Cap. 8: Funções Exponencial e Logarítmica

① Exponencial

Dado $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$ já conhecemos a função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}^+$, $f(r)=a^r$.

f verifica

(1) $f(r+s)=f(r)\cdot f(s)$ $\forall r,s\in\mathbb{Q}$
$(a^{r+s}=a^r\cdot a^s)$

(2) $f(1)=a$ $(a^1=a)$

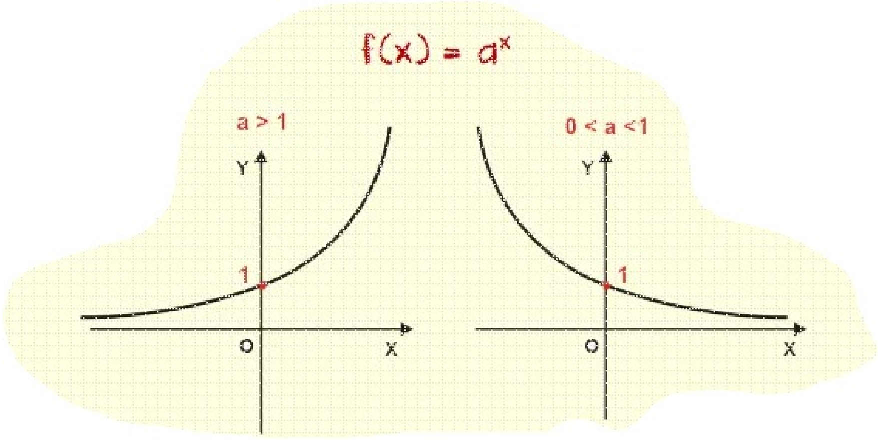
Além disso, existe uma única função $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}^+$ que verifica (1) e (2) acima.

Em outras palavras, dado $a>0$, $a\neq 1$ $(a\in\mathbb{R})$ existe uma única maneira de definir a^r, para $r\in\mathbb{Q}$ de modo que $a^{r+s}=a^r.a^s$ $\forall r,s\in\mathbb{Q}$ e $a^1=a$. Sabemos também que esta função não é sobrejetiva, ou seja, dado $x\in\mathbb{R}^+$ nem sempre existe $r\in\mathbb{Q}$ t.q. $a^r=x$. Entretanto $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}^+$ é denso em $\mathbb{R}^+$, i.e. dados $x_1, x_2\in\mathbb{R}^+$, $x_1<x_2$, existe $r\in\mathbb{Q}$ t.q. $x_1<a^r<x_2$ (Lema 8.2 pág 178)

Temos também que:

i) f é crescente se $a>1$

ii) f é decrescente se $0<a<1$



Para definir a^x com $x\in\mathbb{R}$ fazemos o que segue-se:

$a=10$ $r\in\mathbb{Q}$

10^r 100000

0,001

$10^r\neq 9$ $\forall r\in\mathbb{Q}$

Se $x \in \mathbb{Q}$, já temos definido a^x.

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe uma sequência $\{r_n\}$ em $\mathbb{Q}$ ($r_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$) t.q. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Definimos $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$

Definida desta forma a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ ($a>0, a \neq 1$) verifica:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$$

(1) f é ilimitada superiormente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{se } a>1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \text{se } 0<a<1$$

