução e supersolução, respectivamente, de (P) satisfazendo $\underline{u} \leq \overline{u}$ q.t.p. em Ω. Então existe uma solução (fraca) $u \in H_0^1(\Omega)$ de (P) satisfazendo*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \textit{q.t.p. em } \Omega.$$

Prova.

Por (A.6), existe uma constante C suficientemente grande, de modo que $F(\cdot, z) + Cz$ é não decrescente em z. De fato, se $z_1 \leq z_2$ então

$$(F(x, z_2) + Cz_2) - (F(x, z_1) + Cz_1) \geq (C - K)(z_2 - z_1) \geq 0$$

se $C > K$. Fixada tal constante, considere a sequência construída recursivamente da seguinte forma: $u_0 = \underline{u}$ e $u_{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca de.

$$\begin{cases} -\Delta u_{k+1} + Cu_{k+1} = F(\cdot, u_k) + Cu_k & \text{em} \quad \Omega, \\ u_{k+1} = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.10}$$

Afirmação 2 *A sequência acima está bem definida. Além disso, (u_k) é monótona não-decrescente e*

$$\underline{u} \leq u_k \leq \overline{u} \quad \textit{para todo } k.$$

Demostraremos este fato por indução. Suponha que a afirmação acima seja válida até k. Como $\underline{u} \leq u_k \leq \overline{u}$, então $u_k(x) \in I$ q. t. p. em Ω. Logo, podemos tomar $F(\cdot, u_k)$ q. t. p.. Em particular, $u_k \in H_0^1(\Omega)$, o que acarreta $f = F(\cdot, u_k) + Cu_k \in L^2(\Omega)$ pois,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |F(\cdot, u_k) + Cu_k|^2 &\leq \left(\int_\Omega |F(x,u) - F(x,z)| + |F(x,z)| + C|u|dx \right)^2 \\ &\leq \int_\Omega 2\left(|F(x,u) - F(x,z)|^2 + |F(x,z)|^2 + C|u|^2 dx \right) < \infty, \end{aligned}$$

onde $z \in I$ é qualquer. Consequentemente, pela Observação (7) da Seção (A.3) existe uma única $u_{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (A.10), ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_{k+1} \nabla \phi + Cu_{k+1}\phi dx = \int_\Omega (F(\cdot, u_k) + Cu_k)\phi dx \tag{P_k}$$

para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Subtraindo (P_k) de (P_{k-1}), fazendo $\phi = (u_k - u_{k+1})^+$ (Observação (5)) e usando a monotonicidade de $F(\cdot, z) + Cz$ obtemos

$$\int_\Omega \nabla(u_k - u_{k+1}) \nabla(u_k - u_{k+1})^+ + C(u_k - u_{k+1})(u_k - u_{k+1})^+ dx \leq 0. \tag{A.11}$$

Como

$$\nabla(u_k - u_{k+1})^+ = \begin{cases} \nabla(u_k - u_{k+1}) & \text{q.t.p. em } \{u_k - u_{k+1}\} \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{u_k - u_{k+1}\} \end{cases},$$

temos que

$$\int_\Omega |\nabla(u_{k+1} - u_k)^+|^2 \leq - \int_\Omega C(u_{k+1} - u_k)^+ \leq 0,$$

o que implica $(u_{k+1} - u_k)^+ = 0$. Portanto $u_{k+1} \geq u_k$.

A prova de que $u_{k+1} \leq \overline{u}$ é análoga. Subtraindo (A.9) de P_k, tomando $\phi = (u_k - \overline{u})^+$ e usando a monotonicidade de $F(\cdot, z) + Cz$ temos

$$\int_\Omega \nabla(u_k - \overline{u})\nabla(u_k - \overline{u})^+ + C(u_k - \overline{u})(u_k - \overline{u})^+ dx \leq 0. \tag{A.12}$$

e, como anteriormente, concluímos que $u_{k+1} \leq \overline{u}$.

