

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação de Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

Equações Elípticas com Não Linearidades de Sinal  
Indefinido

por

Anselmo Ribeiro Lopes

Sob orientação de

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

e

co-orientação de

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Fevereiro de 2005

**Equações Elípticas com Não Linearidades de Sinal Indefinido**

por

**Anselmo Ribeiro Lopes**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal da Paraíba  
Como parte dos requisitos necessários para obtenção do  
Título de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração: Análise**

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó** (Orientador)

---

**Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

---

**Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros**

---

**Prof. Dr. Marco Aurelio S. Souto** (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba  
CCEN-Departamento de Matemática  
Curso de Pós-Graduação de Matemática

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, a minha família, minha companheira e família, aos amigos, aos professores Everaldo, Emerson, Djairo, Flávia, Osmundo e Aldo, em especial ao meu orientador Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

# Dedicatória

*Ao grande amigo, Nilton Gama de Sousa (in memoriam)*

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a classe de problemas de valor de fronteira (\*)  $-\Delta u + (q(x) - \tau)u = a(x)u^p$  em  $\Omega$ , com  $Bu = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , onde  $p > 1$ ,  $q$  é contínua,  $\tau$  é um parâmetro real e  $B$  denota condição de fronteira de Neumann, ou Dirichlet, ou do tipo-misto. Este problema é bastante conhecido se  $a > 0$  em  $\Omega$ , ou  $\tau < \mu_1$ , o principal autovalor de  $-\Delta + q(x)$ . Aqui, a novidade fica por conta de permitirmos que  $a$  mude de sinal em  $\Omega$  e nenhuma restrição seja imposta sobre  $\tau$ . Assim, obtemos algumas condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução positiva. Em particular, se  $\varphi$  é a autofunção associada a  $\mu_1$ , e  $a$  assume valores positivos e negativos, a seguinte afirmação vale: Se (i)  $\int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x)dx < 0$ , então existe  $\tau^* > \mu_1$ , tal que o problema (\*) tem uma solução para cada  $\tau \in [\mu_1, \tau^*)$ , enquanto não existe solução para  $\tau > \tau^*$ . Reciprocamente, a condição (i) também é necessária para a existência de soluções. A existência de solução é obtida via minimização, enquanto a condição necessária (i), segue por uma generalização da Identidade de Picone. Além disso, estudamos o problema (\*\*\*)  $-\Delta u + m(x)u = a(x)u^p$  em  $\Omega$ , com  $\partial_{\nu}u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , onde  $p > 1$ ,  $m$  é contínua e novamente  $a$  muda de sinal. Sob hipóteses adicionais, a condição  $\int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x)dx < 0$ , caracteriza mais geralmente a existência de soluções do problema (\*\*\*), somente em termos de  $\mu_1$ . Os métodos utilizados são basicamente os mesmos que do problema (\*).

# Abstract

In this work, we study the class of boundary value problems (\*)  $-\Delta u + (q(x) - \tau)u = a(x)u^p$  in  $\Omega$ ,  $Bu = 0$  on  $\partial\Omega$ , where  $p > 1$ ,  $q$  is continuous,  $\tau$  is a real parameter, and  $B$  denotes either the Neumann, or the Dirichlet, or a mixed-type condition. The problem was already known if  $a > 0$  in  $\Omega$ , or  $\tau < \mu_1$ , the principal eigenvalue of  $-\Delta + q(x)$ . Here  $a$  is allowed to change sign in  $\Omega$ , no restrictions are imposed on  $\tau$ , and some necessary and sufficient conditions for the existence of a positive solution are provided. In particular, if  $\varphi$  denotes the eigenfunction associated with  $\mu_1$ , and  $a$  takes both positive and negative values, the following assertion holds: If (i)  $\int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x)dx < 0$ , then there exists  $\tau^* > \mu_1$  such that problem (\*) has a solution for every  $\tau \in [\mu_1, \tau^*)$ , while no solution exists for  $\tau > \tau^*$ . Conversely, condition (i) is also a necessary condition for existence of solutions. The existence part of the proof is obtained by a constrained minimization method and the necessary part is derived from a generalized "Picone identity". Moreover we study the problem (\*\*)  $-\Delta u + m(x)u = a(x)u^p$  in  $\Omega$ ,  $\partial_{\nu}u = 0$  on  $\partial\Omega$ , where  $p > 1$ ,  $m$  is continuous and, again  $a$  change sign. Under the additional hypothesis the condition  $\int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x)dx < 0$ , implies more generally the existence of solutions the problem (\*\*), with respect only to  $\mu_1$ . The used methods are basically the same as used in problem (\*).

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| Notações  | 1         |
| Introdução  | 4         |
| Preliminares  | 6         |
| 0.1 Resultados Básicos . . . . .  | 6         |
| 0.2 Identidade de Picone . . . . .  | 8         |
| 0.3 Método de Subsolução e Supersolução . . . . .                               | 9         |
| 0.4 Multiplicadores de Lagrange . . . . .                                       | 10        |
| 0.5 O Passo da Montanha . . . . .   | 10        |
| 0.6 Princípio do Máximo . . . . .   | 11        |
| 0.7 Regularidade . . . . .  | 13        |
| <b>1 Um Problema Elíptico Homogêneo com não Linearidade de Sinal Indefinido</b> | <b>15</b> |
| 1.1 Resultados Principais . . . . .   | 16        |
| 1.2 Prova do Teorema 1.1 . . . . .  | 18        |
| 1.3 Condições Necessárias . . . . .   | 31        |
| 1.4 Caso Coercivo . . . . .   | 33        |
| 1.5 Caso Não Coercivo . . . . .   | 35        |
| <b>2 Mais Considerações sobre Equações Elípticas Superlineares Indefinidas</b>  | <b>45</b> |
| 2.1 Resultados de Existência . . . . .  | 46        |
| 2.2 Algumas considerações sob as condições dos Teoremas 2.3 e 2.4 . . . . .     | 56        |
| Referências   | 64        |

# Notações

## Notações Gerais

|  |  |
|--|--|
| $B_\delta(x)$  | bola aberta de centro $x$ e raio $\delta$  |
| $\rightharpoonup$  | convergência fraca   |
| $ A $  | medida de Lebesgue de um conjunto $A$  |
| q.t.p  | quase toda parte   |
| $\text{supp}f$   | suporte da função $f$  |
| $\text{div}u$  | divergente de $u$  |
| $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ | gradiente de $u$   |
| $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  | Laplaciano de $u$  |
| $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u$  | derivada normal exterior   |
| $(u)_\Omega = \frac{1}{ \Omega } \int_\Omega u dx$   | média de $u$ em $\Omega$   |
| $\cdot$ ou $(,)$   | denotaram produto interno  |
| $C, C_1, C_2, C_3, \dots$  | denotam constantes positivas   |
| $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  | aberto   |
| $\bar{\Omega}$   | fecho do conjunto $\Omega$   |
| $\partial\Omega$   | fronteira de $\Omega$  |
| $p'$   | expoente conjugado de $p$ , isto é, $1/p + 1/p' = 1$ , onde $1 \leq p \leq \infty$ |



## Espaços de Funções

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mensurável sobre } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ u \text{ mens. sobre } \Omega \text{ e existe } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p sobre } \Omega \}$$

$$C_c(\Omega) \quad \text{funções contínuas com suporte compacto em } \Omega$$

$$C^k(\Omega) \quad \text{funções } k \text{ vezes continuamente diferenciáveis sobre } \Omega, k \in \mathbb{N}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C(\bar{\Omega}) \quad \text{funções contínuas sobre } \bar{\Omega}$$

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\} \text{ com } 0 < \alpha < 1$$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\},$$

$$1 \leq p \leq \infty$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \text{ é o completamento de } C_c^1(\Omega), \text{ na norma de } W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$$

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$|u|_0 = \sup_{x \in C(\bar{\Omega})} |u(x)|$$

norma do espaço  $C(\bar{\Omega})$ .

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}$$

norma do espaço de Lebesgue  $L^p(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

norma do espaço de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$

$$|u|_{0,\alpha} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

norma do espaço  $C(\bar{\Omega})$

$p^*$

exponente crítico de Sobolev definido por

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{se } 1 \leq p < N \\ \infty & \text{se } p \geq N \end{cases}$$

# Introdução

Nesta dissertação, estudaremos a existência de soluções fracas positivas de equações diferenciais parciais elípticas semilineares. A classe das equações que iremos estudar é bem particular, no sentido de que tais problemas têm uma característica bem interessante: o sinal indefinido na parte não linear. Mais explicitamente, os problemas que iremos tratar são:

**Problema 1.** Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave e limitado, procuraremos soluções positivas do seguinte problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u + (q(x) - \tau)u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $q$  e  $a$  são funções contínuas com  $a$  mudando de sinal em  $\Omega$ ,  $\tau$  é um parâmetro real,  $p > 1$  e  $B$  é um operador de fronteira de Neumann, ou Dirichlet, ou do tipo misto.

**Problema 2.** Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio suave e limitado, procuraremos soluções positivas do seguinte problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $m$  e  $a$  são funções contínuas com  $a$  mudando de sinal em  $\Omega$  e  $p > 1$ .

Nos últimos anos problemas com não linearidades de sinal indefinido, vem sendo o objeto de estudo de matemáticos de renome. A sua importância vai além do simples fato de resolver tais equações, estes problemas modelam problemas físicos-matemáticos e vêm sendo estudados desde 1800, tais como: teoria da combustão, física nuclear, dinâmica de populações, etc (cf. [8]).

O problema 1, foi abordado em 1995 no artigo [6]. Quando a função  $a$  tem sinal definido, resultados de existência já são bem conhecidos. Quando  $a$  muda de sinal, será necessário impor algumas restrições sobre  $\tau$ , de modo a obtermos condições necessárias e suficientes para existência de soluções para o problema (1) (cf. Teorema 1.2 e 1.3). Para provar existência de solução sob hipóteses adicionais, utilizaremos o método de minimização vinculada; já a parte “necessária”, conseguiremos a partir de uma generalização da identidade de Picone (cf. seção 0.2).

No artigo [6], os autores conjecturam se poderiam obter a existência de solução do problema 2, para uma função  $m$  qualquer, sem substituí-la por uma função do tipo do problema 1. E se desta forma poderiam obter tais resultados sem dependência do parâmetro  $\tau$ . A resposta a esta conjectura foi respondida no artigo [23]; o autor mostra que a resposta em geral não é verdade, mas sob várias hipóteses adicionais obtém alguns resultados de existência. A grande importância deste trabalho é o fato do autor mostrar que tais hipóteses adicionais são “ótimas”, num sentido que será melhor esclarecido no decorrer da dissertação.

No decorrer da dissertação, estaremos sempre fazendo referência aos resultados demonstrados, indicando o ano, bem como a referência bibliográfica. Acreditamos que com isso, aquele que vier a ter interesse nestes tipos de problemas, poderão fazer aqui uma breve pesquisa introdutória. A dissertação a seguir esta dividida da seguinte forma: Primeiramente, enunciamos e demonstramos alguns dos resultados que utilizaremos, para obter as respostas dos problemas propostos acima. O capítulo 1, é dedicado ao estudo do problema 1, e por fim, no capítulo 2, o estudo do problema 2.

# Preliminares

Daremos aqui, enunciados e provas de alguns resultados relevantes e importantes para uma melhor compreensão do que será feito neste trabalho. Ou seja, este pode ser visto como um apêndice. Assim, por várias vezes, com o objetivo de facilitar a leitura, vamos recorrer à tais resultados usando referências cruzadas. Acreditamos que isto deixará a escrita do texto menos densa, pois não teremos que enunciar e provar estes resultados no meio da prova de uma proposição ou algo parecido.

## 0.1 Resultados Básicos

Em várias partes deste trabalho iremos recorrer aos seguintes resultados:

**Teorema 0.1** ([16], **Teorema da Divergência**) *Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$ . Se  $F \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x))dx = \int_{\partial\Omega} F(\sigma) \cdot \nu(\sigma)d\sigma. \quad (3)$$

Notemos que em particular para  $F = \nabla u$  temos que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u(x))dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma). \quad (4)$$

Como corolário deste teorema temos as fórmulas de Green, a saber:

**Corolário 0.1** ([16], **Fórmulas de Green**) *Sejam  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$  e  $u, v$  duas funções de classe  $C_0^2(\mathbb{R}^N)$ . Então,*

$$\int_{\Omega} [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)u(\sigma) \right] d\sigma, \quad (5)$$

$$- \int_{\Omega} v(x)\Delta u(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)v(\sigma)d\sigma. \quad (6)$$

Um outro Teorema de caráter relevante é a desigualdade de Hölder, enunciada abaixo:

**Teorema 0.2** ([7], **Teorema IV.6**) *Sejam,  $f \in L^p$  e  $g \in L^{p'}$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $fg \in L^1$  e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

Enunciaremos agora o importante *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*. Este Teorema nos diz que, sob algumas hipóteses, a operação de integração é contínua.

**Teorema 0.3 ([5], Teorema 5.6)** *Seja  $(f_n)$  uma seqüência de funções de  $L^1(\Omega)$ . Suponhamos que:*

- (i)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p em  $\Omega$ ,
- (ii) existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que para todo  $n \geq 1$ , temos

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Então  $f \in L^1(\Omega)$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

O próximo Teorema, juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, será bastante útil para provarmos resultados de convergência.

**Teorema 0.4 ([7], Teorema IV.9)** *Sejam  $(f_n)$  uma seqüência de  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Então podemos extrair uma subseqüência  $(f_{n_k})$  tal que

- (i)  $f_{n_k} \rightarrow f(x)$  q.t.p em  $\Omega$  e
- (ii)  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ ,  $\forall k$  e q.t.p em  $\Omega$ , com  $h \in L^p(\Omega)$ .

**Teorema 0.5 ([7], Proposição III.5)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_n)$  uma seqüência em  $E$ . Se  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente na topologia fraca de  $E$ , então  $\|x_n\|$  é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

**Teorema 0.6 ([7], Teorema III.27)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo e  $(x_n)$  uma seqüência limitada em  $E$ ; então existe uma subseqüência  $(x_{n_k})$  que converge na topologia fraca de  $E$ .*

**Teorema 0.7 ([16] ou [12], Desigualdade de Poincaré-Wirtinger)** *Sejam  $\Omega$  um aberto, limitado e conexo de  $\mathbb{R}^N$ , com  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então, existe uma constante  $C$ , dependendo apenas de  $n$ ,  $p$  e  $\Omega$ , tal que*

$$\|u - (u)_{\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda função  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

Em particular, sobre o espaço  $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : (v)_{\Omega} = 0\}$ , temos que  $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$  é uma norma equivalente a norma de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Teorema 0.8** ([7], **Teorema de Rellich-Kondrachov**) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado de classe  $C^1$  e  $1 \leq p < N$ . Então:*

- (a)  $W^{1,p}(\Omega)$  está imerso continuamente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, p^*]$ ;
- (b)  $W^{1,p}(\Omega)$  está imerso compactamente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, p^*)$ .

*Em particular para  $p = 2$ , temos que:*

- (a')  $H^1(\Omega)$  está imerso continuamente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, 2^*]$  e
- (b')  $H^1(\Omega)$  está imerso compactamente em  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, 2^*)$ .

## 0.2 Identidade de Picone

Para provarmos condições necessárias para a solubilidade da equação (1), vamos utilizar uma generalização da identidade de Picone. A identidade de Picone, trata-se de uma identidade diferencial, a saber:

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\varphi}{u} (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] = \varphi \Delta \varphi - \frac{\varphi^2}{u} \Delta u + u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2,$$

onde  $u, \varphi \in C^2$ , com  $u > 0$ . Para maiores detalhes sobre esta identidade, confira as referências [11] e [14] contidas em [6]. Vamos usar a seguinte generalização:

**Proposição 0.1 (Generalização da identidade de Picone)** *Sejam  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $u, \varphi \in C^2$ ,  $u > 0$ . Temos a seguinte igualdade:*

$$\operatorname{div} \left[ \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] = \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2. \quad (7)$$

**Prova.** Ora,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] \\ &= \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (\nabla u \cdot \nabla \varphi + u \Delta \varphi - \nabla \varphi \cdot \nabla u - \varphi \Delta u) \\ &\quad + (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\varphi}{u} \right) \\ &= \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\varphi}{u} \right) \\ &= \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$u \nabla \varphi - \varphi \nabla u = u^2 \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right).$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] &= \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + u^2 \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \cdot \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \\ &= \psi \left( \frac{\varphi}{u} \right) (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + u^2 \psi' \left( \frac{\varphi}{u} \right) \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2. \end{aligned}$$

■

A fórmula (7) é uma generalização da identidade de Picone. De fato, no caso especial  $\psi(t) = t$ , a fórmula em (7), reduz-se a:

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\varphi}{u} (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] = \varphi \Delta \varphi - \frac{\varphi^2}{u} \Delta u + u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2,$$

que é a identidade clássica de Picone.

### 0.3 Método de Subsolução e Supersolução

Muitas vezes iremos recorrer ao método de subsoluções e supersoluções. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

onde, por simplicidade, vamos tomar  $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x$  (para  $u$  fixo) e continuamente diferenciável em  $u$  (para  $x$  fixo). Por definição,  $\underline{u} \in C^1(\bar{\Omega})$  é uma subsolução (fraca) para o problema acima se  $\partial \underline{u} / \partial \nu = 0$  sobre  $\partial \Omega$  e

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} g(\cdot, \underline{u}) \, dx \leq 0, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

Similarmente,  $\bar{u} \in C^1(\bar{\Omega})$  é uma supersolução (fraca) do problema se a desigualdade acima vale no sentido oposto e também  $\partial \bar{u} / \partial \nu = 0$  sobre  $\partial \Omega$ . Consideremos o funcional energia associado ao problema (8):

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} G(x, u) \, dx, \quad \text{para } u \in H^1(\Omega),$$

onde  $G$  é a primitiva de  $g$ , isto é,  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) \, ds$ . De posse dessas definições e notações temos o seguinte:

**Teorema 0.9 ([23], Teorema 4)** *Suponhamos que  $\underline{u} \in C^1(\bar{\Omega})$  é uma subsolução, enquanto  $\bar{u} \in C^1(\bar{\Omega})$  é uma supersolução de (8) e que  $\underline{u} \leq \bar{u}$  em  $\Omega$ . Suponhamos também que  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  não são soluções de (8). Então existe uma solução  $u \in H^1(\Omega)$  do problema (8) satisfazendo a condição  $\underline{u} < u < \bar{u}$  em  $\Omega$ . Além disso, a segunda variação de  $I$  em  $u$  é não negativa, isto é,  $(I''(u)v, v) \geq 0$  para todo  $v \in H^1(\Omega)$ .*



## 0.4 Multiplicadores de Lagrange

**Definição 0.1** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $F \in C^1(X, \mathbb{R})$  e um conjunto de vínculos:*

$$S := \{v \in X : F(v) = 0\}.$$

*Suponhamos que para todo  $u \in S$ , temos que  $F'(u) \neq 0$ . Seja  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $c \in \mathbb{R}$  é valor crítico de  $J$  sobre  $S$  se existem  $u \in S$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $J(u) = c$  e  $J'(u) = \lambda F'(u)$ . O ponto  $u$  é um ponto crítico de  $J$  sobre  $S$  e o número real  $\lambda$  é chamado multiplicador de Lagrange para o valor crítico  $c$ .*

Utilizaremos o seguinte:

**Teorema 0.10 ([16], Multiplicadores de Lagrange)** *Sob as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que  $u_0 \in S$  é tal que*

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v).$$

*Então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

## 0.5 O Passo da Montanha

Nesta seção, daremos o enunciado do famoso Teorema do Passo da Montanha. Antes, porém precisamos introduzir uma condição de compacidade que é fundamental para garantirmos a existência de pontos críticos.

