



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

<http://www.mat.ufpb.br>

1ª Lista de Exercícios: Funções de uma Variável Complexa

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 *Expresse os seguintes números complexos na forma $a + bi$.*

$$(a) \quad 5 - 2i(4 + \frac{3i}{5}) \quad (b) \quad (3 - 5i)^2 - 2i \quad (c) \quad \left(\frac{1}{1+i}\right)^3$$
$$(d) \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \quad (e) \quad \frac{1-i}{1+i} \quad (f) \quad \frac{4-3i}{i-1} + \frac{1-i}{2-1}$$

Questão 2 *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Mostre que: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$. Obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.*

Questão 3 *Ache as 4 raízes da equação $z^4 + 4 = 0$. Use-as para fatorar $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.*

Questão 4 *Resolva as seguintes equações:*

$$(a) \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \quad (b) \quad z^5 - 32 = 0 \quad (c) \quad z^3 - 8 = 0$$
$$(d) \quad z^7 + (1 + i) = 0 \quad (e) \quad 5z^2 - i = 0 \quad (f) \quad z^2 + (1 - 2i)z + (1 + 5i) = 0$$

Questão 5 *Seja $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 1$ tal que $w^n = 1$. Prove que $1 + w + \dots + w^{n-1} = 0$.*

Questão 6 *Sejam $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio de grau $n > 0$, com coeficientes reais e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$. Prove que $P(\bar{z}_0) = 0$.*

Questão 7 *Calcule as raízes seguintes. Represente-as geometricamente.*

$$(a) \quad \sqrt{4} \quad (b) \quad \sqrt[5]{i} \quad (c) \quad \sqrt{1 + i\sqrt{2}} \quad (d) \quad \sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}} \quad (e) \quad \sqrt[7]{-1 - i}.$$

Questão 8 *Determine o conjugado dos seguintes números complexos:*

$$(a) \quad \frac{(2 - 4i)^3}{(-5 + 3i)^8} \quad (b) \quad (8 - 2i)^6(4 - 2i)^{10} \quad (c) \quad \frac{3 + 4i}{1 + 3i} + \frac{6}{3 - i}.$$

Questão 9 *Em cada caso, determine o conjunto solução e faça um esboço.*

$$(a) \quad |z| = |z - 2i| \quad (b) \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z + 1) \quad (c) \quad |z - 1 + i| + |z| \leq 4$$

Questão 10 *Suponha que $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ são dois vértices de um quadrado. Encontre os outros dois vértices, em todos os casos possíveis.*