



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

1ª Prova: MA23 - Geometria II (Geometria Analítica)

João Pessoa, 20 de outubro de 2017

Prof.: Pedro A. Hinojosa

Nome: _____ Matrícula: _____

1 (3 pts.) Dada a equação $-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0$, identifique a cônica que ela representa, encontre seus principais elementos e faça um esboço do seu gráfico.

2 (3 pts.) Em cada caso determine a equação da cônica pedida.

- (a) Elipse com um vértice no ponto $(3, 1)$, focos na reta $y = -6$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- (b) Hipérbole com centro na origem, eixos sobre os eixos coordenados e que passa pelos pontos $(3, 1)$ e $(9, 5)$;
- (c) Parábola com vértice no ponto $(6, -3)$ e diretriz $\mathcal{L} : 3x - 5y + 1 = 0$.

3 (2 pts.) Sejam $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ vértices de um paralelogramo $\mathcal{P} = ABCD$. Se as diagonais de $\mathcal{P}$ se cortam no ponto $M = (3, 2)$, determine os vértices C e D .

4 (2 pts.) Considere as retas $r_1 : 4x + 3y = 0$ e $r_2 : 3x + 4y = 0$. Determine as equações das circunferências de raio $\frac{7}{5}$ que são tangentes às retas r_1 e r_2 .

Boa Prova.

$$\textcircled{1} \quad -7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (-7-\lambda)(-1-\lambda) - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+7)(\lambda+1) - 16 = 0$$

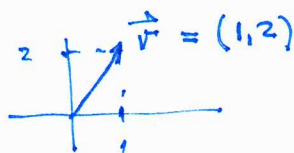
$$\Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+9)(\lambda-1) = 0$$

$$\left\{ \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -9 \right\}$$

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$



$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2)$$

$$\lambda_2 = -9, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2, 1)$$

$$B' = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$$

B a base $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$

$$[I]_{B'}^B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$[I]_{B'}^B \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} (\bar{x} - 2\bar{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2\bar{x} + \bar{y}) \end{cases}$$

$$\bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\bar{x} - 2\bar{y}) + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (2\bar{x} + \bar{y}) = 0$$

$$\bar{x}^2 + 3\bar{x} - 9\bar{y} - \bar{y} = 0$$

$$(\bar{x} + 3/2)^2 - \frac{9}{4} - 9(\bar{y} + 1/18)^2 - \frac{9}{18^2} = 0$$

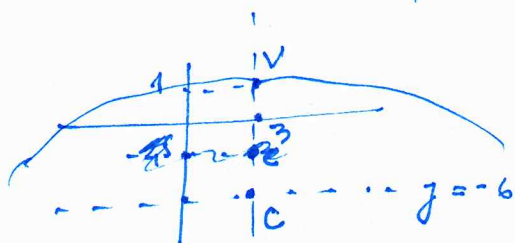
$$(\bar{x} + 3/2)^2 - 9(\bar{y} + 1/18)^2 = \frac{41}{18}$$

etc

② Eq. da Cônica

3

- (a) Elipse : $\begin{cases} \text{um vértice em } V=(3,1) \\ \text{Focos na reta } y=-6 \\ \text{excentricidade } e = \sqrt{2}/2 \end{cases}$



Eq.:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

centro $(x_0, y_0) = (3, -6)$

$b = 7$

$$e = c/a = \sqrt{2}/2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2} a \quad \{c^2 = \frac{1}{2} a^2\}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 49 + \frac{1}{2} a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a^2 = 49 \Rightarrow a^2 = 2 \cdot 49$$

$a = 7\sqrt{2}$

$$\left(\frac{(x-3)^2}{98} + \frac{(y+6)^2}{49} = 1 \right)$$

- (b) Hiperbole : $\begin{cases} \text{centro na origem} \\ \text{Eixos sobre os eixos coord.} \\ \text{passa nos pto's } (3,1) \text{ e } (9,5) \end{cases}$

(i) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou (ii) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

i) $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 9b^2 - a^2 = a^2 b^2$

$\frac{81}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \Rightarrow 81b^2 - 25a^2 = a^2 b^2$

$$9b^2 - a^2 = 81b^2 - 25a^2 \Rightarrow 24a^2 = 72b^2$$

$$\Rightarrow \{a^2 = 3b^2\}$$

$a = \sqrt{3} b$

$$9b^2 - 3b^2 = 3b^2 \cdot b^2 \Rightarrow 6b^2 = 3b^4 \Rightarrow 2b^2 = b^4 \Rightarrow \underline{\underline{b^2 = 2}}$$

$$\therefore \underline{\underline{b = \sqrt{2}}} \quad a = \sqrt{3} \cdot b = \sqrt{6} \quad \underline{\underline{a = \sqrt{6}}}$$

$$\left(\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \right)$$

(ii)

$$\frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \quad \frac{25}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$$