**Definição 0.2** *Seja  $E$  um espaço de Banach. Denotemos por  $C^1(E, \mathbb{R})$  o conjunto dos funcionais que são Fréchet diferenciáveis, com derivada de Fréchet contínua sobre  $E$ . Para  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ , dizemos que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale, que denotaremos por (PS), se qualquer seqüência  $(u_n) \subset E$ , tal que  $I(u_n)$  é limitada e  $I'(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , possui uma subsequência convergente.*

Notemos que esta definição nos dá uma espécie de compacidade sobre o funcional  $I$ . De fato, a condição (PS) implica que

$$K_c = \{u \in E : I(u) = c; \text{ e } I'(u) = 0\},$$

isto é, o conjunto de pontos críticos de  $I$ , tendo  $c$  como valor crítico, é compacto para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ . De posse desta definição temos o seguinte:

**Teorema 0.11 ([20], Teorema do Passo da Montanha)** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfazendo (PS). Suponhamos que  $I(0) = 0$  e*

- (i) *Existem  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$*
- (ii) *Existe  $e \in E \setminus B_\rho(0)$  tal que  $I(e) \leq 0 = I(0)$ .*

*Então,  $I$  possui um valor crítico  $c \geq \alpha$ . Além disso,  $c$  pode ser caracterizado como:*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u), \tag{9}$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Vamos enunciar ainda, um resultado que será importantíssimo para a demonstração do Teorema 1.5. Tal resultado é de uma versão refinada do Lema de Deformação. Aqui,  $E$  é um espaço de Banach,  $F_\delta = \{u \in E : \text{dist}(u, F) \leq \delta\}$  e  $J^c = \{u \in E : J(u) \leq c\}$

**Teorema 0.12** ([14], **Teorema 1.13**) *Sejam  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ ,  $F$  e  $G$  subconjuntos disjuntos e fechados em  $E$ . Sejam  $c \in \mathbb{R}$  e  $\delta > 0$ , números tais que  $F_{2\delta} \cap G = \emptyset$  e*

$$\forall u \in J^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap F_{2\delta} \Rightarrow \|J'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}.$$

Então, existe um homeomorfismo  $\eta : [0, 1] \times E \rightarrow E$ , tal que:

- (1)  $\eta(t, u) = u$ , se  $u \in G$  ou  $|J(u) - c| \geq 2\varepsilon$ ,
- (2)  $\eta(1, J^{c+\varepsilon} \cap F) \subset J^{c-\varepsilon} \cap F_{2\delta}$ ,
- (3)  $\|\eta(t, u) - u\| \leq 2\delta t$ .

## 0.6 Princípio do Máximo

Nesta dissertação, para obtermos a positividade da solução, muitas vezes iremos recorrer ao:

**Lema 0.1** [[12], *Lema de Hopf Refinado*] *Suponhamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é aberto,  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , e  $c \in L^\infty(\Omega)$ . Suponhamos além disso que,*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com  $u$  não identicamente nula.

1. Se para algum  $x_0 \in \partial\Omega$ , temos  $u(x_0) = 0$  e  $\Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0$ , então

$$\nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde  $\nu$  denota a normal unitária exterior.

2. Além disso,

$$u > 0 \text{ em } \Omega.$$

Notemos que, não estamos exigindo nenhuma condição sobre o sinal de  $c$ .

Antes de provarmos este Lema, necessitamos rever alguns resultados de princípios do máximo para equações diferenciais parciais elípticas. Seguiremos aqui a abordagem dada em [12]. Iremos considerar operadores elípticos  $L$ , tendo a forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^N b_i u_{x_i} - cu,$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c$  são contínuos e satisfazem a condição de elipticidade uniforme, que definiremos abaixo. Vamos supor também que  $a_{ij}$  é simétrica, isto é,  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**Definição 0.3** Dizemos que um operador diferencial  $L$  é (uniformemente) elíptico, se existir uma constante  $\lambda$ , tal que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad q.t.p \text{ em } \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Vamos supor que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é aberto e limitado e  $L$  é um operador uniformemente elíptico.

**Definição 0.4** Uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfazendo  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  é chamada de subsolução. Da mesma forma, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaz  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , dizemos que ela é uma supersolução.

**Lema 0.2 (Lema de Hopf para Supersoluções)** Suponhamos que  $c = 0$  e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Suponhamos ainda que,  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e que exista um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$ , tal que

$$u(x_0) \leq u(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, suponhamos que  $\Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0$ , isto é, que existe uma bola  $A \subset \Omega$  com  $x_0 \in \partial A$ . Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário a bola  $A$  em  $x_0$ . Se  $c \geq 0$  em  $\Omega$ , a mesma conclusão é válida desde que  $u(x_0) \leq 0$ .

**Teorema 0.13 (Princípio do Máximo Forte)** Suponhamos que  $\Omega$  é conexo, que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  e  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ .

(i) Se  $c = 0$  e  $u$  atinge seu máximo em  $\bar{\Omega}$  em um ponto interior, então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

(ii) Se  $u$  tem máximo global zero em  $\Omega$ , então  $u$  é identicamente nula em  $\Omega$ .

De posse desses resultados, definições e notações, estamos com condições de provar o Lema 0.1.

**Prova do Lema 0.1.** Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \bar{\Omega}$  e  $w(x) := e^{-\lambda x_1} u(x)$ , onde  $\lambda > 0$  será determinado posteriormente. Então  $u = e^{\lambda x_1} w$ , e portanto:

$$cu \geq \Delta u = \Delta(e^{\lambda x_1} w) = \lambda^2 u + 2\lambda e^{\lambda x_1} w_{x_1} + e^{\lambda x_1} \Delta w.$$

Assim,

$$-\Delta w - 2\lambda w_{x_1} \geq (\lambda^2 - c)w \geq 0, \quad \text{em } \Omega,$$

se  $\lambda = \|c\|_{L^\infty}^{1/2}$ .

Conseqüentemente,  $w$  é uma supersolução para o operador elíptico

$$Lw := -\Delta w - 2\lambda w_{x_1},$$

o qual não tem o termo de ordem zero.

Logo, pelo Teorema 0.13, segue que  $w > 0$  em  $\Omega$ . De fato, suponhamos que exista  $y_0 \in \Omega$ , tal que  $w(y_0) = 0$ . Como,  $w(x) = e^{-\lambda x_1} u(x)$  e  $e^{-\lambda x_1} > 0$ , devemos ter que  $u(y_0) = 0$ . Mas, sabemos que  $u \geq 0$  em  $\Omega$ , donde segue que  $y_0$  é ponto de mínimo para  $w$ . Portanto pelo Teorema 0.13, parte (ii), concluímos que  $w$  é constante em  $\Omega$ . Mas, como  $w(y_0) = 0$ , temos que  $w(y) = 0$  para todo  $y \in \Omega$ . Pela continuidade de  $w$  em  $\bar{\Omega}$  e a conexidade de  $\Omega$ , obtemos que  $w = 0$  em  $\bar{\Omega}$ , o que implica  $u = 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Absurdo, pois por hipótese  $u \neq 0$ . Portanto,  $w > 0$  em  $\Omega$ .

Agora, por hipótese, existe  $x_0 \in \partial\Omega$ , tal que  $w(x_0) = 0$ , e  $\Omega$  satisfaz a condição da bola interior em  $x_0$ . Além disso, pelo que acabamos de ver acima  $w(x_0) < w(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Assim, pelo Lema 0.2,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \nabla w(x_0) \cdot \nu(x_0) = e^{-\lambda x_1^0} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0),$$

pois  $u(x_0) = 0$ . O que demonstra (1). Além disso, (2) segue do fato de  $w > 0$  em  $\Omega$ . ■

## 0.7 Regularidade

Seja  $\Omega$  um domínio suave limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in C(\bar{\Omega})$  e  $p > 1$ .

**Teorema 0.14** *Suponhamos que  $u \in H^1(\Omega)$  é uma solução fraca do problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então  $u \in C^2(\Omega)$ .

Para a prova deste resultado, vamos utilizar resultados devido a Wang, que, para esclarecermos mais este trabalho, iremos enunciá-los aqui.

**Lema 0.3 ([24], Lema 5.1)** *Suponhamos que  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $u \in H^1(\Omega)$  é uma solução fraca de:*

$$\begin{cases} -\Delta u = b(x)u & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = \alpha(x)u & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $b \in L^{N/2}(\Omega)$ ,  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ ; então  $u \in L^t(\Omega)$ , para todo  $t \geq 1$ .

e

**Lema 0.4 ([24], Lema 5.2)** *Suponhamos que  $\partial\Omega \in C^2$ ,  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p \in (1, \infty)$ . Se  $u$  é uma solução de:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

**Prova do Teorema 0.14.** Em nosso caso,  $\alpha(x) = 0$ . Notemos que a equação  $-\Delta u = a(x)u^p$  pode ser reescrita como:

$$-\Delta u = (a(x)u^{p-1}) u.$$

Logo, devemos ver que  $(a(x)u^{p-1}) \in L^{N/2}(\Omega)$ . Como  $a \in C(\overline{\Omega})$  é suficiente que  $u^{p-1} \in L^{N/2}(\Omega)$ , ou equivalentemente,  $u^{[(p-1)N]/2} \in L^1(\Omega)$ . Ora, como vimos acima, temos que  $u \in L^r(\Omega)$ , para  $1 \leq r \leq 2^*$ . Então, devemos provar que  $1 \leq [(p-1)N]/2 \leq 2^*$ . De fato, suponhamos por contradição que  $[(p-1)N]/2 < 1$ . Obtemos que,  $N < 2/(p-1)$ , o que é um absurdo, pois os naturais não são limitados superiormente. Além disso, por (1.7) temos que  $p < 2^* - 1$ , isto é,

$$p < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow p-1 < \frac{4}{N-2} \Rightarrow \frac{(p-1)N}{2} < \frac{4N}{2(N-2)} = \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Portanto, pelo Lema 0.3, temos que  $u \in L^t(\Omega)$  para todo  $t \geq 1$ . Usando o Lema 0.4 conseguimos ver que  $u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$  para qualquer  $\alpha \in (0, 1)$  e graças as estimativas de Schauder ( cf. [13]) temos a regularidade de  $u$ . ■

# Capítulo 1

## Um Problema Elíptico Homogêneo com não Linearidade de Sinal Indefinido

Este capítulo é voltado ao estudo da existência de soluções positivas do seguinte problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

O operador fronteira  $B$  denota uma das seguintes condições de fronteira homogêneas:

- condição de fronteira de Neumann:

$$Bu := \partial_\nu u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega; \quad (1.2)$$

- condição de Dirichlet:

$$Bu := u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega; \quad (1.3)$$

- condição de Robin ou do tipo misto:

$$Bu := \partial_\nu u + \alpha(x)u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega; \quad (1.4)$$

onde  $\alpha > 0$  é uma função contínua dada sobre  $\partial\Omega$  e  $\nu$  é a normal unitária exterior.

Consideraremos  $\Omega$  um domínio suave limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $a$  será uma função contínua que muda de sinal em  $\Omega$  e o expoente  $p > 1$  (motivo pelo qual, denominamos *problema superlinear*).

A terminologia *indefinido* significa a mudança de sinal da função  $a$ ; foi inicialmente utilizada por Hess e Kato, em um trabalho sobre problemas lineares de autovalores (cf.[15]).

Quando a função  $a$  é positiva, há vários resultados clássicos na literatura com condição de fronteira de Dirichlet, ou seja, do tipo (1.3). De fato, existem muitos resultados de existência de soluções para problemas mais gerais do tipo:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ Bu = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Estes resultados envolvem hipóteses no termo não linear  $f(x, u)$ , que no caso em que consideramos  $f(x, u) = a(x)u^p$ , implica em particular que  $a > 0$  em  $\bar{\Omega}$ .

Aqui, a situação é bem diferente do caso em que  $a > 0$ . O passo crucial para resolvermos o problema em questão é: interpretarmos a relação entre o caráter indefinido e as propriedades espectrais do operador linear no lado esquerdo de (1.1), sobre diferentes condições de fronteira.

## 1.1 Resultados Principais

Vamos considerar em princípio o problema mais simples, o caso “não coercivo”, com condições de fronteira do tipo (1.2), isto é, condição de fronteira de Neumann. O modelo deste problema é o seguinte:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde  $a \in C(\bar{\Omega})$ .

Para resolvermos este problema, precisamos de hipóteses sobre a potência  $p$ , a saber:

$$1 < p < 2^* - 1 \text{ se } N \geq 3 \text{ e } p > 1 \text{ no caso } N = 1, 2. \quad (1.7)$$

Por todo o texto, denotaremos:

- (a)  $\Omega^+ := \{x \in \Omega; a(x) > 0\}$ ;
- (b)  $\Omega^- := \{x \in \Omega; a(x) < 0\}$  e
- (c)  $\Omega^0 = \{x \in \Omega : a(x) = 0\}$ , com  $|\Omega^0| = 0$ .

**Teorema 1.1 (1995, [6])** *Existe uma solução positiva de (1.6) se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*

$$a \text{ muda de sinal em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} a(x) dx < 0.$$

Como dito acima, a discussão envolve o primeiro autovalor  $\mu_1$  do operador linear do lado esquerdo de (1.1), isto é, envolve o problema:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi + m(x)\varphi = \mu_1 \varphi & \text{em } \Omega \\ B\varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

No sentido de enfatizá-lo, vamos introduzir o parâmetro  $\tau$ , de modo que  $-\tau$  seja o primeiro autovalor do operador linear. Para isto, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + [q(x) - \tau]u = a(x)u^p, & u > 0 & \text{em } \Omega \\ Bu = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde  $\tau$  é um parâmetro real e  $q$  é uma função contínua dada. Vamos supor que: o operador linear  $-\Delta + q(x)$ , com a correspondente condição de fronteira, tem 0 como seu primeiro autovalor, ou seja, pedimos a seguinte condição sobre  $q$ :

$$\begin{cases} \text{existe } \varphi > 0, \text{ tal que} \\ -\Delta\varphi + q(x)\varphi = 0 & \text{em } \Omega; \quad B\varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.10)$$

Desta forma, o primeiro autovalor  $\mu_1$  de (1.8) é  $\mu_1 = -\tau$ , pois temos:

$$-\Delta\varphi + [q(x) - \tau]\varphi = -\Delta\varphi + q(x)\varphi - \tau\varphi = 0 - \tau\varphi = -\tau\varphi \text{ em } \Omega$$

e  $B\varphi = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

O próximo resultado indica condições necessárias sobre  $a$  para a solubilidade do problema (1.9).

**Teorema 1.2 (1995, [6])** *Suponhamos que (1.10) vale e que (1.9) tem uma solução. Então, necessariamente:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x) < 0 & \text{se } \tau > 0 \\ (ii) \quad & \Omega^+ \neq \emptyset & \text{se } \tau < 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

(iii) *No caso  $\tau = 0$ , ambos (i) e (ii) são condições necessárias para a solubilidade de (1.9).*

Sobre a existência de soluções de (1.9), temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.3 (1995, [6])** *Suponhamos que,*

$$(i) \quad \Omega^+ \neq \emptyset, \quad \Omega^- \neq \emptyset \text{ e}$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1}(x) < 0.$$

*Então, existe  $\tau^*$  tal que o problema (1.9) tem pelo menos uma solução para  $0 \leq \tau < \tau^*$  e não existe solução para  $\tau > \tau^*$ .*

**Observação 1.1** *Notemos que o Teorema 1.1 é um caso particular dos Teoremas 1.2 e 1.3.*



No sentido de dar uma descrição completa do problema (1.1), mencionamos aqui dois resultados essencialmente conhecidos, quando se observa os casos em que  $a$  não muda de sinal. Então, a situação é simples e obtemos uma condição necessária e suficiente.

**Proposição 1.1 (1995, [6])** *Suponhamos que  $a < 0$  em  $\Omega$ . Então o problema (1.1) tem solução se, só se,  $\mu_1 < 0$ .*

**Proposição 1.2 (1995, [6])** *Suponhamos que  $a > 0$  em  $\Omega$ . Então o problema (1.1) tem solução se, só se,  $\mu_1 > 0$ .*

Finalmente, vamos considerar o caso em que  $\mu_1 > 0$ , o que chamamos de “caso coercivo”, uma vez que o operador linear é coercivo. Então, temos:

**Teorema 1.4 (1995, [6])** *Suponhamos  $\mu_1 > 0$ . Então, o problema (1.1) tem solução se, só se,  $a(x_0) > 0$  para algum  $x_0 \in \Omega$*

Por conveniência e simplicidade, apresentaremos as provas para condições de fronteira do tipo (1.2), isto é, por agora temos que  $Bu := \partial_\nu u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . As provas são análogas para os outros casos (1.3) e (1.4).

## 1.2 Prova do Teorema 1.1

A fim de ilustrar as idéias e motivar-nos, provaremos inicialmente o Teorema 1.1, embora este seja consequência dos Teoremas 1.2 e 1.3.

Consideremos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Mostraremos que a seguintes condições

$$\int_{\Omega} a(x) dx < 0, \quad \text{e} \quad (1.13)$$

$$a \text{ é positivo em algum lugar em } \Omega, \quad (1.14)$$

são necessárias e suficientes para a existência de uma solução positiva de (1.12).

Para vermos que (1.13) e (1.14) são condições necessárias, observemos que: se  $u$  é uma solução positiva de (1.12), então  $u > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . De fato, suponhamos que  $u$  não seja estritamente positiva em  $\bar{\Omega}$ . Por hipótese, sabemos que  $u \geq 0$  em  $\bar{\Omega}$  e  $u$  é não trivial. Logo, como  $u > 0$  em  $\Omega$  deve existir  $x_0 \in \partial\Omega$ , tal que  $u(x_0) = 0$ . Além disto, a equação em (1.12), pode ser reescrita como:

$$-\Delta u - (a(x)u^{p-1})u = 0.$$

Notemos que,

$$\frac{a(x)}{u^{1-p}} \in L^\infty(\Omega),$$

pois  $a$  é limitada pelo seu máximo, uma vez que  $a$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ , que é um compacto e, além disso,  $u \in L^r$  para  $1 \leq r \leq 2^*$ , este é o caso de  $p - 1$  graças a (1.7). Pelo Teorema 0.14, temos que  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Assim, estamos sob as hipóteses do Lema 0.1, dado na página 11, e então:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

o que contradiz a condição de fronteira em (1.12). Logo  $u > 0$  em  $\bar{\Omega}$ .

Agora, integrando (1.12) e usando a fórmula de Green (cf. (6)), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x) dx &= \int_{\Omega} -\Delta u u^{-p} dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla(u^{-p}) dx - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u u^{-p} d\sigma \\ &= -p \int_{\Omega} |\nabla u|^2 u^{-p-1} dx < 0, \end{aligned}$$

pois  $\partial_{\nu} u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  e  $u > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Portanto (1.13) é necessária.

Além disso, integrando diretamente (1.12) e usando o Teorema da Divergência, temos que:

$$\int_{\Omega} a(x) u^p dx = - \int_{\Omega} \Delta u dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) = - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u d\sigma = 0.$$

Logo, (1.14) também é necessária.

Com o objetivo de estudarmos a existência de soluções sob as hipóteses (1.13) e (1.14), vamos considerar o seguinte problema variacional:

$$\max_{u \in S} I, \tag{1.15}$$

onde  $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$I(u) = \int_{\Omega} a(x) |u|^{p+1} dx \quad \text{e} \tag{1.16}$$

$$S := \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 1 \right\}.$$

O próximo resultado completa a prova do Teorema 1.

