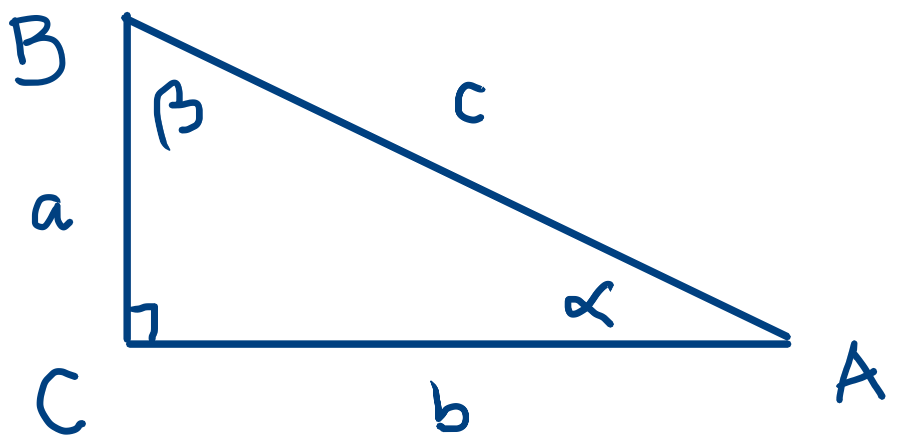
Cap 9: Funções Trigonométricas

Sabemos, do Ensino Fundamental que num Δ retângulo temos:



Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$(*)\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{a}{c}, & \text{sen}\,\beta = \dfrac{b}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c}, & \text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

As relações em (*) definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo α, $0 < \alpha < 90°$.

Além disso, estas definições não dependem do Δ retângulo em questão. De fato, se temos outro triângulo $\Delta A'B'C'$ retângulo em C' e tal que $\beta' = \measuredangle A'B'C = \beta = \measuredangle ABC$, então o ΔABC é semelhante ao $\Delta A'B'C'$, logo

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$$

Daí, $\text{sen}\,\beta' = \text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta' = \cos\beta$ //

Pelo teor. de Pitágoras temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$
$$= \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Ou seja,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

É claro também que

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \end{cases} \quad (\alpha+\beta = 90^\circ)$$

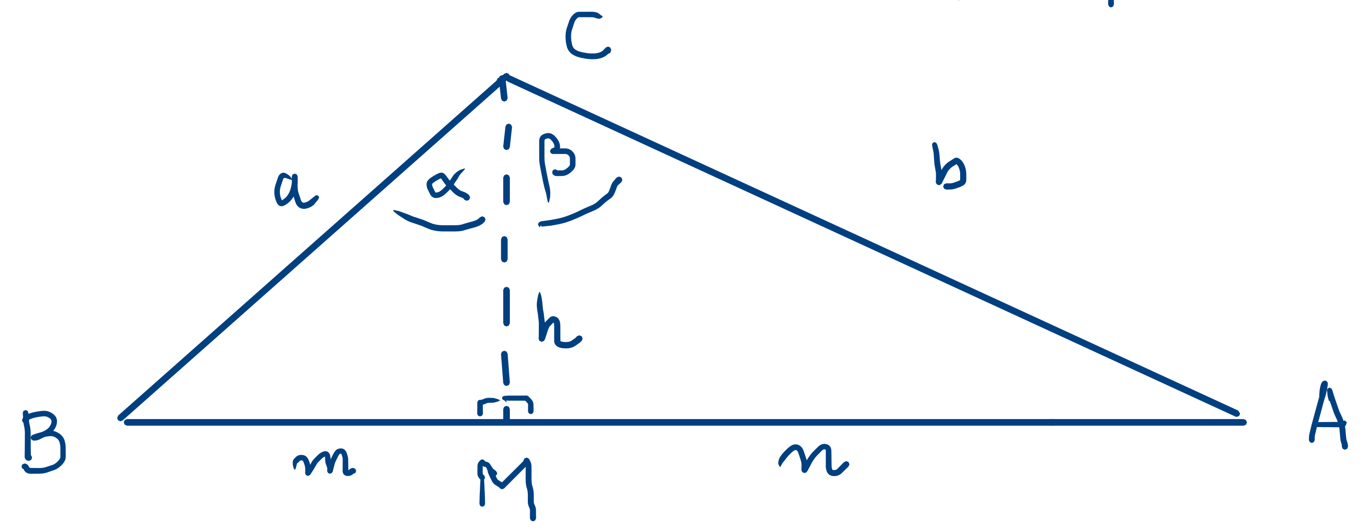
Além disso, como $c > a$ e $c > b$ temos, para um ângulo agudo qq, $0 < \theta < 90^\circ$,