(2) f é contínua

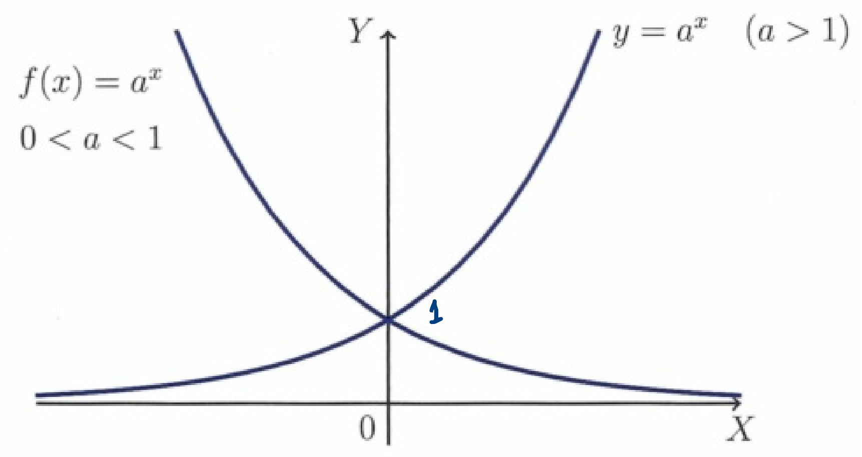
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}\right)$$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ t.q. $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(3) f é sobrejetiva.

$\forall y \in \mathbb{R}^+$, existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $a^x = y$.

(4) f é crescente se $a>1$ e decrescente se $0<a<1$.



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

Note que, em qualquer caso,

$$a^x > 0 \quad \text{e} \quad a^0 = 1$$

$$\boxed{f(x+y) = f(x)\cdot f(y)} \qquad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f(x/2)\cdot f(x/2) = \left(f(x/2)\right)^2 \geq 0$$

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \qquad f(x_0) = 0$

$$f(x) = f((x-x_0)+x_0) = f(x-x_0)\cdot f(x_0) = 0 \quad \forall x$$

$$f \equiv 0 \quad ↯ \quad f(0) = 1$$

Teorema (Caract. da função exponencial)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente (ou decrescente)

As afirmações abaixo são equivalentes

(1) $f(nx) = (f(x))^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a = f(1))$

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dem:

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$f(rx) = f(x)^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$r = m/n \; (m \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N}) \Rightarrow rn = m$

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

$$\Rightarrow f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r \qquad f(1)^r$$

Logo, se $a := f(1)$, então $\underline{f(r) = f(r \cdot 1) = a^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}}$

Agora, suponha que f é crescente, então

$1 = f(0) < f(1) = a \quad \therefore \quad \underline{a > 1}$.

Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x_0) \neq a^{x_0}$, digamos que $f(x_0) < a^{x_0}$ ($f(x_0) > a^{x_0}$ é análogo)

então existe $r \in \mathbb{Q}$ t.q. $f(x_0) < a^r = f(r) < a^{x_0}$

como f é crescente e $f(x_0) < f(r)$, temos $x_0 < r$.

Por outro lado, também temos $a^r < a^{x_0}$, logo $r < x_0$. Contradição!

$$\therefore \nexists\, x_0 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x_0) \neq a^{x_0}$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$

(2) $\Rightarrow$ (3) Ok!

(3) $\Rightarrow$ (1) Ok

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) \cdot f(x)$$
$$= f((n-2)x) \cdot f(x)^2 \ldots$$

Teorema (1ª Caract. de Funções tipo Exp)

Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona 1-1 tal que $\forall x, h \in \mathbb{R}$ $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$ depende só de h

Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$,

$$g(x) = b \cdot a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dem: Seja $b = g(0)$ e defina $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$.

Então f é monótona 1-1. Além disso,

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = \varphi(h) \text{ não depende de } x$$

$$f(0) = \frac{g(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1 \quad \text{e}$$

$$f(h) = \frac{f(0+h)}{f(0)} = \frac{g(h)}{b} = \varphi(h)$$

$$\therefore f(h) = \varphi(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Daí

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \varphi(h) = f(h)$$

$$\therefore f(x+h) = f(x)\cdot f(h) \quad \forall x, h$$

Pelo Teor anterior $f(x) = a^x$ $\quad (a = f(1))$

Daí $g(x) = b \cdot f(x) = b a^x$

Teorema (2ª caract. de Funções tipo Exp)