**Proposição 1.3 (1995, [6])** *Suponhamos (1.13) e (1.14). Então o máximo em (1.15) é finito e atingido por alguma função  $u > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Além disso, existe  $\sigma > 0$ , tal que  $w = \sigma u$  é uma solução de (1.12).*

**Prova.** Notemos primeiramente que não é verdade, em geral, que  $\sup \{I(u); u \in S\}$  seja finito, sem supormos condições adicionais como (1.13) e

(1.14). De fato, se  $a(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ , então  $\int_{\Omega} a(x) dx > 0$ . Seja,  $u_n = u_0 + n$ , com  $u_0 \in S$  função positiva contínua fixada. Então,  $\nabla u_n = \nabla u_0 \Rightarrow u_n \in S$  e temos:

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{p+1} dx = \int_{\Omega} a(x)|u_0 + n|^{p+1} dx \\ &\geq n^{p+1} \int_{\Omega} a(x) dx \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

ou seja,  $\sup \{I(u); u \in S\} = +\infty$ .

Consideremos a decomposição de  $H^1(\Omega)$  em soma direta, como segue:

$$H^1(\Omega) = \mathbb{R} \oplus V, \quad \text{com } V = \left\{ v \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} v dx = 0 \right\}.$$

De fato podemos fazer isto, pois dado  $\lambda \in \mathbb{R} \cap V$  então,  $\int_{\Omega} \lambda dx = 0 \Rightarrow \lambda|\Omega| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ . Logo,  $\mathbb{R} \cap V = \{0\}$  e, se escrevemos  $u = t + v$ , com  $\int_{\Omega} v dx = 0$ , temos

$$\int_{\Omega} u(x) dx = t|\Omega| \Rightarrow t = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$$

e portanto,

$$v = u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Seja,

$$M = \sup_{u \in S} I(u),$$

tal que  $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Notemos que  $M > 0$ . De fato, por (1.14) existe uma bola aberta  $B_{\delta}(x_0)$ , onde  $a > 0$ . Tomemos  $u_0 \in S$  com suporte em  $B_{\delta}(x_0)$ , temos que:

$$\begin{aligned} M = \sup_{u \in S} I(u) &\geq I(u_0) = \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{p+1} dx \\ &= \int_{B_{\delta}(x_0)} a(x)|u_0|^{p+1} dx > 0. \end{aligned}$$

Consideremos,  $(u_n) \subset S$  uma seqüência maximizante para  $I$ , isto é,  $u_n \in S$ , tal que  $(I(u_n))$  é crescente e converge para  $M$ .

Denotemos,  $u_n = t_n + v_n$  a decomposição de  $u_n$  em  $H^1(\Omega) = \mathbb{R} \oplus V$ . Temos que,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 = 1.$$

Agora, pela desigualdade de Poincaré (Teorema 0.7), segue que:

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = \|v_n - (v_n)_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)},$$

onde  $(v_n)_{\Omega} = (1/|\Omega|) \int_{\Omega} v_n(x) dx = 0$ . Logo,

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = \|v_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C.1 + 1 = C + 1 = \bar{C},$$

portanto  $(v_n)$  é limitada. Usando (1.7) e o Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 0.8) temos que  $V$  é compactamente imerso em  $L^{p+1}(\Omega)$ . Assim, passando a subsequência, se necessário, podemos supor que:

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v && \text{em } H^1(\Omega); \\ v_n &\rightarrow v && \text{em } L^{p+1}(\Omega) \text{ e} \\ v_n &\rightarrow v && \text{q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

Notemos também que,  $|t_n|$  é limitada. De fato, suponhamos que não, então podemos supor que  $|t_n| \rightarrow +\infty$ . Conseqüentemente,  $|t_n|^{-1}v_n \rightarrow 0$  em  $L^{p+1}(\Omega)$  e, usando o Teorema 0.4, juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 0.3), temos:

$$\int_{\Omega} a(x)|1 + |t_n|^{-1}v_n|^{p+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} a(x) dx < 0,$$

por (1.13). Isto, mostra que

$$I(u_n) = \int_{\Omega} a(x)|t_n + v_n|^{p+1} dx = |t_n|^{p+1} \int_{\Omega} a(x)|1 + |t_n|^{-1}v_n|^{p+1} dx \rightarrow -\infty, \quad (1.17)$$

o que é um absurdo, pois vimos que  $I(u_n) \rightarrow M > 0$ . Portanto,  $t_n$  é limitada e passando a subsequência, se necessário, podemos supor que ela converge.

Conseqüentemente,  $u_n$  é limitada em  $H^1(\Omega)$  e, portanto,

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{em } H^1(\Omega) \text{ e} \\ u_n &\rightarrow u && \text{em } L^{p+1}(\Omega). \end{aligned}$$

Isto, implica em particular que (usando os Teoremas 0.4 e 0.3),

$$0 < I(u) = M < +\infty.$$

Logo,  $u \not\equiv 0$ , já que  $I(0) = 0$ . Além disso, se  $u$  é constante, então  $I(u) < 0$  por (1.13), o que é uma contradição e, portanto,  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 > 0$ . Logo, como  $u_n \rightharpoonup u$  em  $H^1(\Omega)$ , temos pelo Teorema 0.5 que:

$$0 < \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = 1.$$

Mostremos que  $u \in S$ . Seja  $\theta \geq 1$ , tal que  $\theta u \in S$ , o que é garantido graças ao Teorema do Valor Intermediário. Então,  $I(\theta u) = \theta^{p+1}I(u) = \theta^{p+1}M \leq M$ , onde devemos lembrar que  $M$  é o supremo de  $I(u)$  em  $S$ . Logo,  $\theta^{p+1} \leq 1$  e, portanto,  $\theta = 1$ .

Então,  $u \in S$  e  $u$  é uma solução do problema variacional (1.15). Observemos que, sem perda de generalidade, podemos iniciar com a seqüência maximizante  $u_n$  satisfazendo  $u_n \geq 0$  quase sempre em  $\Omega$ . De fato,  $|u_n|$  tem as mesmas propriedades

como seqüência maximizante para (1.15). Portanto, a solução  $u$  que obtemos é satisfaz:

$$u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Pelo que provamos acima, podemos concluir que existe um multiplicador de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u = a(x)u^p, & u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando esta equação por  $u$  e integrando, obtemos:

$$\lambda = \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} -\Delta u \cdot u dx = \int_{\Omega} a(x)u^{p+1} dx = I(u) = M.$$

Então  $\lambda > 0$ . Pelo princípio do máximo e o lema de Hopf, como  $u \not\equiv 0$ , temos que  $u > 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Tomemos, agora  $w = \mu u$ , com  $\mu = \lambda^{-1/(p-1)}$ . Então,

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\mu \Delta u = -\lambda^{-1/(p-1)} \Delta u \\ &= -\lambda \Delta u \cdot \lambda^{-p/(p-1)} = a(x)u^p \cdot (\lambda^{-1/(p-1)})^p \\ &= a(x) (u \cdot \lambda^{-1/(p-1)})^p = a(x)(\mu u)^p = a(x)w \end{aligned}$$

e  $\partial_\nu w = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Portanto,  $w$  é uma solução positiva para (1.12). ■

A seguir, usando o Teorema do Passo da Montanha, provaremos o mesmo resultado de existência, sob as mesmas hipóteses (1.13) e (1.14).

Consideremos o funcional,  $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} a(x)|u|^{p+1} \right\} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} I(u),$$

definido sobre o espaço de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Devemos notar que  $J$  está bem definido, devido a imersão de Sobolev e  $p < 2^* - 1$ . Além disso,  $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  (cf. [20], apêndice B ou [11]). Logo, soluções para o problema (1.12) são pontos críticos do funcional  $J$ , uma vez que:

$$J'(u) \cdot \varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} a(x)|u|^{p-1} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Mostraremos que o funcional  $J$  está sob as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, isto é, veremos que:

**Proposição 1.4 (1995, [6])** *Suponhamos que (1.13) e (1.14) valem. Então o funcional  $J$  é de classe  $C^1$ , satisfaz a condição de Palais-Smale-(PS) e a geometria do passo da montanha, a saber, as duas propriedades seguintes:*

- (i) *Existem  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $J(u) \geq \alpha$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ , com  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \rho$ ;*
- (ii) *Existe  $e \in H^1(\Omega)$ ,  $\|e\|_{H^1(\Omega)} > \rho$ ,  $e \geq 0$  com  $J(e) < 0 = J(0)$ .*

Conseqüentemente, da Proposição 1.4, em vista do Teorema do Passo da Montanha (cf. Teorema 0.11), concluímos que o funcional  $J$  possui um ponto crítico no nível minimax:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \geq \delta, \quad (1.18)$$

onde  $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ . De fato, provaremos mais; veremos no Teorema 1.5 que o funcional  $J$  possui um ponto crítico positivo no nível  $c$ . Este Teorema nos diz que podemos obter uma solução positiva do problema, usando diretamente o Teorema do Passo da Montanha, diferentemente do modo usual, onde modificamos o funcional. Vale salientar que ainda consideraremos  $H^1(\Omega) = V \oplus \mathbb{R}$ , como feito na prova acima.

Para a prova da Proposição, vamos precisar do seguinte:

**Lema 1.1** *Existe um número real positivo  $\beta > 0$ , tal que para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ , a condição  $(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx)^{1/2} \leq \beta|t|$ , implica que:*

$$I(u) = I(t + v) = \int_{\Omega} a(x)|t + v(x)|^{p+1} dx \leq \frac{|t|^{p+1}}{2} \left( \int_{\Omega} a(x) dx \right).$$

**Prova.** Antes de iniciarmos a prova deste lema, observemos que a condição  $(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx)^{1/2} \leq \beta|t|$  pode ser dada por:

$$\|v/t\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta,$$

pois  $v \in V$ , ou seja, tem média zero e, portanto, pelo Teorema 0.7 as normas  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$  e  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$  são equivalentes.

Consideremos,  $T : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$T(t, v) = \int_{\Omega} a(x)|t + v(x)|^{p+1} dx.$$

No espaço  $\mathbb{R} \times V$  consideremos a norma da soma, isto é,  $\|(t, v)\| = |t| + \|v\|_{H^1(\Omega)}$ . Vejamos que  $T$  é contínua. De fato, suponhamos que temos uma seqüência  $(t_n, v_n) \subset \mathbb{R} \times V$ , tal que  $(t_n, v_n) \rightarrow (t, v)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela condição (1.7) e o Teorema 0.8 (a'), vemos que  $V$  está imerso continuamente em  $L^{p+1}(\Omega)$ . Logo,  $T(t_n, v_n) \rightarrow T(t, v)$ .

Agora, notemos que por (1.13),

$$T(1, 0) = \int_{\Omega} a(x) dx < 0,$$

além disso,

$$T(1, 0) < \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) dx.$$

Assim, se para algum  $\beta > 0$  suficientemente pequeno, temos

$$\|v/t\|_{H^1(\Omega)} = \|(0, v/t)\| = \|(1, v/t) - (1, 0)\| \leq \beta,$$

então, pela continuidade de  $T$ , obtemos que:

$$T(1, v/t) < \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) dx.$$

Portanto,

$$T(t, v) = \int_{\Omega} a(x) |t + v(x)|^{p+1} dx = |t|^{p+1} T(1, v/t) \leq \frac{|t|^{p+1}}{2} \int_{\Omega} a(x) dx.$$

■

Como já observamos acima, sabemos que  $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ . Dividiremos a prova da Proposição 1.4 em dois lemas, a saber:

**Lema 1.2 (Condição de Palais-Smale)** *Sob as hipóteses da Proposição 1.4 temos que  $J$  satisfaz (PS), isto é, dada uma seqüência  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ , satisfazendo:*

$$|J(u_n)| \leq C \quad e \quad J'(u_n) \rightarrow 0,$$

onde  $C$  é uma constante positiva, então  $(u_n)$  possui uma subseqüência convergente.

**Prova.** Seja  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$  uma seqüência, satisfazendo:

$$|J(u_n)| \leq C \quad e \quad J'(u_n) \rightarrow 0,$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Destas hipóteses, sabemos que:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{p+1} I(u_n) \leq \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{p+1} I(u_n) \right| \leq C \quad (1.19)$$

e dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  grande temos

$$|J'(u_n) \cdot \varphi| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{p-1} u_n \varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \quad (1.20)$$

$\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ .

Em particular, se em (1.20) tomarmos  $\varphi = u_n$ , obtemos:

$$|J'(u_n) \cdot u_n| = \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - I(u_n) \right| \leq \varepsilon \|u_n\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.21)$$

De (1.21) ainda obtemos que:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - I(u_n) \geq -\varepsilon \|u_n\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.22)$$

Multiplicando ambos os membros de (1.22) por  $-1/(p+1)$ , segue que:

$$-\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{p+1} I(u_n) \leq \frac{\varepsilon}{p+1} \|u_n\|_{H^1(\Omega)} = C_1 \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.23)$$

Agora, somando membro a membro (1.19) e (1.23), obtemos:

$$C_0 \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + C_1 \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|u_n\|_{H^1(\Omega)}, \quad (1.24)$$

onde  $C_0 = 1/2 - 1/(p+1)$  e  $C_2 = \max\{C, C_1\}$ .

Assim, se supormos que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3$ , obtemos que  $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$  é limitada. Donde, sabendo que  $H^1(\Omega)$  é um espaço reflexivo, pelo Teorema 0.6, temos que existe uma subsequência  $(u_{n_k})$  em  $H^1(\Omega)$ , tal que  $u_{n_k} \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$ .

Logo, para terminarmos a demonstração, basta ver que  $u_{n_k} \rightarrow u$  em  $H^1(\Omega)$ . Para isto, faremos uso do Teorema de compacidade de Rellich-Kondrachov. Mais precisamente, que  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$  compactamente para  $1 \leq \alpha < 2^*$ . Portanto, usando (1.7), tomando subsequência, se necessário, temos que  $u_{n_k} \rightarrow u$  em  $L^p(\Omega)$ .

Por outro lado, sabemos que:

$$\|u_{n_k} - u\|_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx. \quad (1.25)$$

Usando os Teoremas 0.4 e 0.3, segue que a primeira integral de (1.25) converge a zero, uma vez que  $2 < 2^*$ . Além disso,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx = J'(u_{n_k} - u) \cdot (u_{n_k} - u) + \int_{\Omega} a(x) |u_{n_k} - u|^p dx.$$

Por hipótese, temos que  $J'(u_{n_k} - u) \cdot (u_{n_k} - u) \rightarrow 0$  e como  $p < 2^*$ , segue que:

$$\int_{\Omega} a(x) |u_{n_k} - u|^p dx \rightarrow 0,$$

onde novamente usamos os Teoremas 0.4 e 0.3. Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n_k} - \nabla u|^2 dx \rightarrow 0.$$

E, portanto, segue de (1.25) que  $\|u_{n_k} - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ . Assim, para completarmos a prova, é suficiente verificarmos que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$  é limitada.

Suponhamos que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ . Donde,

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

o que implica:

$$\frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (1.26)$$

Definamos,  $v_n = u_n / \|u_n\|_{L^2(\Omega)}$  e então,  $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Dividindo (1.24) por  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2$



e utilizando (1.26), obtemos:

$$\begin{aligned}
C_0 \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_2 \frac{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \\
&= C_2 \left( \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} + \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \right) \\
&= C_2 \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} + o(1) \\
&\leq C_2 \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} + o(1) \\
&= C_2 \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} + o(1),
\end{aligned}$$

donde concluimos que

$$C_0 \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_2 \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Portanto,  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}$  é limitada, pois se este não for o caso, podemos dividir a desigualdade acima por  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2$  e obtemos:

$$C_0 - \frac{C_2}{\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}} \leq 0,$$

fazendo  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ , segue que  $C_0 = 0$ , o que é um absurdo.

Logo, como  $\|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$  e  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}$  é limitada, temos que  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)}$  é limitada. Pelo Teorema 0.6, passando a subsequência se necessário, segue que existe  $v_0 \in H^1(\Omega)$ , tal que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $H^1(\Omega)$  e usando o Teorema 0.8 (b'), obtemos que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^r$ , para  $1 \leq r < 2^*$ . Em particular, para  $r = 2$ , temos que:

$$\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1, \tag{1.27}$$

já que  $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Agora, notemos que:

$$\left| J'(u_n) \frac{v_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \right| = \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \frac{\nabla v_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} - \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{p-1} u_n \frac{v_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \right| \leq \varepsilon_n \frac{\|v_n\|_{H^1(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \leq \tilde{\varepsilon}_n.$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \frac{\nabla v_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} = \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Mas, por (1.24), temos que

$$\begin{aligned}
C_0 \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} &\leq C_2 \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \left( \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= C_2 \left( \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^4} + \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^{1/2} \\
&= C_2 \left( \frac{\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} + \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Então, devemos ter que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a(x) |u_n|^{p-1} u_n \frac{v_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} &= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{p+1} \\
&= \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{p+1}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2} \int_{\Omega} a(x) |v_n|^{p+1} \\
&= \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \int_{\Omega} a(x) |v_n|^{p+1} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Como  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \rightarrow \infty$ , vemos que

$$\int_{\Omega} a(x) |v_n|^{p+1} \rightarrow 0. \tag{1.28}$$

Agora, dado  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , temos (por (1.28)) que:

$$\left| \int_{\Omega} a(x) v_n^{p+1} \varphi \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_{\Omega} a(x) v_n^{p+1} \right| \rightarrow 0.$$

Lembremos que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^r(\Omega)$ , para  $1 \leq r < 2^*$ . Utilizando os Teoremas 0.4 e 0.3, obtemos que:

$$\left| \int_{\Omega} a(x) v_0^{p+1} \varphi \right| = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Donde, concluímos que  $v_0 \equiv 0$  em  $\Omega$ , já que  $|\Omega^0| = 0$ . Isto contradiz (1.27). Portanto, devemos ter que  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$  seja limitada. ■

**Lema 1.3 (Geometria do Passo da Montanha)** *Sob as hipóteses da Proposição 1.4, temos que:*

- (i) *Existem  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $J(u) \geq \alpha$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ , com  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \rho$ .*
- (ii) *Existe  $e \in H^1(\Omega)$ ,  $\|e\|_{H^1(\Omega)} > \rho$ ,  $e \geq 0$  com  $J(e) < 0 = J(0)$ .*

**Prova.** Provemos, inicialmente, (i). Em  $V$ , tomamos a norma  $\|v\|^2 := \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx$  e sobre,  $H^1(\Omega)$  definimos a seguinte norma equivalente:

$$\|u\|^2 = |t|^2 + \|v\|^2,$$

para  $u = t + v$  com  $t \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ .

Tomemos  $\rho > 0$  suficientemente pequeno (especificaremos abaixo a escolha precisa de  $\rho$ ). Consideremos  $u \in H^1(\Omega)$  com  $\|u\| = \rho$  e seja  $\beta > 0$  a constante positiva dada no Lema 1.1.

