UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

4^a Lista de Exercícios: Funções de uma Variável Complexa

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 *As sequências $\{z_n\}$ abaixo são convergentes? limitadas?. Se convergem, encontre o seus limites.*

(a) $z_n = (-1)^n - 5i$. (b) $z_n = \frac{(2+3i)^n}{n!}$ (c) $z_n = e^{\frac{n\pi i}{2}}$

(d) $z_n = i^n cos(n\pi)$ (e) $z_n = \frac{e^{\frac{n\pi i}{4}}}{n\pi}$ (f) $z_n = (2i)^n(1+i)^n$

Questão 2 *Determine o raio de convergência das séries abaixo:*

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{\log n} z^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+3+\ldots+n}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin n)\, z^n$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+a}{n} z^n$

Questão 3 *Dadas as funções hiperbólicas:*

$$senh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

calcule seu desenvolvimento em série de potências centrado na origem $0 \in \mathbb{C}$.

Questão 4 *Determine as séries de Taylor para as funções $sen(z)$ e $cos(z)$ em $\frac{\pi}{4}$.*

Questão 5 *Examine a convergência das séries abaixo nos pontos da fronteira do seu disco de convergência.*

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$, $p \in \mathbb{N}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n-1}}{log(n)}$

Questão 6 *Mostre, usando o produto de séries, que se $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então $\frac{1}{1-z} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) z^n$.*

Questão 7 *Exercícios 9 a 16 (pág. 94, 95 e 96) do livro* **Cálculo em uma variável complexa**, *Marcio G. Soares*