Para terminar nossa argumentação por indução basta mostrar que $u_1 \geq u_0$ uma vez que as demais propriedades são trivialmente satisfeitas por u_0. Ora, subtraindo (A.8) de P_1 temos que

$$\int_\Omega \nabla(\underline{u} - u_1)\nabla(\underline{u} - u_1)^+ + C(\underline{u} - u_1)(\underline{u} - u_1)^+ dx \leq 0 \tag{A.13}$$

e o resultado segue como anteriormente.

Afirmação 3 *A sequência u_k definida acima converge em $H_0^1(\Omega)$ e $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ é solução fraca de (P).*

Graças à Afirmação (2), podemos definir q.t.p.

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x).$$

Donde segue que $|u_k(x) - u(x)|^2 \to 0$ pontualmente em quase todo ponto. E, como $|u_k(x) - u(x)|^2 \leq 2|\overline{u}|^2$ para todo k, com $2|\overline{u}|^2 \in L^1(\Omega)$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garantindo, assim, que

$$u_k \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Agora, subtraindo (P_{k-1}) de (P_k), fazendo $\phi = u_{k+1} - u_k$ e, chamando

$$G(\cdot, z) := F(\cdot, z) + Cz,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_{k+1} - u_k)|^2 dx &= \int_\Omega (G(\cdot, u_k) - G(\cdot, u_{k-1}))(u_{k+1} - u_k) - C(u_{k+1} - u_k)^2 dx \\ &\leq \int_\Omega (K + C)|u_k - u_{k-1}||u_{k+1} - u_k| - C(u_{k+1} - u_k)^2 dx \to 0.\end{aligned}$$

Portanto (u_k) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$, donde temos que $u \in H_0^1(\Omega)$, por unicidade do limite. Fazendo $k \to \infty$ em (P_k) ficamos com

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + Cu\phi dx = \int_\Omega (F(\cdot, u) + Cu)\phi dx \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega F(\cdot, u)\phi dx,$$

ou seja, u é solução fraca de (P), e o Teorema está provado. ∎

Vale um resultado análogo para o estudo do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = F(\cdot, u) & \text{em} \quad B_R \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R \end{cases}, \tag{Q}$$

onde as soluções fracas são tomadas no seguinte sentido:

Definição 29 *Dizemos que $u \in L^1(B_R)$ é **solução fraca de** (Q) quando*

$$\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx = \int_{B_R} F(\cdot, u)dx \quad \forall \phi \in C^4(B_R) \cap H_0^2(B_R).$$

Quando

$$\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx \leq \int_{B_R} F(\cdot, u)dx \quad \forall \phi \in C^4(B_R) \cap H_0^2(B_R),$$

dizemos que u é uma subsolução fraca de (Q) e, quando

$$\int_{B_R} u\Delta^2\phi dx = \int_{B_R} F(\cdot, u)dx \quad \forall \phi \in C^4(B_R) \cap H_0^2(B_R),$$

dizemos que u é uma supersolução de (Q).

Teorema 30 *Dadas $\underline{u}$ e $\overline{u}$ subsolução e supersolução, respectivamente, de (Q) satisfazendo $\underline{u} \leq \overline{u}$ q.t.p. em Ω. Então existe uma solução (fraca) $u \in L^1(B_R)$ de (Q) satisfazendo*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{q.t.p. em } B_R.$$

Prova.

A demonstração é análoga à do Teorema (28) e faz-se substituindo Ω por B_R, $H_0^1(\Omega)$ por $L^1(B_R)$, Observação (7) por Lema (22.1) e (Seção (A.3)), Princípio do Máximo por Princípio de Boggio (Seção (A.2)). ∎

A.5 Regularidade para os Problemas (S_λ) e (R_λ)

Vejamos agora como os Teoremas da Seção anterior foram utilizados para obter regularidade de soluções nos problema estudados. Para tanto precisamos do seguinte Lema.

Lema 30.1 *Dadas $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, com $0 < \alpha, \beta < 1$ e $1/g$ limitada em Ω então,*

$$\frac{f}{g} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$$

onde $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$.