Distinguímos dois casos:

**Caso 1.**  $\|v\| \leq \beta|t|$ . Então, como  $\|v\|^2 + |t|^2 = \rho^2$ , segue que

$$|t|^2\beta^2 + |t|^2 \geq \|v\|^2 + |t|^2 = \rho^2 \Rightarrow |t|^2 \geq \rho^2(1 + \beta^2)^{-1}.$$

Pelo Lema 1.1 e (1.13) sabemos que

$$I(u) \leq -|t|^{p+1}\sigma, \quad \text{onde } \sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) dx > 0.$$

Portanto, neste caso, vemos que:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq -\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{p+1} dx = -\frac{1}{p+1} I(u) \\ &\geq \frac{|t|^{p+1}\sigma}{p+1} = \frac{\sigma}{p+1} (|t|^2)^{(p+1)/2} \\ &\geq \frac{\sigma}{p+1} \left( \frac{\rho^2}{1 + \beta^2} \right)^{(p+1)/2} := \alpha_1 > 0. \end{aligned}$$

**Caso 2.**  $\|v\| \geq \beta|t|$ . Como,  $u = t + v$ , segue que

$$\|u\|^2 = |t|^2 + \|v\|^2 \leq \frac{\|v\|^2}{\beta^2} + \|v\|^2 = \left( \frac{1}{\beta^2} + 1 \right) \|v\|^2.$$

Logo,

$$\|u\| \leq \left( \frac{1}{\beta^2} + 1 \right)^{1/2} \|v\|. \quad (1.29)$$

Sabemos que  $a$  é contínua no compacto  $\overline{\Omega}$  e, portanto, seu máximo é atingido, ou seja,  $|a|_0 = \max \{a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$ . Pela imersão de Sobolev, temos:

$$\left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{p+1} dx \right| \leq |a|_0 \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} \leq C_1 \|u\|^{p+1} \leq C \|v\|^{p+1},$$

onde  $C_1 > 0$  e  $C = C_1 \left( (1/\beta^2) + 1 \right)^{(p+1)/2}$ .

Portanto, se  $\|v\|$  é suficientemente pequena, digamos  $\|v\| \leq \rho$ , com  $\rho$  suficientemente pequeno, temos que:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{p+1} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{C}{p+1} \|v\|^{p+1} \\ &= \|v\|^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{C}{p+1} \|v\|^{p-1} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\|u\| = \rho$ , segue por (1.29) que:

$$\rho \geq \|v\| \geq \frac{\beta\rho}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Logo,

$$J(u) \geq \alpha_2 := \frac{1}{4} \left( \frac{\beta^2 \rho^2}{1+\beta^2} \right) > 0.$$

Assim, a prova de (i) segue com a escolha de  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

Agora provemos (ii). Notemos que por (1.14), temos que  $\Omega^+ \neq \emptyset$ . Além disso, sabemos que  $a$  é contínua, logo  $\Omega^+$  é aberto. Assim, dado  $x_0 \in \Omega^+$  temos que existe  $B_\delta(x_0) \subset \Omega^+$ . Tomemos  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  com  $\text{supp}\psi \subset B_\delta(x_0)$ . Devemos salientar que:  $a(x) > 0$  para todo  $x \in B_\delta(x_0)$ .

Seja  $t > 0$ , temos:

$$\begin{aligned} J(t\psi) &= \frac{t^2}{2} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} a(x)|\psi|^{p+1} dx \\ &= \frac{t^2}{2} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{B_\delta(x_0)} a(x)|\psi|^{p+1} dx \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

quando  $t \rightarrow \infty$ , pois  $p+1 > 2$ . ■

Assim, temos provada a Proposição 1.4. O próximo passo é mostrarmos que a solução obtida é positiva. Isto, é usualmente obtido modificando o funcional  $J$  e substituindo-o por:

$$J^+(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} a(x)(u^+)^{p+1} \right) dx,$$

onde  $u^+ = \max\{u(x), 0\}$ . De fato, qualquer ponto crítico de  $J^+$  é uma solução positiva de (1.12). Aqui, no entanto,  $J^+$  não satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Mais precisamente, vemos que ele não satisfaz a propriedade (i) da Proposição acima. Com efeito, se  $u$  é qualquer constante negativa, então  $J^+(u) = 0$ .

Todavia, veremos que uma variante do Teorema do Passo da Montanha nos dá uma solução positiva. Isto segue do fato da aplicação  $u \mapsto |u|$ , ser contínua em  $H^1(\Omega)$  e satisfaz  $J(u) = J(|u|)$ , isto é,  $J$  é um funcional par. Estas propriedades implicarão que: existe um ponto crítico  $u$  de  $J$ , tal que  $u > 0$  em  $\overline{\Omega}$ .

Este resultado abstrato é devido a Brezis e Nirenberg e nos dá pontos críticos com propriedades adicionais, tais como positividade.

**Teorema 1.5** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $J \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfazendo (PS). Suponhamos que  $J(0) = 0$  e*

(i) *Existem  $\rho, \alpha > 0$  tais que  $J|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$*

(ii) Existe  $e \in E \setminus B_\rho(0)$  tal que  $J(e) \leq 0 = J(0)$ . Além disso, suponhamos que existe uma aplicação contínua  $p : E \rightarrow E$ , tal que:

$$J(p(u)) \leq J(u), \quad \forall u \in E$$

e  $p(0) = 0$ ,  $p(e) = e$ . Então, existe um ponto crítico  $u \in \overline{p(E)}$  tal que  $J(u) = c \geq \alpha$ , onde  $c$  é caracterizado pela fórmula em (1.18).

**Prova.** Suponhamos, por absurdo, que não existe ponto crítico de  $J$  em  $F = \overline{p(E)}$  no nível  $c$ . Usando a condição (PS), afirmamos que existem  $\varepsilon, \varepsilon_0, \delta_0 > 0$ , tais que:

$$\forall u \in J^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap F_{\varepsilon_0} \Rightarrow \|J'(u)\| \geq \delta_0 > 0, \quad (1.30)$$

onde  $F_{\varepsilon_0} = \{u \in E : \text{dist}(u, F) \leq \varepsilon_0\}$ . De fato, supondo que isto não é verdade, dado  $n > 0$  existe  $u_n \in E$ , tal que  $\text{dist}(u_n, F) < 1/n$ ,  $|J(u_n) - c| < 1/n$  e  $J'(u_n) \rightarrow 0$ . Logo, por (PS), existe uma subsequência  $u_{n_k} \rightarrow u_0 \in E$ . Assim,  $J(u_0) = c$ ,  $J'(u_0) = 0$  e  $u_0 \in F$ , pois  $F$  é fechado. Contradizendo nossa suposição inicial.

Por hipótese  $J(p(\gamma(t))) \leq J(\gamma(t))$ , donde

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(p(\gamma(t))) \leq c. \quad (1.31)$$

Por outro lado, notemos que  $p \circ \gamma \in C([0, 1], E)$  e

$$p(\gamma(0)) = p(0) = 0 \quad \text{e} \quad p(\gamma(1)) = e.$$

Assim, pela definição de  $c$  (cf. (1.18)), segue que:

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} J(p(\gamma(t))). \quad (1.32)$$

Portanto, de (1.31) e (1.32), obtemos que:

$$c = \inf_{g \in \Gamma(p)} \max_{t \in [0,1]} J(g(t)), \quad (1.33)$$

onde  $\Gamma(p) = \{p \circ \gamma \in C([0, 1], E) : \gamma \in \Gamma\}$ .

Por (1.30) e tomando  $G = \emptyset$  no Teorema 0.12, existem  $\bar{\varepsilon} \in (0, \alpha/2)$  e  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ , tais que:

(i)  $\eta(t, x) = x$  se  $|J(x) - c| \geq \alpha/2$ ,

(ii)  $\eta(1, J^{c+\bar{\varepsilon}} \cap F) \subset J^{c-\bar{\varepsilon}} \cap F_{\varepsilon_0}$ ,

onde  $J^{c+\bar{\varepsilon}} = \{u \in E : J(u) \leq c + \bar{\varepsilon}\}$ , análogamente para  $J^{c-\bar{\varepsilon}}$ .

Agora, por (1.33), podemos escolher  $g \in \Gamma(p)$ , tal que

$$\max_{t \in [0,1]} J(g(t)) \leq c + \bar{\varepsilon}. \quad (1.34)$$

Consideremos  $h(t) = \eta(1, g(t))$ . Evidentemente  $h \in C([0, 1], E)$ , além disso, sabemos que  $g(0) = 0$  e  $J(0) = 0 < \alpha/2 \leq c - \alpha/2$ , pois  $c \geq \alpha$ . Assim, por (i),  $h(0) = 0$ . Da mesma forma,  $g(1) = e$  e  $J(e) \leq 0$ , donde  $h(1) = e$ . Logo, concluímos que  $h \in \Gamma$ .

Por (1.18), temos que:

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} J(h(t)). \quad (1.35)$$

Mas, de (1.34) e do fato de  $g \in \Gamma(p)$ , vemos que  $g([0, 1]) \subset J^{c+\bar{\varepsilon}} \cap F$ . Então, de (ii), obtemos que  $h([0, 1]) \subset J^{c-\bar{\varepsilon}} \cap F_{\varepsilon_0}$ , isto é,

$$\max_{t \in [0, 1]} J(h(t)) \leq c - \bar{\varepsilon} \text{ e } \text{dist}(h(t), F) < \varepsilon_0. \quad (1.36)$$

O que contradiz (1.35). ■

Para o nosso problema, tomamos  $p(u) = |u|$  e obtemos um ponto crítico não nulo  $u \geq 0$ . Que  $u > 0$ , segue usando o princípio do máximo forte, seguindo os mesmos passos feitos no início desta seção.

### 1.3 Condições Necessárias

Nesta seção encontraremos condições necessárias para a existência de soluções positivas para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + [q(x) - \tau]u = a(x)u^p, & u > 0 & \text{em } \Omega \\ Bu = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.37)$$

onde  $B$  é um operador fronteira, tal como em (1.2), (1.3) e (1.4).

A idéia básica desta seção será usarmos a identidade de Picone (7). Vamos supor (como apontado na seção 1.1) que o operador linear  $-\Delta + q(x)$ , com a correspondente condição de fronteira definida por  $B$ , tem 0 como seu primeiro autovalor. Isto é, vamos supor que a condição (1.10) vale. De posse destas informações, vamos demonstrar o Teorema 1.2.

**Prova do Teorema 1.2.** Se  $u$  satisfaz (1.37), com condições de Neumann (1.2) ou de Robin (1.4), então  $u > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$  como uma conseqüência do Lema (0.1), isto segue por um argumento análogo ao usado no início da seção 1.1.

Multiplicando ambos os membros de (1.37) por  $u^{-\gamma}\varphi^{1+\gamma}$ , temos

$$-u^{-\gamma}\varphi^{1+\gamma}\Delta u + q(x)u^{1-\gamma}\varphi^{1+\gamma} = a(x)u^{p-\gamma}\varphi^{1+\gamma} + \tau u^{1-\gamma}\varphi^{1+\gamma}. \quad (1.38)$$

Da mesma forma, multiplicando ambos os membros de (1.10) por  $u^{1-\gamma}\varphi^\gamma$ , temos:

$$-u^{1-\gamma}\varphi^\gamma\Delta\varphi + q(x)u^{1-\gamma}\varphi^{1+\gamma} = 0. \quad (1.39)$$

Subtraindo (1.38) de (1.39), obtemos

$$u^{1-\gamma}\varphi^\gamma\Delta\varphi - u^{-\gamma}\varphi^{1+\gamma}\Delta u = a(x)u^{p-\gamma}\varphi^{1+\gamma} + \tau u^{1-\gamma}\varphi^{1+\gamma}. \quad (1.40)$$

Agora, tomando na identidade (7)  $\psi(t) = t^\gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ , ficamos com

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \left( \frac{\varphi}{u} \right)^\gamma (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] &= \left( \frac{\varphi}{u} \right)^\gamma (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) + \gamma \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 \\ &= u^{1-\gamma} \varphi^\gamma \Delta \varphi - u^{-\gamma} \varphi^{1+\gamma} \Delta u + \gamma \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$u^{1-\gamma} \varphi^\gamma \Delta \varphi - u^{-\gamma} \varphi^{1+\gamma} \Delta u = \operatorname{div} \left[ \left( \frac{\varphi}{u} \right)^\gamma (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] - \gamma \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2.$$

Assim, substituindo a igualdade acima em (1.40), segue que

$$\operatorname{div} \left[ \left( \frac{\varphi}{u} \right)^\gamma (u \nabla \varphi - \varphi \nabla u) \right] - \gamma \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 = a(x) u^{p-\gamma} \varphi^{1+\gamma} + \tau u^{1-\gamma} \varphi^{1+\gamma}.$$

Fazendo uma integração por partes, vem que

$$\int_{\Omega} a(x) u^{p-\gamma} \varphi^{1+\gamma} dx = -\gamma \int_{\Omega} \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 dx - \tau \int_{\Omega} u^{1-\gamma} \varphi^{1+\gamma} dx, \quad (1.41)$$

para qualquer  $\gamma \geq 0$ .

Se  $\tau > 0$ , então tomando  $\gamma = p$  em (1.41), obtemos

$$\int_{\Omega} a(x) \varphi^{1+p} dx = -p \int_{\Omega} \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{p-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 dx - \tau \int_{\Omega} u^{1-p} \varphi^{1+p} dx < 0,$$

uma vez que  $p > 1 > 0$ ,  $u > 0$  e  $\varphi \geq 0$ . Assim, temos demonstrado (i). Analogamente, se  $\tau < 0$ , tomando  $\gamma = 0$  em (1.41), segue que

$$\int_{\Omega} a(x) u^p \varphi^1 dx = -\tau \int_{\Omega} u^1 \varphi^1 dx > 0,$$

e, portanto, devemos ter que  $\Omega^+ \neq \emptyset$ , provando (ii).

Agora, considerando  $\tau = 0$ , temos que (1.41) fica:

$$\int_{\Omega} a(x) u^{p-\gamma} \varphi^{1+\gamma} dx = -\gamma \int_{\Omega} \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 dx. \quad (1.42)$$

Notemos que, a integral do lado direito de (1.42) é estritamente positiva. De fato, se este não for o caso, devemos ter que

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\varphi}{u} \right)^{\gamma-1} u^2 \left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 dx = 0,$$

pois  $u > 0$  e  $\varphi \geq 0$ . Mas, se temos a igualdade acima, então:

$$\left| \nabla \left( \frac{\varphi}{u} \right) \right|^2 = 0,$$

implicando que  $u = C\varphi$ , para algum  $C > 0$ . Assim, temos que  $a \equiv 0$ , o que é um absurdo, já que  $a$  muda de sinal.

Se tomarmos,  $\gamma = p$  em (1.42), a primeira condição em (iii) segue. A segunda condição em (iii), é consequência de (1.42) e da escolha de  $\gamma = 0$ .

Finalmente, consideremos o caso da condição de Dirichlet (1.3). Observemos que, se  $\tau > 0$ , podemos sempre supor que  $\varphi \leq u$  sobre  $\bar{\Omega}$ . De fato, usando o Lema de Hopf e o caráter de  $\varphi$  e  $u$  serem  $C^1(\bar{\Omega})$ , existe uma constante  $t > 0$ , tal que  $t\varphi \leq u$  em  $\Omega$  e podemos substituir  $\varphi$  por  $t\varphi$ . Então,  $\varphi/u$  é limitado e um argumento simples mostra que a identidade (1.41), também vale neste caso. Assim, pelos mesmos argumentos utilizados acima, temos a prova do teorema para a condição de Dirichlet (1.3). ■

**Observação 1.2** *No caso particular  $q \equiv 0$  com condição de fronteira de Neumann, as condições necessárias (iii) foram feitas em [4]. Para o caso da condição de fronteira de Dirichlet, com  $q(x) = -\lambda_1$ , o primeiro autovalor de  $-\Delta$ , a necessidade de (i) foi estabelecida por um outro método em [3].*

**Observação 1.3** *Alguns dos resultados do Teorema 2.1, podem ser estendidos para não linearidades mais gerais do que  $u^p$ .*

*De fato, se  $u^p$  é substituído por  $g(u)$  com  $g(0) = 0$ ,  $g'(s) > 0$  para  $s > 0$ , nas equações (1.37) e (1.10), obtemos:*

$$\frac{1}{g(u)}(u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) = a(x)\varphi + \tau \frac{u}{g(u)}\varphi.$$

*Agora, o lado esquerdo da igualdade acima é igual a:*

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{g(u)} (u\nabla\varphi - \varphi\nabla u) \right] + \frac{g'(u)}{g^2(u)} \nabla u \cdot (u\nabla\varphi - \varphi\nabla u).$$

*Então, com uma integração por partes, obtemos:*

$$\int_{\Omega} a(x)\varphi \, dx = \int_{\Omega} \frac{g'(u)}{g^2(u)} \nabla u \cdot (u\nabla\varphi - \varphi\nabla u) \, dx - \tau \int_{\Omega} \frac{u}{g(u)} \, dx.$$

*Para o problema de Neumann com  $q \equiv 0$ , onde  $\varphi$  é constante, a igualdade acima implica que*

$$\int_{\Omega} a(x) \, dx < 0,$$

*se  $\tau \geq 0$ .*

## 1.4 Caso Coercivo

Nesta seção, estudaremos a existência de solução de (1.1) para o caso coercivo, isto é,  $\mu_1 > 0$ . Mais especificamente, vamos demonstrar o Teorema 1.4. Trataremos somente o caso em que o operador de fronteira  $Bu$  é dado por (1.2), ou seja, com



a condição de Neumann; mas, o mesmo tipo de argumentos e resultados valem com as outras condições de fronteira.

Consideremos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p, & u > 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.43)$$

Seja  $\mu_1$ , o primeiro (ou o menor) autovalor do operador linear do lado esquerdo de (1.43) e  $\varphi_1 > 0$  a autofunção associada, ou seja, estamos pedindo que  $\mu_1$  e  $\varphi_1$  satisfaçam:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 + m(x)\varphi_1 = \mu_1\varphi_1 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu\varphi_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.44)$$

Por *caso coercivo*, entendemos aqui que  $\mu_1 > 0$ . Como sempre, supomos que  $p$  satisfaz a condição (1.7).

**Prova do Teorema 1.4.** Como já foi dito, restringiremos a demonstração para o problema (1.43). Suponhamos que,  $u$  é uma solução positiva para o problema (1.43). Multiplicando (1.43) por  $\varphi_1$  e (1.44) por  $u$ , obtemos:

$$-\Delta u\varphi_1 + m(x)u\varphi_1 = a(x)u^p\varphi_1, \quad (1.45)$$

$$-\Delta\varphi_1 u + m(x)u\varphi_1 = \mu_1 u\varphi_1, \quad (1.46)$$

respectivamente. Fazendo a diferença entre (1.45) e (1.46), segue que

$$-\Delta u\varphi_1 + \Delta\varphi_1 u = a(x)u^p\varphi_1 - \mu_1 u\varphi_1.$$

Integrando em  $\Omega$  e utilizando a fórmula de Green (cf. a igualdade (5)), obtemos

$$\int_{\partial\Omega} [\partial_\nu\varphi_1(\sigma)u(\sigma) - \partial_\nu u(\sigma)\varphi_1(\sigma)] d\sigma = \int_{\Omega} a(x)u^p\varphi_1 dx - \mu_1 \int_{\Omega} u\varphi_1 dx.$$

Usando as condições de fronteira de (1.45) e (1.46), segue que

$$\int_{\Omega} a(x)u^p\varphi_1 dx = \mu_1 \int_{\Omega} u\varphi_1 dx > 0,$$

já que,  $\mu_1, \varphi_1$  e  $u$  são estritamente positivas. Logo,  $a$  deve ser positiva em algum ponto de  $\Omega$ .

Para verificarmos a existência de  $x_0 \in \Omega$ , tal que  $a(x_0) > 0$  é condição suficiente, usamos o Teorema do Passo da Montanha. De fato, consideremos o funcional:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{m(x)}{2} |u|^2 - \frac{a(x)(u^+)^{p+1}}{p+1} \right\} dx,$$

onde  $u^+ = \max\{u, 0\}$ . Então, é usual verificar que:  $J \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$  e satisfaz a condição de Palais-Smale (cf. [11] ou [19]). Os pontos críticos  $u$ , não nulos de  $J$ , são soluções positivas de (1.45). Sob a hipótese de o problema ser coercivo, no sentido que  $\mu_1 > 0$ , o funcional  $J$  satisfaz as condições geométricas do passo da montanha,

a saber,  $J(0) = 0$  e:

(i)  $\exists \rho, \delta > 0$ , tais que  $J(u) \geq \delta$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$ ,  $\|u\| = \rho$ .