Sejam $b, t \in \mathbb{R}$ dados e seja $f(b,t) > 0$ tal que

(1) $f(b,t)$ depende linearmente de t e é monótona 1-1 c/r a t

(2) $f(b, s+t) = f(f(b,s), t)$

Então, pondo $a = f(1,1)$ temos $f(b,t) = b a^t$

Dem:

$$\varphi(t) := f(1,t) \text{ é monótona 1-1}$$

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1,s), t)$$
$$= f(f(1,s)\cdot 1, t)$$
$$= f(1,s)\cdot f(1,t) = \varphi(s)\cdot\varphi(t)$$

Pelo teor de caract da função exp temos

$$\varphi(t) = a^t, \quad \text{com} \quad a = \varphi(1) = f(1,1)$$

$$\therefore f(b,t) = b\, f(1,t) = b\,\varphi(t) = b a^t$$

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ é 1-1 e sobrejetiva, ou seja, é uma bijeção, logo f possui uma inversa $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\left(f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x \right)$$

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

que associa a cada $x \in \mathbb{R}^+$ o número real $\log_a x$ chamado logaritmo de x na base a

e, por definição da inversa,

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

Ou seja $\log_a x$ é o número ao qual deve-se elevar a para obter x

i.e. $$a^{\log_a x} = x$$

Observe que

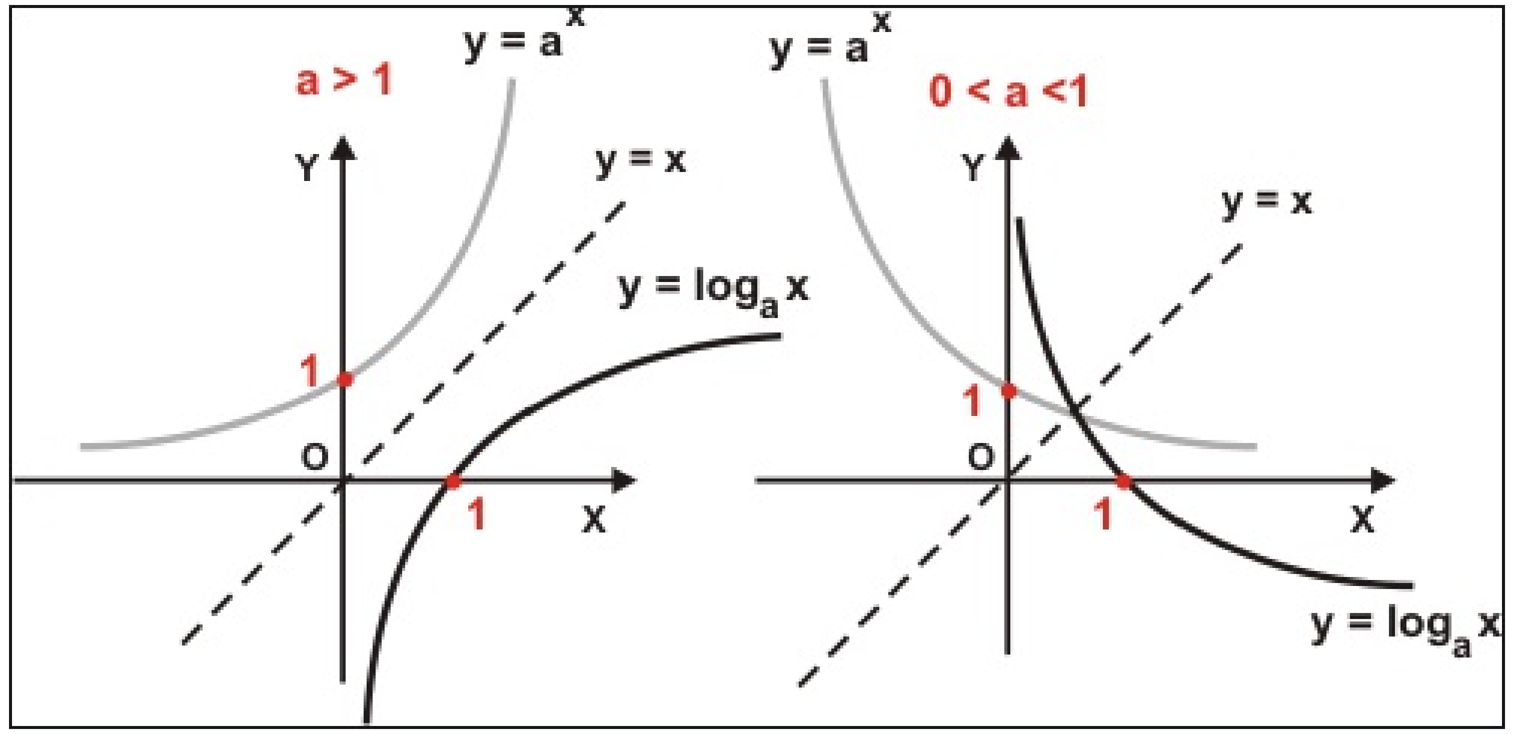
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