$$\underbrace{0 < \operatorname{sen}\theta < 1 \quad e \quad 0 < \cos\theta < 1}$$

As Fórmulas de Adição (para ângulos agudos)

Vamos demonstrar as fórmulas clássicas para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ e $\cos(\alpha+\beta)$ no caso de ângulos agudos.

Consideremos um ΔABC qualquer



h = altura correspondente ao vértice C.

Temos $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{m}{a}$ $\therefore$ $\underbrace{m = a\operatorname{sen}\alpha}$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{n}{b}$ $\therefore$ $\underbrace{n = b\operatorname{sen}\beta}$

e $\cos\alpha = \dfrac{h}{a}$, $\cos\beta = \dfrac{h}{b}$

$\therefore$ $\underbrace{h = a\cos\alpha = b\cos\beta}$

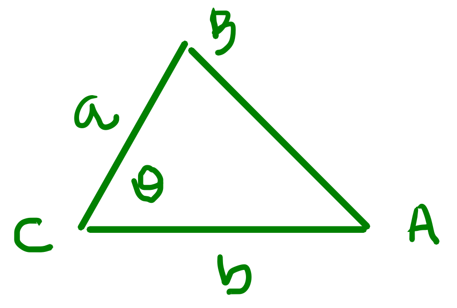
Agora, $\text{área}(\Delta ABC) = \text{área}(\Delta BMC) + \text{área}(\Delta CMA)$

$= \frac{1}{2}mh + \frac{1}{2}nh$

$\therefore$ $\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}a\operatorname{sen}\alpha \cdot b\cos\beta + \frac{1}{2}b\operatorname{sen}\beta \cdot a\cos\alpha$

$= \frac{1}{2}ab(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)$

Por outro lado, $\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$

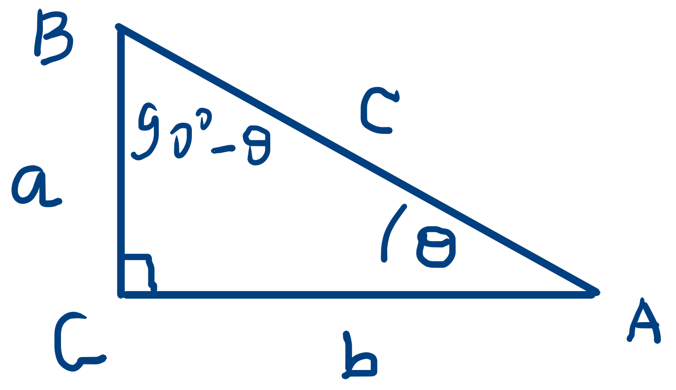


$\text{área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$.

Daí,

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Para o caso de $\cos(\alpha+\beta)$ observe que num Δ retângulo temos



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} = \cos(90°-\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}(90°-\theta)$$

Isto vale também para ângulos "não agudos"

$$\operatorname{sen}(90°-\theta) = \operatorname{sen}90°\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos 90°$$

$$\operatorname{sen}90° = 1 \quad \text{e} \quad \cos 90° = 0$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}(90°-\theta) = \cos\theta$$

Agora, fazendo $\gamma = 90°-\theta$, temos $\theta = 90°-\gamma$ e

$$\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}(90°-\theta) = \cos\theta = \cos(90°-\gamma)$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}\gamma = \cos(90°-\gamma).$$