(ii)  $\exists e \in H^1(\Omega)$ ,  $\|e\| > \rho$  com  $J(e) < 0$ .

Para as outras condições de fronteira (tal como a condição de Dirichlet (1.3), ou a condição de Robin (1.4)) os mesmos resultados são válidos. Onde, naturalmente,  $\mu_1$  e  $\varphi_1$  são definidos de acordo com cada caso.

No caso (1.3) o espaço considerado é  $H_0^1(\Omega)$ , em lugar de  $H^1(\Omega)$  e no caso (1.4) o espaço continua sendo  $H^1(\Omega)$ , mas o funcional associado é dado por:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{m(x)}{2} |u|^2 - \frac{a(x)(u^+)^{p+1}}{p+1} \right\} dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) \frac{u^2}{2} d\sigma.$$

A demonstração é exatamente a mesma, contanto que, o  $\mu_1$  correspondente a estas condições de fronteira, seja estritamente positivo. ■

## 1.5 Caso Não Coercivo

Nesta seção, trataremos do caso não coercivo, isto é, estudaremos o problema de existência de solução de (1.9) para o caso em que  $\mu_1 \leq 0$ . Vamos demonstrar o Teorema 1.3 com condições de fronteira do tipo (1.2), mais especificamente, para o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + [q(x) - \tau]u = a(x)u^p, & u > 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.47)$$

com  $\tau \geq 0$ . Como já foi observado na seção 1.1, o primeiro autovalor do operador linear em (1.47) é  $-\tau$ . Portanto, se  $\tau < 0$ , o problema é coercivo e recaímos no resultado obtido na seção anterior.

**Observação 1.4** *Foi provado por Tehrani em [22], para condições de fronteira de Neumann, que: para  $0 \leq \tau < \tau^*$ , o problema tem pelo menos duas soluções, enquanto para  $\tau = \tau^*$ , o problema (1.47) tem uma solução positiva. Este resultado é análogo, ao provado por Alama-Tarantello em [3], com condições de fronteira de Dirichlet.*

A prova do Teorema 1.3 é dividida em 3 etapas, a saber:

**Etapa 1.** Para  $\tau$  grande (1.47) não tem solução.

**Etapa 2.** Se existe uma solução de (1.47) para algum  $\tau' > 0$ , então para qualquer  $\tau$ ,  $0 < \tau \leq \tau'$ , (1.47) tem uma solução.

**Etapa 3.** Para  $\tau \geq 0$  suficientemente pequeno (1.47) tem uma solução.

**Lema 1.4 (1995, [6])** *Para  $\tau$  suficientemente grande (1.47) não tem solução.*

**Prova.** Suponhamos que,  $u$  é uma solução para (1.47). Por hipótese, temos que  $\Omega^+ \neq \emptyset$ . Logo, podemos considerar  $A$  uma bola não vazia contida em  $\Omega^+$ .

Denotemos por  $\lambda_1(A)$  o primeiro autovalor de  $-\Delta$  em  $A$  com condições de fronteira de Dirichlet. Então, existe  $\psi$  positiva, tal que:

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \lambda_1(A)\psi, & \text{em } A \\ \psi = 0 & \text{sobre } \partial A. \end{cases} \quad (1.48)$$

Observemos que,  $a > 0$  em  $A$  e assim, multiplicando (1.47) por  $\psi$  e (1.48) por  $u$ , obtemos respectivamente:

$$-\Delta u\psi + [q(x) - \tau]u\psi = a(x)u^p \quad (1.49)$$

e

$$-\Delta\psi u = \lambda_1(A)\psi u. \quad (1.50)$$

Integrando (1.50) em  $A$ , e usando a fórmula de Green (cf. equação (6), pág. 6), obtemos:

$$\int_A \nabla\psi\nabla u \, dx = \int_A \lambda_1(A)\psi u \, dx + \int_{\partial A} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, dx. \quad (1.51)$$

Da mesma forma, integrando em  $A$  a equação (1.49) e usando a condição de fronteira em (1.47), temos

$$\int_A \nabla u\nabla\psi \, dx + \int_A q(x)u\psi \, dx - \int_A \tau u\psi \, dx = \int_A a(x)u^p\psi \, dx. \quad (1.52)$$

Portanto, substituindo (1.51) em (1.52), segue que

$$\int_A [\lambda_1(A) + q(x) - \tau] u\psi \, dx + \int_{\partial A} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} u \, dx = \int_A a(x)u^p\psi \, dx. \quad (1.53)$$

Mas, notemos que do fato de  $\psi > 0$  em  $A$  e  $\psi = 0$  sobre  $\partial A$ , temos pelo Lema de Hopf que  $\partial_\nu\psi < 0$ . Assim, segue de (1.53) que

$$\int_A [\lambda_1(A) + q(x) - \tau] u\psi \, dx > \int_A a(x)u^p\psi \, dx.$$

Usando o fato que  $a > 0$  em  $A$ , obtemos

$$\int_A [\lambda_1(A) + q(x) - \tau] u\psi \, dx > \int_A a(x)u^p\psi \, dx > 0.$$

O que implica que  $\lambda_1(A) + q(x) - \tau > 0$ , ou ainda:

$$\tau < \lambda_1(A) + q(x) < \lambda_1(A) + \|q\|_{L^\infty}.$$

O que prova que o conjunto dos  $\tau$ 's, para os quais (1.47) tem solução, é limitado superiormente e portanto o Lema está provado.  $\blacksquare$

Este lema demonstra a Etapa 1. Agora, demonstraremos a Etapa 2.

**Lema 1.5 (1995, [6])** *Suponhamos que para algum  $\tau' > 0$ , (1.47) tem uma solução  $w$ . Então, para todo  $\tau$ , tal que  $0 < \tau \leq \tau'$ , temos que (1.47) tem uma solução.*

**Prova.** Claramente, se  $0 < \tau \leq \tau'$ , temos que:

$$\begin{cases} -\Delta w + [q(x) - \tau]w \geq -\Delta w + [q(x) - \tau']w = a(x)w^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.54)$$

Logo, multiplicando (1.54) por  $v \geq 0$ ,  $v \in H^1(\Omega)$  e integrando por partes, obtemos graças a (6), que

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx + \int_{\Omega} [q(x) - \tau]wv \, dx - \int_{\Omega} a(x)w^p v \, dx \geq 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad v \geq 0.$$

Portanto,  $w$  é uma supersolução para (1.47) (cf. definição em Preliminares).

Por outro lado, usando  $\varphi$  a principal autofunção em (1.10), para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\varepsilon\varphi$  é uma subsolução de (1.47), com  $\varepsilon\varphi < w$ . De fato, como  $\varphi > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$  (portanto limitada), temos que:

$$-\tau < \varepsilon^{p-1}\varphi^{p-1}a(x) \rightarrow 0,$$

quando tomamos  $\varepsilon$  pequeno o suficiente, onde também estamos usando o fato de  $a$  ser limitada.

Logo, usando esta desigualdade, obtemos:

$$-\Delta(\varepsilon\varphi) + [q(x) - \tau]\varepsilon\varphi = -\varepsilon(\Delta(\varphi) + [q(x) - \tau]\varphi) \stackrel{(1.10)}{=} -\varepsilon\tau\varphi < \varepsilon^p a(x)\varphi^p,$$

para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Novamente, pelos mesmos argumentos acima, mostramos que  $\varepsilon\varphi$  é uma subsolução para (1.47). Devemos notar que para  $\varepsilon$  pequeno o suficiente  $\varepsilon\varphi < w$ .

Assim, estamos sob as hipóteses do Teorema 0.9 e, portanto, existe uma solução  $u$  de (1.47) para cada  $0 < \tau \leq \tau'$ . ■

**Lema 1.6 (1995, [6])** *Existe  $\tau_1 > 0$ , tal que, para todo  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ , o problema (1.47) tem uma solução.*

O Teorema 1.3, segue dos Lemas 1.4, 1.5 e 1.6. A prova do Lema 1.6 usa o processo de maximização e segue na mesma linha de idéias, como na seção 1.3.

Sejam:

$$N_\tau(u) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + (q(x) - \tau)u^2] \, dx$$

e  $B_\tau = \{u \in H^1(\Omega) : N_\tau(u) \leq 1\}$ ;  $S_\tau = \{u \in H^1(\Omega) : N_\tau(u) = 1\}$ .

Consideremos o seguinte problema de maximização:

$$\max \{I(u) : u \in B_\tau\}, \quad (1.55)$$

onde  $I$  é dada em (1.16). O Lema 1.6 segue do resultado a seguir:

**Proposição 1.5 (1995, [6])** *Sobre as condições (i) e (ii) do Teorema 1.3, existe  $\tau_1$ , tal que  $\forall \tau \in [0, \tau_1]$ , existe uma solução não trivial  $u \geq 0$  do problema (1.55). Além disso, esta solução  $u \in S_\tau$  e o máximo em (1.55) é positivo.*

Vejam os primeiramente a demonstração do Lema 1.6 usando a Proposição 1.5.

**Prova do Lema 1.6.** O problema variacional (1.55), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\max \{I(v); N_\tau(v) \leq 1\}.$$

Mostremos primeiramente que  $N'_\tau(u) \neq 0$ , para todo  $u$  dada pela Proposição 5. Suponhamos que não, isto é,  $N'_\tau(u) = 0$ . Logo,  $u$  é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + [q(x) - \tau]u = 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.56)$$

Como  $u$  é não negativa e não trivial em  $\bar{\Omega}$ , temos pelo Lema 0.1 que  $u > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . De fato, suponhamos que não. Uma vez que,  $u \geq 0$  e  $u \neq 0$  em  $\bar{\Omega}$ , deve existir  $x_0 \in \partial\Omega$ , tal que  $u(x_0) = 0$ . Além disso,  $q(x) - \tau \in L^\infty(\Omega)$ , pois  $q \in C(\bar{\Omega})$ . Assim, estamos sob as hipóteses do Lema 0.1, dado na página 11. Portanto,  $\partial_\nu u(x_0) < 0$ , o que contradiz a condição de fronteira de (1.56).

Agora, note que  $u > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ , só pode acontecer quando  $\tau = 0$ . Com efeito, já que  $u$  tem sinal definido, e o primeiro autovalor de  $-\Delta + q(x)$  é 0, então por (1.56) devemos ter  $\tau = 0$ . Logo, (1.56) torna-se:

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = 0 & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.57)$$

O que nos dá, por (1.10), página 17, que  $u = \theta\varphi$ , para alguma constante  $\theta > 0$ . Então, por (ii), temos que:

$$I(u) = \theta^{p+1} \int_{\Omega} a(x)\varphi^{p+1} dx < 0,$$

o que é um absurdo, pois  $I(u) > 0$ , já que pela Proposição 1.5 o máximo em (1.55) é positivo.

Portanto, como  $N'_\tau(u) \neq 0$ , existe um multiplicador de Lagrange  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , tal que:

$$\Lambda N'_\tau(u) = I'(u), \quad (1.58)$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\Lambda [-\Delta u + (q(x) - \tau)u] = (p+1)a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \lambda [-\Delta u + (q(x) - \tau)u] = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.59)$$

onde  $\lambda = (2\Lambda)/(p+1)$ .

Multiplicando (1.59), por  $u$  e integrando, pela fórmula de Green (cf. equação (6)) e a condição de fronteira de (1.59), obtemos:

$$\lambda \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + (q(x) - \tau)u^2] dx = \int_{\Omega} a(x)u^{p+1} dx,$$

isto é,

$$\lambda N_{\tau}(u) = I(u).$$

Mas, pela Proposição 1.5,  $u \in S_{\tau}$ , o que implica  $N_{\tau}(u) = 1$  e, portanto,  $\lambda = I(u) > 0$ . Novamente, pelo Lema 0.1, do fato de  $u \geq 0$  e  $u \neq 0$ , segue que  $u > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . Então  $v = \lambda^{-1/(p-1)}u$  é uma solução positiva de (1.47). Assim, o Teorema 1.3 está demonstrado. ■

Vamos agora, à prova da Proposição 1.5.

**Prova da Proposição 1.5.** Vamos dividir a prova em vários passos.

Seja  $M = \sup \{I(u); u \in B_{\tau}\}$ , com  $M \in (-\infty, +\infty]$ .

(a) Para qualquer  $\tau \geq 0$ , temos  $M \in (0, +\infty]$  e  $S_{\tau}$  não vazio.

De fato, tomemos uma função  $w$  com suporte em  $\Omega^+$ , tal que  $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$  seja grande com respeito a  $\int_{\Omega} w^2 dx$ , de modo que  $N_{\tau}(w) > 0$ . Como  $N_{\tau}(w)$  é contínua, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que para alguma constante  $\theta > 0$ , existe  $v = \theta w$ , tal que  $N_{\tau}(v) = 1$  e além disso:

$$I(v) = \theta^{p+1} \int_{\Omega} a(x)w^{p+1} dx = \theta^{p+1} \int_{\Omega^+} a(x)w^{p+1} dx > 0.$$

Portanto,  $v \in S_{\tau}$  e  $M > 0$ .

(b) Limitação da seqüência maximizante, para algum  $\tau_1$  conveniente.

Consideremos,  $(u_n)$  uma seqüência maximizante para o problema (1.55), isto é,  $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ , tal que  $N_{\tau}(u_n) \leq 1$  e  $I(u_n)$ , é uma seqüência crescente convergindo para  $M > 0$ . Como,  $N_{\tau}(u) = N_{\tau}(|u|)$  e também  $I(u) = I(|u|)$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $u_n \geq 0$ . Seja  $V$  o subespaço ortogonal (com respeito ao produto interno de  $L^2(\Omega)$ ) de  $\varphi$  em  $H^1(\Omega)$ , tal que  $H^1(\Omega) = \mathbb{R}\{\varphi\} \oplus V$ , onde lembramos que  $\varphi$  é dado em (1.10).

Decompomos  $u_n$  como:

$$u_n = t_n \varphi + v_n \text{ com } t_n \in \mathbb{R} \text{ e } v_n \in V.$$

De fato, escolhemos  $\varphi > 0$  normalizado, no sentido que,  $\int_{\Omega} \varphi^2 = 1$ . Assim, multiplicando  $u_n$  por  $\varphi$ , temos que  $t_n \varphi^2 = u_n \varphi - v_n \varphi$ . Integrando, segue que

$$t_n = \int_{\Omega} u_n \varphi dx,$$

onde estamos usando o fato que,  $\int_{\Omega} v_n \varphi \, dx = 0$ . Então,  $v_n$  é dado por:

$$v_n = u_n - \left( \int_{\Omega} u_n \varphi \, dx \right) \varphi.$$

Agora, tomemos  $\tau_1 > 0$  suficientemente pequeno, tal que  $\tau_1 < \mu_2$ , onde  $\mu_2$  denota o segundo autovalor de:

$$\begin{cases} -\Delta \psi + q(x)\psi = \mu \psi & \text{em } \Omega \\ \partial_{\nu} \psi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.60)$$

Sabemos que  $\mu_1 = 0 < \mu_2$ . Conseqüentemente, para qualquer  $\tau$  com  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ , a quantidade

$$\int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + (q(x) - \tau)|v|^2] \, dx = \|v\|^2, \quad v \in V, \quad v \neq 0,$$

é positiva, e  $\|v\|$  é equivalente a norma usual de  $H^1(\Omega)$  (veja a demonstração no Lema a seguir).

Usando (1.10) e  $\int_{\Omega} v_n \varphi \, dx = 0$ , vemos que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} (q(x) - \tau) \varphi v_n \, dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v_n \, dx + \int_{\Omega} q(x) \varphi v_n \, dx \stackrel{1.10}{=} 0.$$

Então, usando esta igualdade e a norma equivalente dada acima para  $v_n$ , vemos que  $N_{\tau}(u_n) = \|v_n\|^2 - \tau t_n^2$  e, portanto, a condição  $N_{\tau}(u_n) \leq 1$ , implica que

$$\|v_n\|^2 - \tau t_n^2 \leq 1. \quad (1.61)$$

Suponhamos agora que  $u_n$  não é limitada em  $H^1(\Omega)$ . Notemos que, por (1.61),  $|t_n|$  não é limitada (mesmo quando  $\tau = 0$ ). De fato, suponhamos que  $t_n$  seja limitada, então, por (1.61),  $\|v_n\|^2 \leq 1 + \tau t_n^2$ , o que implica  $v_n$  limitada e portanto  $u_n$  também o é, o que é uma contradição.

Assim, podemos supor que  $|t_n| \rightarrow \infty$ . Logo, usando (1.61) novamente, temos que para qualquer  $\delta > 0$ , podemos escolher  $\tau_1(\delta)$  pequeno, de modo que, se  $n$  é grande o suficiente e  $\tau \leq \tau_1(\delta)$  então:

$$\left\| \frac{v_n}{t_n} \right\| \leq \delta. \quad (1.62)$$

Com efeito, de (1.61), observamos que  $\|v_n\|^2 \leq 1 + \tau |t_n|^2$ . Dividindo ambos os membros por  $|t_n|^2$ , temos que

$$\left\| \frac{v_n}{t_n} \right\|^2 \leq \frac{1}{|t_n|^2} + \tau.$$

Agora, usando que  $|t_n| \rightarrow \infty$  e que  $\tau \leq \tau_1(\delta)$ , obtemos

$$\left\| \frac{v_n}{t_n} \right\|^2 \leq \frac{1}{|t_n|^2} + \tau \leq \frac{\delta^2}{2} + \tau_1(\delta).$$

Uma vez que,  $\tau_1$  depende de  $\delta$  podemos escolhê-lo de modo que,  $\tau_1(\delta) \leq \delta^2/2$ . Logo,

$$\left\| \frac{v_n}{t_n} \right\|^2 \leq \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} = \delta^2 \Rightarrow \left\| \frac{v_n}{t_n} \right\| \leq \delta.$$

Consideremos,  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$T(v) = \int_{\Omega} a(x) |\varphi(x) + v(x)|^{p+1} dx.$$

Notemos que, por (ii)

$$T(0) = \int_{\Omega} a(x) \varphi(x)^{p+1} dx < 0.$$

Além disso, se  $v_n \rightarrow 0$  na norma equivalente dada acima, então, usando que  $V$  está imerso compactamente em  $L^{p+1}(\Omega)$  (Teorema de Rellich-Kondrachov, veja Teorema 0.8), obtemos

$$T(v_n) \rightarrow T(0),$$

ou seja,  $T$  é contínua na origem. Logo, tomando  $\delta$  suficientemente pequeno, temos que  $T(v) < 0$  para todo  $v \in V$  com  $\|v\| < \delta$ .

Fixemos  $\tau_1 = \tau_1(\delta)$ . Observemos que, para  $n$  suficientemente grande,  $\tau \leq \tau_1$  e por (1.62), temos

$$I(u_n) = |t_n|^{p+1} \int_{\Omega} a(x) \left| \varphi(x) + \frac{v_n(x)}{t_n} \right|^{p+1} dx < 0,$$

o que é absurdo, uma vez que,  $I(u_n) \nearrow M > 0$ . Isto mostra-nos que, pela escolha de  $\tau_1$ ,  $u_n$  é limitada em  $H^1(\Omega)$  e  $0 < M < \infty$ .