De fato, $u = \log_a x$, $v = \log_a y \Rightarrow a^u = x$, $a^v = y$

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

$$\therefore \log_a(xy) = u+v = \log_a x + \log_a y$$

$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente se $a>1$ e decrescente se $0<a<1$



Como $a^0 = 1$, temos $\log_a 1 = 0$

Teorema (Caract. das funções logarítmicas)

Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ t.q. $f(x) = \log_a x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$

Dem: Admitamos que f é crescente.

Como $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, temos $\underbrace{f(1) = 0}$

Inicialmente suponhamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$ (Depois provaremos isto)

f crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, logo $a > 1$

Af: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(a^x) = x$.

De fato,

$$f(a^n) = f(a \cdot a \cdot \overset{n}{\ldots} \cdot a) = f(a) + f(a) + \overset{n}{\ldots} f(a)$$
$$= 1 + 1 + \overset{n}{\ldots} + 1 = n$$

$\therefore$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $f(a^n) = n$

$$0 = f(1) = f(a^{-n} \cdot a^n) = f(a^n) + f(a^{-n})$$
$$= n + f(a^{-n})$$

$\therefore$ $f(a^{-n}) = -n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Ou seja, $f(a^m) = m$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Se $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, então $nr = m$

e

$$m = f(a^m) = f(a^{nr}) = f((a^r)^n) = n f(a^r)$$

$\therefore$ $f(a^r) = \dfrac{m}{n} = r$

Daí, $f(a^r) = r$ $\forall\, r \in \mathbb{Q}$

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $r < x < s$ temos:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$
$$\Rightarrow r = f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) = s$$
$$\Rightarrow r < f(a^x) < s$$

$\therefore$ $\underbrace{f(a^x) = x}$

Isto prova a Afirmação //

Assim, $f(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(f é a inversa da função exponencial a^x)

$\therefore \quad f(y) = \log_a y \quad \forall y \in \mathbb{R}^+$

Agora vamos mostrar que existe $a > 0$ t.q. $f(a) = 1$.

Temos $f(1) = 0$.

$1 < 2 \Rightarrow 0 = f(1) < f(2) := b \quad (\therefore b > 0)$

Defina $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$.

É claro que:

i) $g(2) = 1$

ii) g é crescente (f é crescente)

iii) $g(xy) = \dfrac{f(xy)}{b} = \dfrac{f(x) + f(y)}{b}$

$= \dfrac{f(x)}{b} + \dfrac{f(y)}{b} = g(x) + g(y)$

Logo, pela parte anterior, $g(x) = \log_2 x, \forall x > 0$

$\therefore \forall x > 0$ temos

$$x = 2^{g(x)} = 2^{f(x)/b} = \left(2^{1/b}\right)^{f(x)}$$

$$= a^{f(x)}, \text{ com } a = 2^{1/b} > 0$$

Daí $f(x) = \log_a x$

($f(a) = 1$)