Daí temos:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(90°-(\alpha+\beta)) \\
&= \operatorname{sen}((90°-\alpha)-\beta) \\
&= \operatorname{sen}(90°-\alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos(90°-\alpha) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Obs:

$$\operatorname{sen}90° = 1, \quad \cos 90° = 0$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

A Função de Euler

A identidade $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ sugere que $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ é um ponto na circunferência unitária

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Definimos a função

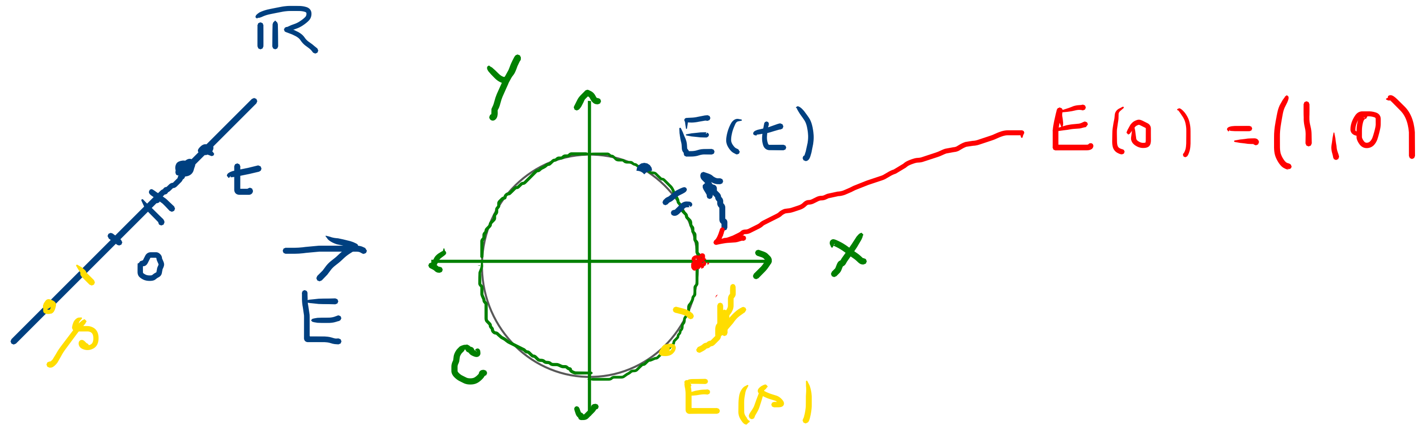
$$E : \mathbb{R} \longrightarrow C, \quad E(t) = (x,y)$$

onde (x,y) é obtido do seguinte modo:

1) $E(0) = (1,0)$
2) se $t > 0$, $E(t)$ é o pto de C obtido percorrendo, a partir de $(1,0) \in C$, no sentido anti-horário, um caminho de comprimento t
3) Se $t < 0$, $E(t)$ . . . , no sentido horário, um caminho de comprimento $|t|$

Usando números complexos podemos pensar

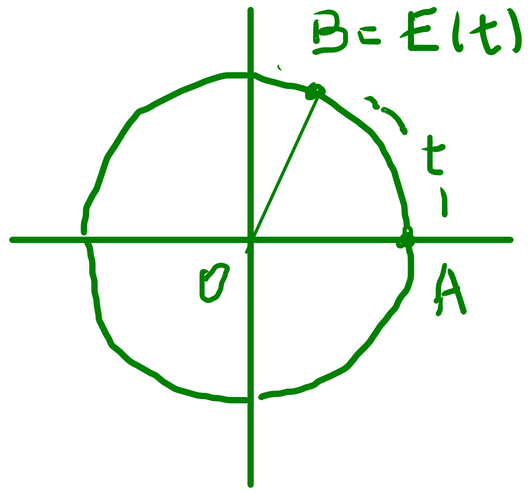
$$E(t) = e^{it}$$



Note que

1) $E(t + 2k\pi) = E(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$
2) $E(t') = E(t) \iff t' = t + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

   ($k > 0$ se $t' > t$, $k < 0$ se $t' < t$)