(c) *Convergência fraca.*

Pelo passo (b) e o Teorema 0.6, existe uma subsequência  $u_n$  (passando a subsequência se necessário), tal que:

$$\begin{aligned} u_n \rightharpoonup u & \quad \text{converge fraco em} & H^1(\Omega); \\ u_n \rightarrow u & \quad \text{converge forte em} & L^\alpha(\Omega), \text{ para } 1 \leq \alpha < 2^* \text{ e} \\ u_n \rightarrow u & \quad \text{em quase toda parte de} & \Omega, \end{aligned}$$

onde claramente estamos usando a imersão compacta de  $H^1(\Omega)$  em  $L^\alpha(\Omega)$  com  $1 \leq \alpha < 2^*$  (cf. Teorema 0.8) e o Teorema 0.4.

Portanto,  $u \geq 0$ . Usando novamente o Teorema 0.4 e o Teorema 0.3, segue que

$$I(u) = M > 0$$

e então  $u \neq 0$ , pois  $I(0) = 0$ .



Além disso, pela convergência fraca, temos pelo Teorema 0.5 que:

$$N_\tau(u) \leq 1, \text{ isto é } u \in B_\tau.$$

Assim,  $u$  é uma solução para o problema de maximização (1.47).

Agora, suponhamos (por contradição) que  $u \notin S_\tau$ , ou seja,  $N_\tau(u) < 1$ . Então,  $u$  é um máximo interior para  $I$ . Como todo máximo é ponto crítico, segue que  $I'(u) = 0$ . Logo,

$$a(x)u^p = 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Isto implica que:

$$I(u) = \int_{\Omega} a(x)u^{p+1} dx = 0,$$

o que contradiz  $I(u) = M > 0$ . A prova da Proposição 1.5 e do Teorema 1.3 estão completas. ■

**Lema 1.7** *Sob as hipóteses e notações impostas na parte (b) da prova da Proposição 6, temos que*

$$\int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + (q(x) - \tau)|v|^2] dx = \|v\|^2, v \in V, v \neq 0,$$

é positiva e  $\|v\|$  é equivalente a norma usual de  $H^1(\Omega)$

**Prova.** Vejamos primeiramente a positividade. A caracterização de  $\mu_2$ , é dada por:

$$\mu_2 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + q(x)u^2)}{\int_{\Omega} u^2} : u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}, u \perp \mathbb{R} \{\varphi\} \right\}.$$

Logo, para  $v \in V$  com  $v$  não nula temos:

$$\|v\|^2 \geq \mu_2 \int_{\Omega} u^2 - \tau \int_{\Omega} u^2 = (\mu_2 - \tau) \int_{\Omega} u^2 > 0,$$

pois por hipótese,  $\tau < \mu_2$ . Além disso, é fácil ver que

$$\int_{\Omega} [\nabla v \nabla w + (q(x) - \tau)vw] dx$$

é bilinear. Logo,  $\|v\|$  é uma norma. Agora, vejamos que esta norma é equivalente a norma usual de  $H^1(\Omega)$ . Suponhamos que este não é o caso. Então, podemos tomar uma seqüência  $v_n \in V$ , tal que  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$  e:

$$\int_{\Omega} [|\nabla v_n|^2 + (q(x) - \tau)|v_n|^2] dx \rightarrow 0. \quad (1.63)$$

Novamente, pela caracterização de  $\mu_2$ , obtemos que

$$\int_{\Omega} [|\nabla v_n|^2 + (q(x) - \tau)|v_n|^2] dx \geq (\mu_2 - \tau) \int_{\Omega} v_n^2,$$

mas,  $\mu_2 - \tau > 0$  e então  $v_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$ . Uma vez que  $q$  é limitada, pois é contínua num compacto, temos que

$$\int_{\Omega} q(x)v_n^2 \rightarrow 0.$$

Isto e (1.63) implicam que:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \rightarrow 0,$$

donde conclui-se que  $v_n \rightarrow 0$  em  $H^1(\Omega)$ , o que é uma contradição, pois supomos que  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ . ■

Finalmente, para terminar a abordagem deste capítulo, vamos fazer a demonstração da Proposição 1.1, dada na página 18.

**Prova da Proposição 1.1.** Suponhamos que  $a < 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . Suponhamos também que,  $u$  é solução positiva de (1.1) e consideremos  $\varphi$  dada em (1.8). Multiplicando (1.1) por  $\varphi$  e (1.8) por  $u$ , obtemos respectivamente:

$$-\Delta u\varphi + m(x)u\varphi = a(x)u^p\varphi$$

e

$$-\Delta\varphi u + m(x)u\varphi = \mu_1\varphi u.$$

Integrando as equações acima e aplicando a fórmula em (6), segue respectivamente que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} m(x)u\varphi \, dx = \int_{\Omega} a(x)u\varphi \, dx$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} m(x)u\varphi \, dx = \int_{\Omega} \mu_1 u\varphi \, dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \mu_1 u\varphi \, dx = \int_{\Omega} a(x)u\varphi \, dx < 0,$$

pois  $a < 0$  e  $u, \varphi > 0$ . Portanto,  $\mu_1 < 0$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $a < 0$  sobre  $\bar{\Omega}$  e  $\mu_1 < 0$ . Então, para uma constante  $M$  grande o suficiente, a função  $\bar{u} = M$  é uma supersolução para (1.1). Com efeito, uma vez que  $a < 0$ , podemos escolher  $M$  grande o suficiente para que  $m(x)M \geq a(x)M^p$ . Assim:

$$-\Delta\bar{u} + m(x)\bar{u} = 0 + m(x)\bar{u} = m(x)M \leq a(x)\bar{u}^p,$$

para  $M$  suficientemente grande.

Por outro lado, tomando a correspondente autofunção  $\varphi$  de (1.10), seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e temos:

$$-\Delta(\varepsilon\varphi) + m(x)\varepsilon\varphi = \varepsilon(-\Delta\varphi + m(x)\varphi) \stackrel{1.10}{=} \varepsilon\mu_1\varphi.$$

Agora, observemos que como  $\mu_1 < 0$  e  $a < 0$ , podemos tomar  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente, para que  $\varepsilon\mu_1\varphi < a(x)\varepsilon^p\varphi^p$ , lembrando que  $\varphi > 0$ . Assim, a igualdade acima se torna:

$$-\Delta(\varepsilon\varphi) + m(x)\varepsilon\varphi < a(x)\varepsilon^p\varphi^p,$$

ou seja,  $\varepsilon\varphi$  é uma subsolução para (1.1). Além disso, podemos escolher  $\varepsilon$ , pequeno o suficiente, para que  $\varepsilon\varphi < \bar{u}$ . Logo, pelo Teorema 0.9, existe uma solução para (1.1).

■

A prova da Proposição 1.2 segue por argumentos análogos.

## Capítulo 2

# Mais Considerações sobre Equações Elípticas Superlineares Indefinidas

Neste capítulo estaremos interessados em obter resultados mais gerais para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio suave limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $\nu$  é a normal unitária exterior,  $a$  e  $m$  são funções contínuas em  $\bar{\Omega}$ , com  $a$  mudando de sinal.

Denotaremos por  $\mu_1$  o primeiro autovalor do operador linear do lado esquerdo de (2.1), ou seja, consideraremos o problema (1.8). Na seção 1.5, estabelecemos o Teorema 1.3, porém, devemos perceber que fizemos isto com  $m(x) = q(x) - \tau$ ,  $\mu_1 = -\tau$  e tal resultado foi obtido em termos de  $\tau$ . Uma questão natural é se, sob a condição  $\int_{\Omega} a\varphi^{p+1} < 0$ , podemos caracterizar mais geralmente a existência de soluções do problema (2.1) somente em termos de  $\mu_1$ . Vamos ver que isto, não é verdade em geral, mas sob várias hipóteses adicionais o resultado será válido. Vale ressaltar que nos limitaremos ao caso em que  $\mu_1 < 0$ , pois na seção 1.4 (o caso coercivo) não precisamos modificar  $m$  para obter o resultado.

Devemos observar também, que na demonstração do Lema 1.4 obtemos que:

$$\tau < \lambda_1(A) + \|q\|_{L^\infty},$$

onde  $\lambda_1(A)$  é o primeiro autovalor de  $-\Delta$  em  $A$ , com condições de fronteira de Dirichlet e  $A$  é qualquer bola aberta não vazia contida em  $\Omega^+$ . De posse destas informações, fazemos a seguinte:

**Conjectura 1 (1996, [23])** *Para qualquer  $R > 0$ , existe um número  $\mu(R) < 0$ , tal que, para funções contínuas  $m$  com  $|m|_0 < R$  satisfazendo:*

$$\int_{\Omega} a(x)\varphi_m^{p+1} < 0 \quad \text{e} \quad \mu(R) < \mu_1 < 0$$

*o problema (2.1) tem uma solução.*

Onde  $\varphi_m$  denotará a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor  $\mu_1$  do operador linear:  $-\Delta + m(x)$  com condições de fronteira de Neumann homogênea. O motivo para adotarmos a notação  $\varphi_m$ , deve-se ao fato de querermos enfatizar que o problema, que será abordado, não depende da escolha de um  $m$  adequado, como feito no capítulo anterior. Além disso, para simplificarmos nossa exposição, ao invés de dizermos que  $\mu_1$  é o primeiro autovalor do operador linear  $-\Delta + m(x)$ , escreveremos  $\mu_1(-\Delta + m(x))$  e quando não houver confusão, diremos simplesmente  $\mu_1$ .

Veremos que a resposta a esta conjectura é um problema delicado e que não é verdade em geral. O principal resultado que iremos demonstrar será o seguinte:

**Teorema 2.1 (1996, [23])** *Suponhamos que  $\int_{\Omega} a < 0$ , então para cada  $R > 0$  existe um número  $\mu = \mu(R) < 0$ , tal que para toda função  $m \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , ( $0 < \alpha < 1$ ) com  $|m|_{0,\alpha} \leq R$ , se:*

- (i)  $\int_{\Omega} m \leq 0$ ,
- (ii)  $\mu(R) < \mu_1(-\Delta + m(x)) < 0$ ,
- (iii)  $\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} < 0$ ,

então o problema (2.1) tem uma solução. Além disso, a conclusão não é verdade se  $\int_{\Omega} a \geq 0$ .

A prova deste e de outros Teoremas são os objetivos que trataremos na seção a seguir. Na seção 2.2, veremos que o sinal de  $\int_{\Omega} a(x)dx$  tem papel fundamental para a existência de solução do problema (2.1).

## 2.1 Resultados de Existência

Primeiramente estabeleceremos algumas notações e hipóteses. Consideremos o seguinte problema elíptico semilinear de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p, & u > 0 \quad \text{em } \Omega \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_m)$$

onde:

- (i)  $\Omega$  é um subconjunto aberto e limitado de  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave,  $N \geq 3$ ,
- (ii)  $a$  e  $m$  são funções contínuas definidas sobre  $\overline{\Omega}$ ,  $a$  muda de sinal em  $\Omega$  e a medida do conjunto  $\{x \in \Omega : a(x) = 0\}$  é nula, isto é, denotando:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\},$$

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : a(x) < 0\} \text{ e}$$

$$\Omega^0 = \Omega \setminus \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

temos que  $\Omega^+ \neq \emptyset$ ,  $\Omega^- \neq \emptyset$  e  $|\Omega^0| = 0$ ,

(iii)  $p$  é subcrítico, ou seja,  $1 < p < 2^* - 1 = (N + 2)/(N - 2)$ ,

(iv)  $\mu_1(-\Delta + m(x)) < 0$ , em outras palavras, existe  $\varphi_m > 0$ , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_m + m(x)\varphi_m = \mu_1\varphi_m, & \text{em } \Omega \\ \partial_\nu\varphi_m = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

com  $\varphi_m$  normalizado, isto é,  $\int_\Omega \varphi_m^2 = 1$ .

Notemos que o espaço de Sobolev que iremos usar será o  $H^1(\Omega)$  e lembremos que a norma em  $H^1(\Omega)$  é dada por:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2.$$

Por simplificação denotaremos  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  por  $\|\cdot\|$ .

Nosso primeiro resultado é um tipo de perturbação na classe das funções contínuas para o problema  $(P_m)$ .

**Teorema 2.2 (1996, [23])** *Suponhamos que  $\mu_1(-\Delta + m(x)) = 0$  e  $\int_\Omega a\varphi_m^{p+1} < 0$ , então existe algum  $R > 0$ , tal que para qualquer função contínua  $n$ , com  $|m - n|_0 < R$ , o problema  $(P_n)$  tem solução.*

Antes de demonstrarmos este Teorema, vamos precisar demonstrar resultados de dependência contínua para os autovalores e as autofunções. Desta forma, enunciamos o seguinte:

**Lema 2.1 (2004, [2])** *Seja  $(m_j)$ , uma seqüência de funções contínuas sobre  $\bar{\Omega}$ , convergindo na topologia uniforme para  $m$  dada acima, para todo  $j = 1, 2, \dots$ . Denotemos por  $\mu_1^j$  e  $\mu_1$  os primeiros autovalores de  $-\Delta + m_j(x)$  e  $-\Delta + m(x)$ , respectivamente com condições de fronteira de Neumann homogêneas. Então:*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_1^j = \mu_1.$$

**Prova.** Seja:

$$Q_m(u) = \int_\Omega [|\nabla u|^2 + mu^2] dx.$$

Ora, a caracterização de  $\mu_1^j$  é dada por:

$$\mu_1^j = \inf \left\{ \int_\Omega [|\nabla u|^2 + m_j(x)u^2] : u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u^2 dx = 1 \right\},$$

ou ainda,

$$\mu_1^j = \inf \left\{ Q_{m_j}(u) : u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\}$$

e a caracterização de  $\mu_1$  é:

$$\mu_1 = \inf \left\{ Q_m(u) : u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \right\}.$$

Então, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $J \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$\begin{aligned} |Q_{m_j}(u) - Q_m(u)| &= \left| \int_{\Omega} (m_j - m) u^2 dx \right| \\ &\leq |m_j - m|_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= |m_j - m|_0 < \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.3}$$

para todo  $j \geq J$  e toda  $u \in H^1(\Omega)$ , com  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Seja,  $\varphi_m$  a primeira autofunção normalizada associada a  $\mu_1$ . Como,  $\|\varphi_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$  e  $\varphi_m \in H^1(\Omega)$ , temos, por (2.3) que

$$\mu_1^j \leq Q_{m_j}(\varphi_m) < \varepsilon + Q_m(\varphi_m) = \varepsilon + \mu_1, \quad \forall j \geq J. \tag{2.4}$$

Da mesma forma, consideremos  $\varphi_{m_j}$  a primeira autofunção normalizada associada a  $\mu_1^j$ . Como,  $\|\varphi_{m_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1$  e  $\varphi_{m_j} \in H^1(\Omega)$ , segue por (2.3) que

$$\mu_1 \leq Q_m(\varphi_{m_j}) < \varepsilon + Q_{m_j}(\varphi_{m_j}) = \varepsilon + \mu_1^j, \quad \forall j \geq J. \tag{2.5}$$

Portanto, de (2.4) e (2.5) obtemos que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_1^j = \mu_1. \quad \blacksquare$$

Agora, mostraremos que as autofunções  $\varphi_{m_j}$  e  $\varphi_m$  acima denotadas, também tem dependência contínua. Mais precisamente, provaremos o:

**Lema 2.2 (2004, [2])** *Sob as hipóteses e notações do Lema 2.1, temos que*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{m_j} = \varphi_m,$$

em  $H^1(\Omega)$ .

**Prova.** Como  $m_j \rightarrow m$  na topologia uniforme, existe uma constante  $C_1 > 0$ , tal que  $|m_j|_0 < C_1, \forall j$ . Do fato de  $\varphi_{m_j}$  ser a primeira autofunção positiva do operador linear  $-\Delta + m_j(x)$ , temos que  $\varphi_{m_j}$  satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi_{m_j} + m_j(x) \varphi_{m_j} = \mu_1^j \varphi_{m_j}, & \text{em } \Omega \\ \partial_{\nu} \varphi_{m_j} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \text{ e} \\ \int_{\Omega} \varphi_{m_j}^2 = 1. & \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Multiplicando a equação (2.6) por  $\varphi_{m_j}$  e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_{m_j}|^2 = - \int_{\Omega} m_j(x) \varphi_{m_j}^2 + \mu_1^j.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_{m_j}|^2 \leq |\mu_1^j| + |m_j|_0 \int_{\Omega} \varphi_{m_j}^2 = |\mu_1^j| + |m_j|_0,$$

e, portanto, existe uma constante  $C_2 > 0$ , tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_{m_j}|^2 \leq C_2, \quad \forall j.$$

Além disso, sabemos que  $\|\varphi_{m_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , donde concluímos que  $\varphi_{m_j}$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ . Pelo Teorema 0.6, passando a subsequência se necessário, segue que

$$\varphi_{m_j} \rightharpoonup b \text{ em } H^1(\Omega), \quad (2.7)$$

isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_{m_j} \nabla z + \int_{\Omega} \varphi_{m_j} z \rightarrow \int_{\Omega} \nabla b \nabla z + \int_{\Omega} b z, \quad \forall z \in H^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Pelo Teorema 0.8, ainda obtemos que

$$\varphi_{m_j} \rightarrow b \text{ em } L^\alpha(\Omega), \quad \text{com } 1 \leq \alpha < 2^*, \quad (2.9)$$

além do mais, segue do Teorema 0.4 que:

$$\varphi_{m_j} \rightarrow b \text{ q.t.p em } \Omega \text{ e } |\varphi_{m_j}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \quad (2.10)$$

com  $h$  dada no Teorema 0.4.

Assim, em particular se  $\alpha = 2$  em (2.9), temos que  $\varphi_{m_j} \rightarrow b$  em  $L^2(\Omega)$ , o que nos dá que  $\|b\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1$ . Aliás, uma vez que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert e convergência forte implica em convergência fraca, ou seja, a convergência  $\varphi_{m_j} \rightarrow b$  em  $L^2(\Omega)$  pode ser vista como:

$$\int_{\Omega} \varphi_{m_j} z \rightarrow \int_{\Omega} b z, \quad \forall z \in H^1(\Omega),$$

temos por (2.8) que:

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_{m_j} \nabla z \rightarrow \int_{\Omega} \nabla b \nabla z, \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Multiplicando (2.6) por  $z \in H^1(\Omega)$  e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_{m_j} \nabla z + \int_{\Omega} m_j(x) \varphi_{m_j} z = \mu_1^j \int_{\Omega} \varphi_{m_j} z. \quad (2.11)$$



Como  $m_j \rightarrow m$  uniformemente em  $\Omega$ , segue usando a desigualdade de Hölder (cf. Teorema 0.2), que  $m_j z \rightarrow m z$  em  $L^2(\Omega)$ ,  $\forall z \in H^1(\Omega)$ . Assim, já que  $\varphi_{m_j} \rightarrow b$  em  $L^2(\Omega)$ , afirmamos que:

$$\int_{\Omega} m_j \varphi_{m_j} z \rightarrow \int_{\Omega} m b z, \quad (2.12)$$

quando  $j \rightarrow \infty$ . Com efeito, usando o Teorema 0.2, obtemos para todo  $z \in H^1(\Omega)$  que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} m_j \varphi_{m_j} z - \int_{\Omega} m b z \right| &= \left| \int_{\Omega} [m_j \varphi_{m_j} - m b] z \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |m_j \varphi_{m_j} - m_j b| |z| + \int_{\Omega} |m_j b - m b| |z| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\varphi_{m_j} - b|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |m_j z|^2 \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |(m_j - m) z|^2 \right)^{1/2} \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

onde devemos lembrar que,  $\int_{\Omega} |b|^2 = 1$ .