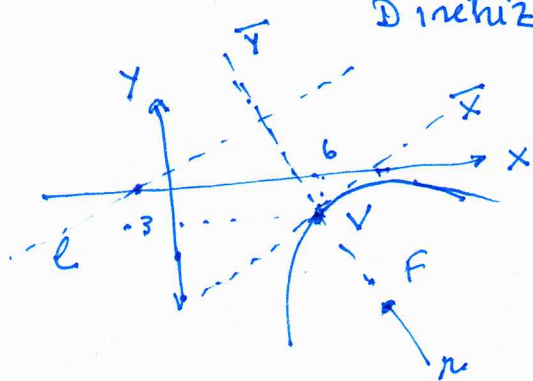
$$b^2 - 9a^2 = a^2b^2, \quad 25b^2 - 81a^2 = a^2b^2$$

$$24b^2 = 72a^2 \Rightarrow \underline{\underline{b^2 = 3a^2}}$$

$$3a^2 - 9a^2 = a^2 \cdot 3a^2 \Rightarrow \underline{\underline{-6a^2 = 3a^4}}$$

Não há solução neste caso

(c) Parábola: Vértice no pto $(6, -3) = V$
Diretriz: $l: 3x - 5y + 1 = 0$



$$d(V, l) = \sqrt{34} = \frac{|3 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{9 + 25}}$$

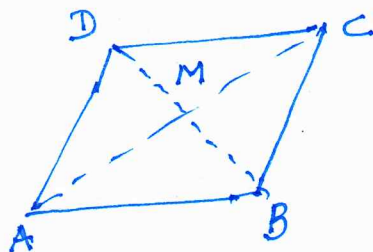
$$\begin{cases} \bar{x}: 3x - 5y = 33 \\ \bar{y}: 5x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$\bar{x}^2 = -4\sqrt{34} \bar{y}$$

etc

- ③ $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ vértices de um paralelogramo ABCD
as diagonais se cortam em $M = (3, 2)$. Determinar os vértices
C e D.

Solução:



$$C = (x, y) \quad M = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 6 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \therefore \underline{D = (5, 3)}$$

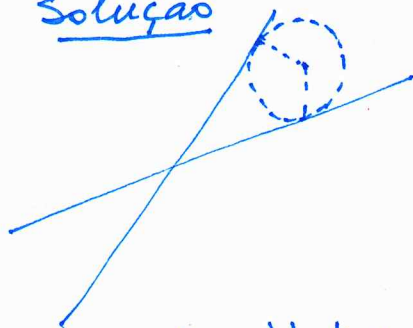
$$D = (x, y) \quad M = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y+1}{2} \right) = (3, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4 = 6 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \therefore \underline{D = (2, 3)}$$

④ $\begin{cases} r_1: 4x + 3y = 0 \\ r_2: 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Determinar as eq's das circunf. de raio $\frac{7}{3}$ que são
tangentes às retas r_1 e r_2 .

Solução



$C = (x_0, y_0)$ centro

$$d(C, r_1) = d(C, r_2)$$

$$\Rightarrow \frac{|4x_0 + 3y_0|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x_0 + 4y_0|}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow \text{i) } 4x_0 + 3y_0 = 3x_0 + 4y_0 \Rightarrow \underline{y_0 = x_0}$$

$$\text{ii) } 4x_0 + 3y_0 = -3x_0 - 4y_0 \Rightarrow \underline{y_0 = -x_0}$$

$$\text{i) } \begin{cases} d(C, r_1) = \frac{7}{3} \\ d(C, r_2) = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 + 3y_0 = \frac{7}{3}\sqrt{25} \\ y_0 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_0 = \frac{7 \cdot 5}{3} \\ x_0 = \frac{5}{3} = y_0 \end{cases}$$

ou

$$i) \quad x_0 = \frac{5}{3} = y_0$$

$$\left((x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{49}{9} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x_0 - 4y_0 = 7 \cdot \frac{5}{3} \\ x_0 = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow -7x_0 = \frac{7 \cdot 5}{3} \Rightarrow \underline{x_0 = -\frac{5}{3}}$$

$$\left((x + \frac{5}{3})^2 + (y + \frac{5}{3})^2 = \frac{49}{9} \right)$$

~~etc~~

ii) etc