$O = (0,0) \quad A = (1,0), \quad B = E(t)$

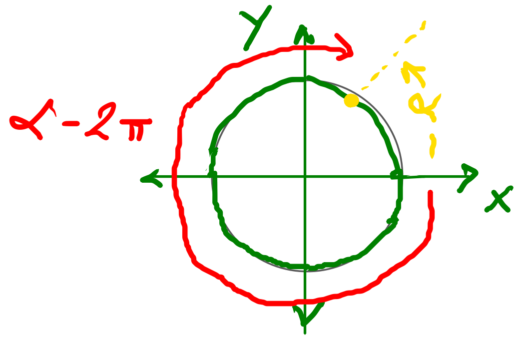
Dizemos que o $\measuredangle AOB$ mede t radianos

Note que podemos ter ângulos negativos ($B = E(t)$ com $t < 0$)

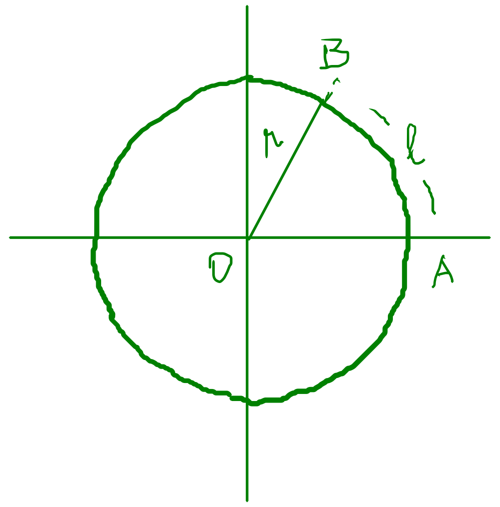
Obs

1) A medida em radianos do ângulo $\measuredangle AOB$ é determinada, a menos de um múltiplo inteiro de 2π, apenas por $E(t) = B$.

Ex: o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $(1-2\pi)$ radianos



2) O $\measuredangle AOB$ mede 1 radiano sse o arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunf C tem comprimento igual a 1.
Mais geralmente numa circunf. de raio r a medida, em radianos, de um $\measuredangle$ central é igual a l/r onde l é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo.



$m(\measuredangle AOB) = l/r$ radianos

3) A área do setor circular AOB é

$$a = \frac{1}{2}\, m(\measuredangle AOB) \cdot r^2$$

logo $$m(\measuredangle AOB) = \frac{2a}{r^2}$$

4) Ao invés da função E, poderíamos ter definido a função

$$G : \mathbb{R} \to C$$

pondo:

$$G(s) = E\left(\frac{2\pi}{360} s\right)$$

i) $G(0) = (1,0)$

ii) Para $s > 0$, $G(s)$ é o ponto da circunf C, obtido a partir de $(1,0)$ percorrendo no sentido anti-horário ao longo de C um caminho de comprimento $\frac{2\pi}{360} s$ $\left(E\left(\frac{2\pi}{360} s\right)\right)$

iii) Para $s < 0$ - - - - -

Se $A = (1,0)$, $O = (0,0)$ e $B = G(s)$, dizemos que o $\measuredangle AOB$ mede s graus

(Notação: s°)

Obs: O ângulo $\measuredangle AOB$ mede 1° quando $B = G(1)$, ou seja quando o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento igual a $2\pi/360$.

i.é. O ângulo de 1° é aquele que subtende um arco igual a $1/360$ da circunf.