Agora, passando ao limite em (2.11), quando  $j \rightarrow \infty$  e usando (2.12), o Lema 2.1 e as observações acima, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla b \nabla z + \int_{\Omega} m b z = \mu_1 \int_{\Omega} b z, \quad \forall z \in H^1(\Omega).$$

Desta igualdade, concluímos que  $b$  é uma solução fraca para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta z + m(x)z = \mu_1 z, & \text{em } \Omega \\ \partial_{\nu} z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donde deduz-se que  $b$  deve ser um múltiplo de  $\varphi_m$ , pois  $\dim \mathbb{R} \{ \varphi_m \} = 1$ . Dito em outras palavras, existe um número  $\theta$ , tal que  $b = \theta \varphi_m$ . Vejamos que  $\theta = 1$ . De fato, sabemos que  $b^2 = \theta^2 \varphi_m^2$  e então:

$$1 = \int_{\Omega} b^2 = \theta^2 \int_{\Omega} \varphi_m^2 = \theta^2.$$

O que nos dá  $\theta = \pm 1$ . Para concluirmos que  $\theta = 1$ , lembramos que  $\varphi_m > 0$  e, portanto, de (2.10) segue que  $b > 0$ . Logo,  $b = \varphi_m$ . Portanto,

$$\varphi_{m_j} \rightharpoonup \varphi_m$$

em  $H^1(\Omega)$ . Por outro lado, por argumentos análogos aos usados acima, segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_{m_j}|^2 = \mu_1^j - \int_{\Omega} m_j \varphi_{m_j}^2 \rightarrow \mu_1 - \int_{\Omega} m \varphi_m^2 = \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2,$$

e então  $\varphi_{m_j} \rightarrow \varphi_m$  em  $H^1(\Omega)$ . ■

Agora, vejamos a prova do Teorema 2.2. Antes, vale salientar que esta prova segue os mesmos moldes que a prova da Proposição 6, dada no capítulo anterior. Por isto muitos dos resultados que serão aqui apresentados, seguem facilmente dos apresentados na prova da Proposição citada.

**Prova do Teorema 2.2.** Argumentaremos por contradição. Suponhamos que este não é o caso, então existe uma seqüência  $(m_j)$  de funções contínuas, tal que:

- (a)  $m_j \rightarrow m$  na topologia uniforme,
- (b) o problema  $(P_{m_j})$  não tem solução.

Definamos  $\mu_1^j$  e  $\mu_2^j$  o primeiro e segundo autovalor de  $-\Delta + m_j(x)$  respectivamente e,  $\varphi_{m_j}$  a primeira autofunção positiva de tal operador. Notemos que, podemos definir estes autovalores, pois  $\Omega^+ \neq \emptyset$  e  $\Omega^- \neq \emptyset$  (cf. [10]). Além disso, podemos supor que  $\mu_1^j < 0$ ,  $\forall j$  e que  $\varphi_{m_j}$  e  $\varphi_m$  são normalizados, isto é:

$$\|\varphi_{m_j}\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\varphi_{m_j})^2 = 1 \quad \text{e} \quad \|\varphi_m\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (\varphi_m)^2 = 1.$$

Dos Lemas 2.2 e 2.1, segue que:

- (A1)  $\varphi_{m_j} \rightarrow \varphi_m$  em  $H^1(\Omega)$ ,
- (A2)  $\mu_1^j \rightarrow \mu_1 = 0$ , quando  $j \rightarrow \infty$ ,
- (A3)  $\mu_2^j \rightarrow \mu_2(-\Delta + m(x)) > \mu_1 = 0$ , quando  $j \rightarrow \infty$ .

A prova de (A3) é análoga a prova do Lema 2.1, mas devemos observar, que a caracterização de  $\mu_2^j$  será dada por:

$$\mu_2^j = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + m_j u^2)}{\int_{\Omega} u^2} : u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}, u \perp \mathbb{R} \{\varphi_{m_j}\} \right\}.$$

Por hipótese, sabemos que

$$\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} < 0.$$

Como  $p + 1 < 2^*$ , temos por (A1), o Teorema 0.8 e o Teorema 0.4 combinado com o Teorema 0.3, que existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $j$ :

$$\int_{\Omega} a \varphi_{m_j}^{p+1} < -\delta. \tag{2.13}$$

Para cada  $j$ , definamos o funcional  $J$  e o conjunto  $S_j$ , como segue:

$$J(u) = \int_{\Omega} a |u|^{p+1}, \quad S_j = \{u \in H^1 : N_j(u) = 1\},$$

onde  $N_j(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + m_j(x)u^2$  e consideremos o problema de maximizaçãõ:

$$\sup_{u \in S_j} J(u) = \alpha_j. \quad (2.14)$$

Pelos mesmos argumentos dados em (a) na prova da Proposiçãõ 6, vemos que  $S_j \neq \emptyset$  e  $\alpha \in (0, +\infty]$  para todo  $j$ .

Fixemos  $j$  por um momento. Suponhamos que  $(u_k^j)_{k=1}^{\infty}$  é uma seqüência maximizante para (2.14), isto é:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k^j|^2 + m_j(x)|u_k^j|^2 = 1, \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k^j) = \alpha_j > 0. \quad (2.15)$$

Como  $J(u) = J(|u|)$  e  $N_j(u) = N_j(|u|)$ , podemos supor que cada  $u_k^j$  é não negativo. Agora, vamos decompor  $H^1(\Omega)$  da mesma forma que em (b) da prova da Proposiçãõ 6, isto é, decompos cada  $u_k^j$  como:

$$u_k^j = v_k^j + t_k^j \varphi_{m_j}, \quad \text{com} \quad \int_{\Omega} v_k^j \varphi_{m_j} = 0. \quad (2.16)$$

Devemos notar, que o Lema 1.7 também se aplica aqui, ou seja:

$$\|v_k^j\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v_k^j|^2 + m_j(x)|v_k^j|^2$$

é positiva e equivalente a norma usual de  $H^1(\Omega)$ , onde deve-se usar (A3). Notemos que, multiplicando a equaçãõ (2.6) por  $v_k^j$  e integrando por partes, obtemos por (2.16):

$$\int_{\Omega} \nabla v_k^j \nabla \varphi_{m_j} + \int_{\Omega} m_j v_k^j \varphi_{m_j} = \mu_1^j \int_{\Omega} v_k^j \varphi_{m_j} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_k^j|^2 + m_j(x)|u_k^j|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v_k^j|^2 + 2t_k^j \int_{\Omega} \nabla v_k^j \nabla \varphi_{m_j} + (t_k^j)^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{m_j}|^2 \\ &+ \int_{\Omega} m_j(x)|v_k^j|^2 + 2t_k^j \int_{\Omega} m_j v_k^j \varphi_{m_j} + (t_k^j)^2 \int_{\Omega} m_j \varphi_{m_j}^2 \\ &= \|v_k^j\|^2 + (t_k^j)^2 \mu_1^j + 2t_k^j \mu_1^j \int_{\Omega} v_k^j \varphi_{m_j} \\ &= \|v_k^j\|^2 + (t_k^j)^2 \mu_1^j. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (2.15) como:

$$1 = \int_{\Omega} |\nabla u_k^j|^2 + m_j(x)|u_k^j|^2 = \|v_k^j\|^2 + (t_k^j)^2 \mu_1^j. \quad (2.17)$$

Usaremos (2.17) para mostrar que:  $(u_k^j)_k$  é limitada na norma de  $H^1(\Omega)$ . De fato, suponhamos que  $\|u_k^j\|_{H^1(\Omega)}$  não é limitada. Então, por (2.17), temos que  $(t_k^j)$  não é limitada, nem tão pouco  $(v_k^j)$ , pois se  $t_k^j$  fosse limitada teríamos que:

$$\|v_k^j\|^2 = 1 - \mu_1^j (t_k^j)^2,$$

seria limitada e portanto  $(u_k^j)$ , da mesma forma verificamos para  $(v_k^j)$ . Assim, temos que:

$$(a1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k^j\| = \infty,$$

$$(a2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |t_k^j| = \infty \text{ e por (2.17),}$$

$$(a3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{v_k^j}{t_k^j} \right\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(t_k^j)^2} - \mu_1^j = -\mu_1^j.$$

Agora, sabemos que

$$0 < \alpha_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x) |u_k^j|^{p+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} |t_k^j| \int_{\Omega} a(x) \left| \varphi_{m_j} + \frac{v_k^j}{t_k^j} \right|^{p+1}. \quad (2.18)$$

Mas, por (2.13) temos que  $\int_{\Omega} a(x) \varphi_{m_j}^{p+1} < -\delta$ , para algum  $\delta > 0$  independente de  $j$ . Isto implica que, podemos escolher  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ , tal que, se  $v \in H^1(\Omega)$  com  $\|v\| < \varepsilon$ , então

$$\int_{\Omega} a(x) |\varphi_{m_j} + v|^{p+1} < -\frac{\delta}{2}, \quad \forall j.$$

Logo, se inicialmente escolhermos  $j$  grande o suficiente, tal que  $|\mu_1^j| < \varepsilon$  e então fixando-o, temos por (a3) que  $\|v_k^j/t_k^j\| < \varepsilon$  para  $k$  grande, donde segue que

$$\int_{\Omega} a(x) \left| \varphi_{m_j} + \frac{v_k^j}{t_k^j} \right|^{p+1} < 0,$$

para  $k$  grande, o que contradiz (2.18). Logo,  $\|u_k^j\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\|v_k^j\|$  e  $t_k^j$  são limitadas, e então pelo Teorema (0.6), passando a subsequência se necessário (em  $k$ ), temos que:

$$(B1) \quad u_k^j \rightharpoonup u^j \text{ em } H^1(\Omega),$$

$$(B2) \quad v_k^j \rightharpoonup v^j \text{ em } H^1(\Omega),$$

$$(B3) \quad t_k^j \rightarrow t^j \text{ em } H^1(\Omega) \text{ e}$$

$$(B4) \quad u^j = v^j + t^j \varphi_{m_j}, \text{ com } \int_{\Omega} v^j \varphi_{m_j} = 0.$$

Pelo Teorema 0.8, temos por (B1) e do fato de  $p+1 < 2^*$  que  $u_k^j \rightarrow u^j$  em  $L^{p+1}(\Omega)$ . Então, segue dos Teoremas 0.4 e 0.3 que

$$0 < \alpha_j = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k^j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a(x) |u_k^j|^{p+1} = \int_{\Omega} a(x) |u^j|^{p+1} = J(u^j).$$

Além disso, temos de (B2) e do Teorema 0.5 que:

$$\begin{aligned} N_j(u^j) &= \int_{\Omega} |\nabla u^j|^2 + m_j(x) |u^j|^2 = \|v^j\|^2 + \mu_1^j (t^j)^2 \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v_k^j\|^2 + \mu_1^j (t_k^j)^2 = 1. \end{aligned}$$

Assim, vamos considerar três casos, a saber:

**Caso 1.**  $0 < N_j(u^j) < 1$ . Neste caso, existe  $\rho > 1$ , tal que  $\rho u^j \in S_j$ . Mas, se isto acontece, obtemos

$$J(\rho u^j) = \rho^{p+1} J(u^j) > J(u^j) = \max_{u \in S_j} J(v),$$

o que é um absurdo, pois  $J(u^j) = \alpha_j$ .

**Caso 2.**  $N_j(u^j) \leq 0$ . Pela definição de  $N_j(u^j)$ , temos  $\|v^j\|^2 + \mu_1^j (t^j)^2 \leq 0$  ou  $\|v^j/t^j\|^2 \leq -\mu_1^j$ . Por outro lado, como já argumentamos (na prova da limitação da seqüência  $(u_k^j)_k$ ), pela escolha de  $j$  suficientemente grande a equação acima implica:

$$J(u^j) = |t^j| \int_{\Omega} a(x) \left| \varphi_{m_j} + \frac{v^j}{t^j} \right|^{p+1} < 0,$$

contradizendo o fato de  $\alpha_j = J(u^j)$  ser positivo.

**Caso 3.**  $N_j(u^j) = 1$ . Então,  $u^j \in S_j$  e o problema de maximização (2.14) tem uma solução. Assim, pelo Teorema 0.10 existe um multiplicador de Lagrange, tal que  $u^j$  é uma solução não negativa para o problema de autovalor não linear:

$$\begin{cases} -\Delta u + m_j(x)u = \beta a(x)u^p & u > 0 \text{ em } \Omega \\ \partial_{\nu} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde, para ver que  $N_j'(u^j) \neq 0$ , argumenta-se da mesma forma que na prova do Lema 1.6. Multiplicando a equação acima por  $u^j$  e integrando por partes, obtemos:

$$1 = N_j(u^j) = \int_{\Omega} |\nabla u^j|^2 + m_j(x)|u^j|^2 = \beta J(u^j).$$

Donde concluímos que  $\beta > 0$ . Assim,  $w^j = (1/\beta)^{-1/(p-1)} u^j$  é uma solução positiva para o problema  $(P_{m_j})$ . Mas, isto é novamente uma contradição, uma vez que estamos supondo que o problema  $(P_{m_j})$  não tem solução.

A prova do Teorema está completa. ■

Vejamos agora, dois resultados que são conseqüências diretas deste Teorema.

**Teorema 2.3 (1996, [23])** *Suponhamos que  $\int_{\Omega} a \neq 0$ , então existe um número  $R > 0$ , tal que, se  $|m|_0 < R$  e  $\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} < 0$ , o problema  $(P_m)$  tem pelo menos uma solução.*

**Prova.** Se  $\int_{\Omega} a > 0$ , então para  $R$  pequeno e  $|m|_0 < R$ , temos que

$$\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} > 0.$$

De fato, temos que  $\varphi_m \rightarrow C$  em  $H^1(\Omega)$  para alguma contante  $C > 0$  e então, pelo Teorema 0.8 e a desigualdade de Hölder (cf. Teorema 0.2), obtemos que

$$\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} \rightarrow \int_{\Omega} a c > 0.$$

Neste caso não há o que demonstrar, pois por hipótese  $\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} < 0$ .

Agora, se  $\int_{\Omega} a < 0$ , podemos aplicar o Teorema 2.2 tomando  $m \equiv 0$ . Com efeito, com condição de Neumann homogênea, sabemos que

$$\mu_1(-\Delta + m(x)) = \mu_1(-\Delta) = 0$$

e  $\varphi_m = 1$ , donde  $\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} = \int_{\Omega} a < 0$ . ■

**Teorema 2.4 (1996, [23])** *Suponhamos que  $\int_{\Omega} a < 0$ , então para cada  $R > 0$ , existe um número  $\mu = \mu(R) < 0$ , tal que para toda função  $\alpha$  Hölder contínua ( $0 < \alpha < 1$ ), com  $|m|_{0,\alpha} \leq R$ , se:*

- (i)  $\int_{\Omega} m \leq 0$ ,
- (ii)  $\mu(R) < \mu_1(-\Delta + m(x)) < 0$ ,
- (iii)  $\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} < 0$ ,

o problema  $(P_m)$  tem uma solução.

**Prova.** Da mesma forma, que no Teorema 2.2, vamos argumentar por contradição. Suponhamos que a conclusão não é satisfeita, então para algum  $R_0$  e uma seqüência de funções  $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ , temos:

- (a)  $|m_j|_{0,\alpha} \leq R_0$ ,
- (b)  $\int_{\Omega} m_j \leq 0$ ,
- (c)  $-\frac{1}{j} < \mu_1^j < 0$ ,
- (d)  $\int_{\Omega} a\varphi_{m_j}^{p+1} < 0$

e o problema  $(P_m)$  não tem solução. Usando, estas afirmações sobre  $m_j$  e o Teorema 1.31 em [1], obtemos uma função contínua  $m$ , tal que:

- (a')  $m_j \rightarrow m$  uniformemente quando  $j \rightarrow \infty$ ,
- (b')  $\mu_1(-\Delta + m(x)) = 0$ ,
- (c')  $\int_{\Omega} m \leq 0$  e
- (d')  $\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} \leq 0$ ,

onde  $\varphi_m$  é a primeira autofunção normalizada de  $-\Delta + m(x)$ , com condições de fronteira de Neumann homogênea.

Por outro lado, da caracterização de  $\mu_1$ , obtemos

$$0 = \mu_1 = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + m(x)u^2]}{\int_{\Omega} u^2 dx} : u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \quad (2.19)$$

Então, escolhendo  $u = 1$  em (2.19), obtemos que

$$\int_{\Omega} m \geq 0. \quad (2.20)$$

Usando (2.20) e (c'), concluímos que

$$\int_{\Omega} m = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_m = 1.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} = \int_{\Omega} a < 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.2 o problema  $(P_m)$  tem uma solução, o que é uma contradição.

■

O Teorema 2.4, em particular, prova a primeira parte do Teorema 2.1, na classe de funções Hölder contínuas não negativas e a Conjectura 1 quando  $\int_{\Omega} a < 0$ .

Devemos também observar que, nesta seção, todos os resultados são válidos sem a hipótese adicional de que  $|\Omega^0| = 0$ . Na verdade, veremos que esta hipótese será necessária, para fazermos algumas considerações sob as hipóteses dos Teoremas 2.3 e 2.4. Este, é o objetivo principal da próxima seção.

## 2.2 Algumas considerações sob as condições dos Teoremas 2.3 e 2.4

Nesta seção, examinaremos questões que dizem respeito as condições dos Teoremas 2.3 e 2.4. Iremos conseguir estas informações como uma conseqüência de uma condição necessária “forte” para a existência de soluções do problema  $(P_m)$ . Isto será obtido através de argumentos variacionais e o método de subsoluções e supersoluções (cf. seção 0.3). Mais precisamente, vamos supor que  $u$  é uma solução para o problema  $(P_m)$ , então  $u$  satisfaz a identidade de Picone generalizada, e em particular satisfaz:

$$\int_{\Omega} a(x)\varphi_m^{p+1} dx = -p \int_{\Omega} \left(\frac{\varphi_m}{u}\right)^{p-1} u^2 \left| \nabla \left(\frac{\varphi_m}{u}\right) \right|^2 dx + \mu_1 \int_{\Omega} u^{1-p} \varphi_m^{p+1} dx,$$

onde para se obter isto, prossegue-se da mesma forma que na seção 1.3. Assim, se estabelecermos uma estimativa a priori, em  $L^\infty(\Omega)$ , sobre as soluções do problema  $(P_m)$  da forma:

$$\|u\| \leq C, \quad \text{com} \quad C = C(|m|_0),$$

teremos da igualdade acima a seguinte condição necessária para a existência de soluções de  $(P_m)$ :

$$\int_{\Omega} a\varphi_m^{p+1} \leq C \cdot \mu_1 \int_{\Omega} \varphi_m^{p+1}$$

De posse, desta condição é que analisaremos as condições dos Teoremas já citados acima.

Suponhamos que  $u$  é uma solução de  $(P_m)$  (e como anteriormente, supomos que  $\mu_1 < 0$ ). Para esta solução, associaremos o número  $\sigma(u)$ , o qual será definido como o primeiro autovalor do operador linearizado  $-\Delta + (m(x) - pa(x)u^{p-1}(x))$ , isto é:

$$\sigma(u) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} [|\nabla v|^2 + (m(x) - pa(x)u^{p-1})v^2]}{\int_{\Omega} v^2} : v \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

**Proposição 2.1 (1996, [23])** *Se o problema  $(P_m)$  tem uma solução positiva  $u$ , então existe uma outra solução  $\bar{u}$  com  $\sigma(\bar{u}) \geq 0$ .*

**Prova.** Antes de tudo, devemos observar que a solução  $u$  de  $(P_m)$  é positiva sobre  $\bar{\Omega}$ . Para isto, basta usar os mesmos argumentos que foram feitos no capítulo anterior e o Lema 0.1. Tomemos uma seqüência positiva  $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . Notemos que, como  $u$  é por hipótese uma solução para  $(P_m)$ , tem-se que  $u$  é uma supersolução para  $(P_{m+\varepsilon_n})$ . De fato, temos que

$$-\Delta u + (m(x) + \varepsilon_n)u - au^p = \varepsilon_n u \geq 0,$$

daí, multiplica-se esta desigualdade por uma função teste positiva e integra-se por partes, obtendo assim que  $u$  é uma supersolução.