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(y)}\right| &= \left|\frac{1}{g(x)g(y)}\right| |f(x)g(y)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(y)g(x)| \\ &\leq C\left(|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(x)||f(x)-f(y)|\right) \\ &\leq C\left(|x-y|^{\alpha}+|x-y|^{\beta}\right) \\ &\leq C|x-y|^{\gamma}.\end{aligned}$$

■

Proposição 11 *Se $u \in H$ é solução fraca de (P) com $a = \|u\|_\infty < 1$, isto é, $0 \leq u \leq a < 1$ q.t.p. em Ω então u é solução clássica.*

Prova.

$$h := \frac{f}{(1-u)^2} \in L^p(\Omega) \text{ para todo } p$$

visto que $s \mapsto \frac{1}{(1-s)^2}$ é limitada em $[0,a] \subset (0,1)$. Daí, usando o Teorema (25), garantimos a existência de uma única função $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $L\tilde{u} = h$, como u é a única função de $H_0^1(\Omega)$ que satisfaz tal equação, devemos ter $\tilde{u} = u$.

Feitas tais observações a cerca de u, concluímos que $g \in C^{0,\gamma}$ para $\gamma = \min\{\alpha,\beta\}$ (veja Lema (30.1)). Daí, usando o Teorema (24) $u \in C^{2m,\gamma}(\overline{\Omega})$, ou seja, u é solução clássica do problema. ■

Observação 9 *Se v é supersolução de (S_λ) (resp. (R_λ)), como 0 é sempre subsolução, o Teorema (28) (resp. (30)) garante a existência de uma solução fraca u satisfazendo $0 \leq u \leq v \leq \|v\|_\infty < 1$. Pela observação anterior temos que u é solução clássica de (S_λ) (resp. (R_λ)).*

Referências Bibliográficas

[1] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions*, I. Comm. Pure Appl. Math. 12 pp. 623-727, (1959).

[2] Arioli, G., Gazzola, Grunau H.-C., Mitidieri, E., *A Semilinear Fourth Order Elliptic Problem with Exponencial Nonlinearity*, SIAM J. Math. anal. 36 pp. 1226-1258, (2005).

[3] Bandle, C., *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Monographs and Studies in Mathematics, Boston, Mass-London, Pitman, (1980).

[4] Berchio, E., Gazzola, F., Weth, T., *Radial Symetry of Positive Solutions to Nonlinear Polyaharmonic Dirichlet Problems*, J. Reine Angew. Math. 620 pp. 165-183, (2008).

[5] Boggio, T., *Sulle Sunzioni de Green d'Ordine m.*, Rend. Circ. Mat. Palermo pp. 97-135, (1905).

[6] Brézis H., *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson (1987)

[7] Cassani, D., do Ó, J. M., Ghoussoub N., *On a Fouth Order Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity*, J. Adv. Nonlinear Studies 9(1) pp. 177-179, (2009).

[8] Esposito, P., Ghoussoub, N., Guo, Y., *Analysis of Partial Differential Equations Modeling Electrostatic MEMS*. preprint, (2009).

[9] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, (1998).

[10] Garabedian, P. R., *A partial Differential Equation Arising in Conformal Mapping*, Pacific J. Math., 1 pp. 485-524 (1951).

[11] Ghoussoub, N., Guo, Y., *On the Partial Differential Equations of Eletrostatic MEMS Devices: Estationary Case*. SIAM J. Math. Anal., 38 pp. 1423-1449, (2006/2007).

[12] Gilbarg, D., Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, (1977).

[13] Kesavan S., *Symmetrization and applications*, Series in Analysis - Vol. 3. (2006)

[14] Moreau, J.-J., *Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 255 pp. 238-240 (1962).

[15] Nathanson H. C., Newell W. E., Wickstrom R. A., Davis J. R., *The Resonant Gate Transistor*, IEEE Trans on Elect Devices, 14(3) pp. 117-133, (1967).

[16] Palesco, J. A., Bernstein D. H., *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman Hall and CRC Press, (2002).

[17] Shapiro H. S. and Tegmark M., *An Elementary Proof that the Biharmonic Green Function of an Eccentric Ellipse Changes Sign*, SIAM, Vol. 36: pp. 99-101 (1994).

[18] Struwe, M., *Variational Methods and their Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer-Verlag, (1990).

[19] Taylor G. I., *The Coalescence of closely Spaced Drops when they are*, IEEE Trans on Elect Devices, 14(3) pp. 117-133, (1967).