UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

4^a Lista de Exercícios: Funções de uma Variável Complexa

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 *Determine o raio de convergência das seguintes séries:*

$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n) z^n$ $\quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} ln(2n^2+3)(z+i)^n$ $\quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^{n+2i}}{n!} z^n$ $\quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$ $\quad (f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(3n)}{1+5n} z^n$

$(g)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-3\cos(n)}{5n^2+3} z^{2n-1}$ $\quad (h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \ln(n^2+4)(z+i)^n$ $\quad (i)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

$(j)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$ $\quad (k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^{n^2}$ $\quad (l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}$

Questão 2 *Sejam $\{z_n\}$ uma sequência que converge para zero e $\{w_n\}$ uma sequência limitada, mas não necessariamente convergente. Prove que a sequência $\{z_n w_n\}$ converge para zero.*

Questão 3 *As sequências $\{z_n\}$ abaixo são convergentes? Limitadas? Se convergem, encontre o seus limites.*

$(a)\ z_n = (-1)^n - 5i.$ $\quad (b)\ z_n = \frac{(2+3i)^n}{n!}$ $\quad (c)\ z_n = e^{\frac{n\pi i}{2}}$

$(d)\ z_n = i^n \cos(n\pi)$ $\quad (e)\ z_n = \frac{e^{\frac{n\pi i}{4}}}{n\pi}$ $\quad (f)\ z_n = (2i)^n(1+i)^n$

Questão 4 *Obtenha os seguintes desenvolvimentos em série.*

$(a)\ \sin(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$ $\quad (b)\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$(c)\ \sinh(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $\quad (d)\ \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Questão 5 *Obtenha a série de potencias da função $f(z) = \frac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$ (considere a determinação dada para $\sqrt[3]{1} = 1$)*

Questão 6 *Mostre, usando o produto de séries, que se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então $\frac{1}{1-z} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + ... + a_n) z^n$.*