UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br

3^a Lista de Exercícios: Funções de uma Variável Complexa

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 *Mostre que as funções $u = u(x, y)$, abaixo dadas, são harmônicas numa certa região, determine uma função $v = v(x, y)$ conjugada harmônica de u e a função $f = u + iv$.*

(a) $u = x-4xy$ *(b)* $u = (senx)(chy)$ *(c)* $u = x^3-3xy^2$ *(d)* $u = x-5xy$.

Questão 2 *Seja $f = u+iv$ uma função holomorfa em um domínio Ω. Mostre que u é conjugada harmônica de $-v$.*

Questão 3 *Prove que $f(z) = z|z|$ não é holomorfa em $\mathbb{C}$.*

Questão 4 *A parte imaginária de uma função holomorfa é $2x(1 - y)$. Calcule a parte real.*

Questão 5 *Existe alguma função holomorfa cuja parte imaginária seja $x^2 - 2y$?*

Questão 6 *Encontre $f = f(z)$ tal que $f'(z) = 4z - 3$ e $f(i) = 0$.*

Questão 7 *Use as partes real e imaginária da relação $1+z+z^2+...+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ para obter uma fórmula para:*

(a) $1 + cos(x) + cos(2x) + cos(3x) + ... + cos(nx)$;

(b) $sen(x) + sen(2x) + sen(3x) + ... + sen(nx)$;

(c) $sen(\theta) + sen(\theta + \phi) + ... + sen(\theta + n\phi)$.

Questão 8 *Usando a identidade $(cos(\theta)+isen(\theta))^3 = cos(3\theta)+isen(3\theta)$, expresse $cos(3\theta)$ e $sen(3\theta)$ como funções de $cos(\theta)$ e $sen(\theta)$.*

Questão 9 *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função tal que: $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(z+w) = f(z)f(w)$. Prove que, se f é contínua em $z = 0$, então f é contínua*

Questão 10 *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ holomorfa num domínio Ω que não contém o ponto $z = 0$. Use as equações de Cauchy-Riemann para mostrar que u e v satisfazem a equação de Laplace em coordenadas polares: $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$.*

Questão 11 *Usando os valores principais de z^i, $(z = re^{i\theta})$, escreva z^i na forma $u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ e mostre que $u = u(r, \theta)$ e $v = v(r, \theta)$ são funções harmônicas.*