Por outro lado, tomando  $\delta > 0$  pequeno, temos:

$$-\Delta(\delta\varphi_m) + (m(x) + \varepsilon_n)\delta\varphi_m - a(\delta\varphi_m)^p = (\mu_1 + \varepsilon_n)\delta\varphi_m - a(\delta\varphi_m)^p \leq 0,$$

pois,  $\varphi_m > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ ,  $a$  é limitada em  $\bar{\Omega}$  e  $p > 1$ , donde conclui-se que para  $\delta$  próximo da origem, a função  $\delta\varphi_m > (\delta\varphi_m)^p$  e como  $\mu_1 < 0$ , obtemos que  $(\mu_1 + \varepsilon_n)\delta\varphi_m \leq a(\delta\varphi_m)^p$ . Assim,  $\delta\varphi_m$  é uma subsolução de  $(P_{m+\varepsilon_n})$ .

Observemos que,  $\delta$  pode ser escolhido independente de  $n$ , de modo que  $\delta\varphi_m \leq u$ . Com efeito, usando o Lema de Hopf refinado (cf. Lema 0.1), provamos que  $\varphi_m > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$  e também já sabemos, que  $u > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . Logo,  $u/\varphi_m > 0$  sobre  $\bar{\Omega}$  e podemos escolher  $\delta$  pequeno o suficiente, de modo que,  $\delta\varphi_m \leq u$  em  $\bar{\Omega}$ .

Assim, usando o Teorema 0.9, encontramos uma seqüência  $(v_n) \subset H^1(\Omega)$ , tal que:

$$\begin{cases} -\Delta v_n + (m(x) + \varepsilon_n)v_n = a(x)v_n^p & \text{em } \Omega \\ \delta\varphi_m \leq v_n \leq u & \text{em } \Omega \\ \partial_{\nu} v_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

e

$$\int_{\Omega} [|\nabla\psi|^2 + (m(x) + \varepsilon_n)\psi^2 - pa(x)v_n^{p-1}\psi^2] \geq 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (2.22)$$

Usando a equação (2.21) e resultados de regularidade, encontramos limitações para  $(v_n)$  na norma de  $H^1(\Omega)$ , donde podemos aplicar o Teorema 0.6 e o Teorema 0.8 com  $\alpha = p$  e também para  $\alpha = p - 1$ , para obtermos que  $v_n \rightarrow \bar{u}$  em  $H^1(\Omega)$ ,  $v_n \rightarrow \bar{u}$  em  $L^p(\Omega)$  e  $v_n \rightarrow \bar{u}$  em  $L^{p-1}(\Omega)$ , para algum  $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ , com  $\delta\varphi_m \leq \bar{u} \leq u$  em  $\Omega$ .



Assim, estamos sob as hipóteses do Teorema 0.4 e, portanto, do Teorema 0.3. Então, multiplicando (2.21) por  $\psi \in H^1(\Omega)$ , integrando por partes e tomando limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\int_{\Omega} [\nabla \bar{u} \nabla \psi + m(x) \bar{u} \psi] = \int_{\Omega} a \bar{u} \psi, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega),$$

ou seja,  $\bar{u}$  é uma solução fraca para o problema  $(P_m)$ . Além disso, tomando limite em (2.22) quando  $n \rightarrow \infty$ , tem-se que:

$$\int_{\Omega} [|\nabla \psi|^2 + (m(x) - pa(x) \bar{u}^{p-1}) \psi^2] \geq 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega),$$

o que implica  $\sigma(\bar{u}) \geq 0$ . ■

**Proposição 2.2 (1996, [23])** *Se  $u$  é uma solução para  $(P_m)$  com  $\sigma(u) \geq 0$ , então  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ , onde  $C = C(|m|_0)$ .*

**Prova.** Por hipótese, sabemos que:

$$\int_{\Omega} [\nabla u \nabla \psi + mu\psi - au^p \psi] = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad (2.23)$$

$$\int_{\Omega} [|\nabla \psi|^2 + (m(x) - pau^{p-1}) \psi^2] \geq \sigma(u) \int_{\Omega} \psi^2, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (2.24)$$

Fazendo  $\psi = u$  em (2.23) e (2.24) e subtraindo, obtemos:

$$(p-1) \int_{\Omega} au^{p+1} \leq -\sigma(u) \int_{\Omega} u^2 < 0. \quad (2.25)$$

Usando (2.23) com  $\psi = u$  e (2.25), vemos que

$$\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + m(x)u^2] = \int_{\Omega} au^{p+1} \leq 0. \quad (2.26)$$

Notemos, que por (2.26), para vermos que  $u$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ , basta verificarmos que  $u$  é limitada em  $L^2(\Omega)$ . Assim, afirmamos que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} < C, \quad C(|m|_0).$$

De fato, se isto não acontecesse encontraríamos uma seqüência de funções contínuas limitadas  $(m_n)_{n=1}^{\infty}$  e uma seqüência  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ , tais que:

$$\int_{\Omega} [\nabla u_n \nabla \psi + m_n(x)u_n \psi - au_n^p \psi] = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Tomando  $\psi = u_n$  em (2.27), segue que

$$\int_{\Omega} [|\nabla u_n|^2 + m_n(x)u_n^2 - au_n^{p+1}] = 0.$$

Agora, definamos a seqüência  $(v_n)_{n=1}^\infty$  por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Observemos que  $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$  e por (2.26):

$$\int_{\Omega} [|\nabla v_n|^2 + m_n(x)v_n^2] \leq 0,$$

donde segue que:  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ , com  $C = C(|m_n|_0)$ . Logo,  $v_n$  é limitada em  $H^1(\Omega)$ , isto é,  $\|v_n\| \leq C(|m_n|_0)$ . Assim, usando o Teorema 0.6 (passando a subsequência se necessário), obtemos que  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $H^1(\Omega)$  e além disso, como  $p < 2^*$  e  $2 < 2^*$ , sabemos pelo Teorema 0.8 que  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^p(\Omega)$  e  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^2(\Omega)$  e, portanto,  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Dividindo (2.27) por  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ , segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla v_n \nabla \psi + m_n(x)v_n \psi] &= \int_{\Omega} a \frac{u_n^p}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \psi \\ &= \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \int_{\Omega} a v_n^p \psi, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Como  $v_n \rightharpoonup v_0$  em  $H^1(\Omega)$ , temos que o lado esquerdo de (2.28) deve ser limitado, mas  $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, portanto, devemos ter que  $\int_{\Omega} a v_n^p \psi = 0$  q.t.p em  $\Omega$ , para todo  $\psi \in H^1(\Omega)$ .

Da convergência  $v_n \rightarrow v_0$  em  $L^p(\Omega)$ , segue pelos Teoremas 0.4 e 0.3 que

$$\int_{\Omega} a v_0^p \psi = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Logo,  $a v_0 = 0$  q.t.p em  $\Omega$ . Como  $|\Omega^0| = 0$ , devemos ter que  $v_0 = 0$  q.t.p em  $\Omega$ , o que contradiz o fato de  $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . Portanto,  $u$  é limitada em  $L^2(\Omega)$ . ■

Agora, assim como foi demonstrado no Capítulo 1, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.3** *Se  $u$  é uma solução para o problema  $(P_m)$ , então:*

$$\int_{\Omega} a(x) \varphi_m^{p+1} dx = -p \int_{\Omega} \left(\frac{\varphi_m}{u}\right)^{p-1} u^2 \left|\nabla \left(\frac{\varphi_m}{u}\right)\right|^2 dx + \mu_1 \int_{\Omega} u^{1-p} \varphi_m^{p+1} dx$$

**Prova.** Segue do mesmo raciocínio utilizado na prova do Teorema 1.2, dada na seção 1.3. ■

**Teorema 2.5 (1996, [23])** *Suponhamos que o problema  $(P_m)$  tem uma solução  $u$ , então existe uma constante positiva  $C = C(|m|_0)$ , tal que*

$$\int_{\Omega} a \varphi_m^{p+1} \leq C \cdot \mu_1 \int_{\Omega} \varphi_m^{p+1} \tag{2.29}$$

**Prova.** Pela Proposição 2.1, o problema  $(P_m)$  tem uma solução  $\bar{u}$  com  $\sigma(\bar{u}) \geq 0$ . Usando a Proposição 2.2 e argumentos de regularização, encontramos uma constante  $C_1 = C_1(|m|_0)$ , tal que

$$|\bar{u}|_0 = \sup_{x \in \Omega} \bar{u}(x) \leq C_1. \quad (2.30)$$

Agora, usando a Proposição 2.3, temos que:

$$\int_{\Omega} a(x) \varphi_m^{p+1} dx \leq \mu_1 \int_{\Omega} \bar{u}^{1-p} \varphi_m^{p+1} dx. \quad (2.31)$$

Por (2.30) e do fato de  $1 - p < 0$ , segue-se que

$$\int_{\Omega} \bar{u}^{1-p} \varphi_m^{p+1} dx \geq C_1^{1-p} \int_{\Omega} \varphi_m^{p+1} dx. \quad (2.32)$$

Logo, por (2.31) e (2.32), obtemos:

$$\int_{\Omega} a(x) \varphi_m^{p+1} dx \leq C \mu_1 \int_{\Omega} \varphi_m^{p+1} dx,$$

pois  $\mu_1 < 0$ . ■

Vejamos agora, que o Teorema 2.5 nos mostra, em particular, que a Conjectura 1 proposta na introdução deste capítulo, não é verdade em geral. De fato, consideremos o seguinte:

**Teorema 2.6 (1996, [23])** *Tomemos  $\Omega = B_1(0)$ . Existem uma função contínua  $a$  e uma seqüência de funções contínuas limitadas  $(m_k)$ , tal que:*

- (i)  $\mu_1(-\Delta + m_k(x)) < 0$  e  $\mu_1(-\Delta + m_k(x)) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ ,
- (ii)  $\int_{\Omega} a \varphi_k^{p+1} < 0$ , onde  $\varphi_k$  é a primeira autofunção de  $-\Delta + m_k(x)$  e
- (iii) O problema  $(P_m)$  não tem solução.

**Prova.** Começemos escolhendo as funções  $a \in C(\overline{B_1(0)})$  e  $\varphi \in C^2(\overline{B_1(0)})$ , tais que:

- (a)  $\alpha = \int_{\Omega} a > 0$ ,
- (b)  $\beta = \int_{\Omega} a \varphi^{p+1} < 0$ ,
- (c)  $\varphi > 0$  em  $B_1(0)$  e  $\partial_{\nu} \varphi = 0$  sobre  $\partial B_1(0) = S_1$ .

Para isto, é suficiente considerarmos o vínculo:

$$V = \left\{ \varphi \in H^1(\overline{B_1(0)}); \varphi > 0 \text{ e } - \int_{\Omega} a \varphi^{p+1} = 1 \right\}$$

e o funcional  $I$  definido em  $H^1(\overline{B_1(0)})$  por:

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

e resolvermos o problema de minimização:

$$\inf_{u \in V} I(u) = \gamma.$$

De posse destas informações, consideremos para  $\mu < 0$  a função  $m_\mu$ , dada por:

$$m_\mu = \mu + \frac{\Delta\varphi}{\varphi}.$$

Logo, da igualdade acima temos que  $\varphi$  satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + m_\mu\varphi = \mu\varphi, & \varphi > 0 & \text{em } B_1(0) \\ \partial_\nu\varphi = 0 & & \text{sobre } S_1. \end{cases}$$

Em outras palavras, como  $\varphi > 0$ , vemos que  $\varphi$  é a primeira autofunção e  $\mu$  o primeiro autovalor de  $-\Delta + m_\mu(x)$ . Agora, definamos a seqüência de funções  $\varphi_k$  por:

$$\varphi_k = (\varphi^{p+1} + t_k)^{1/(p+1)},$$

com:

$$0 < -\frac{\beta}{\alpha} - \delta < t_k < -\frac{\beta}{\alpha} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Através de cálculos e do fato de  $\varphi \in C^2(\overline{B_1(0)})$ ,  $t_k$  ser limitada (pois converge) temos:

$$\left| \frac{\Delta\varphi_k}{\varphi_k} \right| \leq C_1, \quad (2.33)$$

para alguma constante  $C_1$ . Além disso,

$$\omega_k = \int_{\Omega} a\varphi_k^{p+1} = \int_{\Omega} a\varphi^{p+1} + t_k \int_{\Omega} a = \beta + \alpha t_k < 0 \quad (2.34)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} a\varphi_k^{p+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\beta + \alpha t_k) = 0. \quad (2.35)$$

Argumentaremos por contradição. Suponhamos que o problema  $(P_m)$  tem solução para  $a$  como escolhido acima e limitemos a função  $m$  da seguinte maneira,  $|m|_0 < C_1 + 1$ . Assim, existe a constante  $C$  dada no Teorema 2.5. Definamos:

$$m_k = \mu_k + \frac{\Delta\varphi_k}{\varphi_k}, \quad (2.36)$$

onde:

$$\mu_k = \frac{2\omega_k}{C \cdot D} \text{ e } D = \int_{\Omega} \varphi^{p+1}. \quad (2.37)$$

Ora, observemos que por definição  $\varphi_k > 0$  e então, de (2.36) obtemos que  $\varphi_k$  é a primeira autofunção e  $\mu_k$  o primeiro autovalor de  $-\Delta + m_k(x)$ . Assim, denotaremos

$\mu_k$  por  $\mu_k^1$ . Notemos também que  $|\mu_k^1| < 1$ , pois por (2.35),  $\omega_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo, de (2.33) e (2.36), vemos que

$$|m_k|_0 \leq C_1 + 1, \quad (2.38)$$

ou seja,  $m_k$  é limitada pela mesma constante que  $m$ . Supondo que a Conjectura 1 é verdadeira, vemos que o problema  $(P_{m_k})$  tem solução. Agora, como  $m_k$  é limitada pela mesma constante que  $m$ , podemos aplicar o Teorema 2.5 para este problema com a mesma constante  $C$ , isto é, temos que  $\omega_k$  satisfaz:

$$\omega_k = \int_{\Omega} a\varphi_k^{p+1} \leq C\mu_k^1 \int_{\Omega} \varphi_k^{p+1}. \quad (2.39)$$

Agora, de (2.34) e (2.37), vemos que  $m_k$  satisfaz (i) e (ii) do Teorema, mas:

$$\begin{aligned} C\mu_k^1 \int_{\Omega} \varphi_k^{p+1} &= C\mu_k^1 \int_{\Omega} (\varphi^{p+1} + t_k) \\ &\stackrel{\mu_k^1 < 0}{\leq} C\mu_k^1 \int_{\Omega} \varphi^{p+1} \\ &= \mu_k^1 \cdot CD \\ &\stackrel{(2.37)}{=} 2\omega_k \\ &\stackrel{(2.34)}{<} \omega_k = \int_{\Omega} a\varphi_k^{p+1}. \end{aligned}$$

O que contradiz (2.39). ■

Usando as mesmas técnicas feitas na prova do Teorema 2.6, mostraremos que a conclusão do Teorema 2.3 não é válida se  $\int_{\Omega} a = 0$ . Para isto, tomemos  $\Omega = B_1(0)$  e  $\varphi$  como no Teorema 2.6, satisfazendo as condições (b) e (c). Então, definamos:

$$\varphi_n(x) = (\varphi^{p+1} + n^2)^{1/(p+1)} > 0 \text{ e}$$

$$m_n(x) = -\frac{1}{n} + \frac{\Delta\varphi_n}{\varphi_n}.$$

Novamente é fácil ver que:  $|m_n|_0 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e então,  $|m_n(x)|_0 < C_1$  para todo  $n$ . Além disso,

$$\mu_1(-\Delta + m_n(x)) = -\frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\int_{\Omega} a\varphi_n^{p+1} = \int_{\Omega} a(\varphi^{p+1} + n^2) = \int_{\Omega} a\varphi^{p+1} < 0,$$

pois  $\int_{\Omega} a = 0$ . Então, supondo que o Teorema 2.3 é válido, vemos que o problema  $(P_{m_n})$  tem solução.

Por outro lado, se supormos que o problema  $(P_m)$  tem uma solução, temos pelo Teorema 2.5 que existe  $C$  e podemos tomar  $|m|_0 < C_1$ , de forma que o Teorema 2.5 vale para o problema  $(P_{m_n})$  com a mesma constante  $C$ . Mas:

$$\begin{aligned} C \cdot \mu_1(-\Delta + m_n(x)) \int_{\Omega} \varphi_n^{p+1} &= -\frac{C}{n} \int_{\Omega} \varphi_n^{p+1} - \frac{C}{n} \int_{\Omega} n^2 \\ &< -C|\Omega|n \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, para  $n$  grande estas duas últimas equações nos dizem que  $\int_{\Omega} a\varphi_n^{p+1}$ , não satisfaz (2.29), isto é, o problema  $(P_{m_n})$  não tem solução para  $n$  grande.

Finalmente, no caso do Teorema 2.4, se supormos  $\int_{\Omega} a > 0$  procedemos da mesma forma que na prova do Teorema 2.6 fazendo poucas mudanças.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Afrouzi, G.A., *Existence of positive solutions on indefinite superlinear elliptic equations*, Applied Mathematics and Computation **157**, 841-848, 2004.
- [3] Alama, S., Tarantello, G., *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. **1**, 439-475, 1993.
- [4] Bandle, C., Pozio, M.A., Tesei, A., *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear problems*, Math. Z. **199**, 257-278, 1988.
- [5] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.
- [6] Berestycki, H., Capuzzo-Dolcetta, I., Nirenberg, L., *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems*, NoDEA **2**, 533-572, 1995.
- [7] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.
- [8] Cac, Nguyen Phuong; Gatica, Juan A.; Li, Yi, *Positive solutions to semilinear problems with coefficient that changes sign*, Nonlinear Anal. **37**, 501-510, 1999.
- [9] Costa, David G., *Topicos em Analise Nao Linear e Aplicaoes as Equaoes Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matematica, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [10] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Escola Latino-Americana de Eq. Diferenciais, Universidade de Sao Paulo, 1981.
- [11] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [12] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.
- [13] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, 2001.

- [14] Grossinho, Maria do Rosário; Tersian, Stepan Agop; *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [15] Hess, P., Kato, H., *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. in PDE **5**, 999-1030, 1980.
- [16] Kavian, Otared, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [17] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989.
- [18] Ouyang, T., *On the positive solutions of semilinear equations  $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$  on compact manifolds*, Part II, Indiana Univ. Math. J. **40**, 1083-1141, 1991.
- [19] Rabinowitz, P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Vol. 65, Amer. Math. Soc. (1986).
- [20] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Nr. **65**, Amer. Math. Soc., 1986.
- [21] Struwe, M., *Variational Methods and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian systems*, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [22] Tehrani, H. T., *Remarks on some semilinear elliptic eigenvalue problems*. PHD Thesis, Courant Institute, New York, 1994.
- [23] Tehrani, H. T., *On indefinite superlinear elliptic equations*, Calc. Var. **2**, 139-153, 1996.
- [24] Wang, Xu-Jia, *Neumann Problems of Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Journal of Differential Equations **93**, 283-310, 1991.
- [25] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1996.