



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

<http://www.mat.ufpb.br>

2ª Lista de Exercícios: Funções de uma Variável Complexa

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 Determine a parte real e a parte imaginária das funções definidas por:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(z) = z^2 - 2z + 1 & (b) & f(z) = \frac{z-1}{z+1} & (c) & f(z) = \frac{|z-3i|}{z+1} \\ (d) & f(z) = e^z(z-2i) & (e) & f(z) = e^{iz} & (f) & f(z) = \text{Log}(z^2) \end{array}$$

Questão 2 Sejam f e g funções complexas tais que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de z_0 . Mostre que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$

Questão 3 Calcule a derivada das funções definidas por:

$$(a) f(z) = 3iz^3 - z^2 + 5i, \quad (b) f(z) = (iz-1)^3(z+1)^4, \quad (c) f(z) = \frac{(1-i)z^2+2}{3z^4-z^2}.$$

Questão 4 Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$, onde $z = x + iy$, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não tem derivada nesse ponto.

Questão 5 Seja $f(z) = (e^y + e^{-y})\sin(x) + i(e^y + e^{-y})\cos(x)$, com $z = x + iy$. Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar que f é uma função holomorfa e calcule sua derivada.

Questão 6 Usando o ramo principal de z^λ calcule $(3i)^{1-i}$, $2^{\sqrt{2}}$ e 1^i .

Questão 7 Verifique se as seguintes funções satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$(a) f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), \quad (b) f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$$

Questão 8 Mostre que as funções abaixo não são holomorfas em ponto algum.

$$(a) f(z) = x^2y^2 + 2ix^2y^2, \quad (b) f(z) = e^{xy} - e^{-xy} + ixy, \quad (c) f(z) = e^{i\bar{z}}.$$

Questão 9 Defina o seno e o co-seno complexos, o seno e o co-seno hiperbólicos complexos respectivamente por: $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, e $\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. Mostre que essas funções são inteiras e calcule suas derivadas. Escreva essas funções na forma $u + iv$. Mostre que elas são periódicas e determine seus períodos. Ache os zeros dessas funções.