$$\left(1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \right)$$

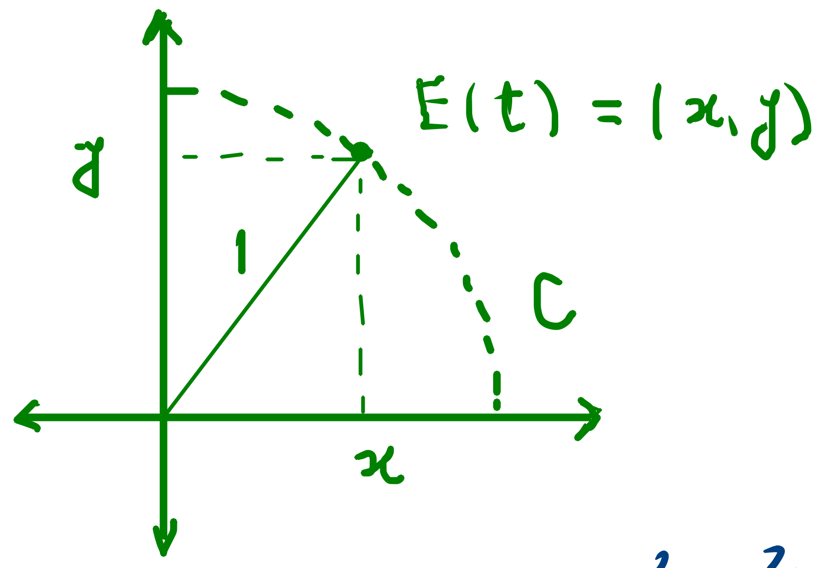
$180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \qquad$ etc

=

As Funções Seno e Cosseno

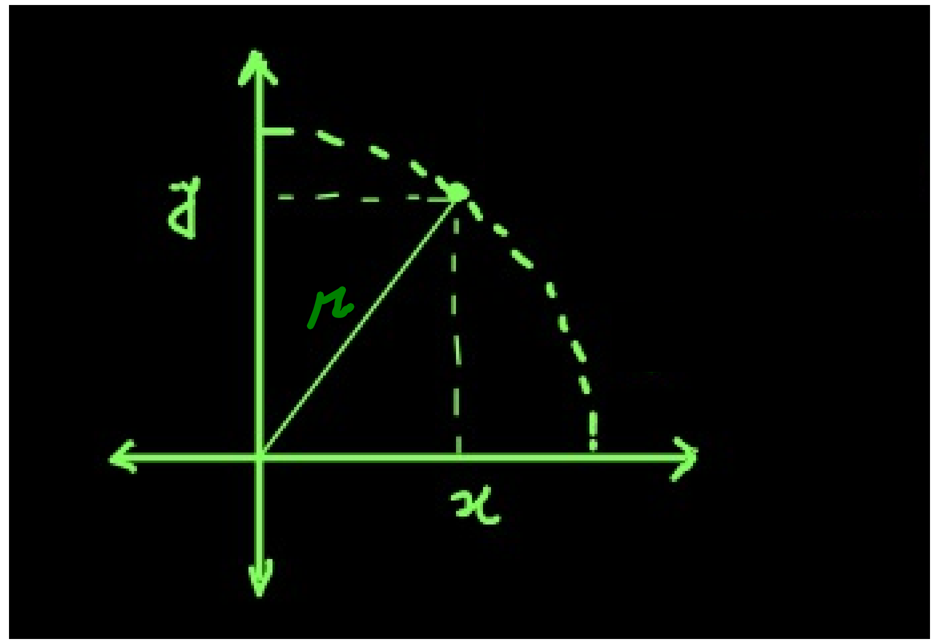
Seno e Cosseno são definidas pondo:

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1$



$x = r \cos t$

$y = r \operatorname{sen} t$

$x^2 + y^2 = r^2$

Segue-se, direto da def, que

$$\boxed{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1}$$

Como $E(t) = E(t + 2k\pi)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, temos

$\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t + 2k\pi)$ e

$\cos(t) = \cos(t + 2k\pi)$

Em particular seno e cosseno são funções 2π-periódicas.

Se $E(t) = (x, y)$, então $E(-t) = (x, -y)$.

Daí,

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \Rightarrow E(-t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$$

Logo,

$$\begin{cases} \cos(-t) = \cos t \\ \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ou seja, seno é uma função ímpar e cosseno uma função par.

Analogamente temos:

$$\cos(t+\pi) = -\cos t, \quad \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(t+\pi/2) = -\operatorname{sen} t, \quad \operatorname{sen}(t+\pi/2) = \cos t$$

$$\left(E(t) = (x, y) \Rightarrow E(t+\pi/2) = (-y, x) \right)$$

etc //

A partir das funções seno e cosseno definimos as outras funções trigonométricas

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Note que o domínio destas funções não é $\mathbb{R}$

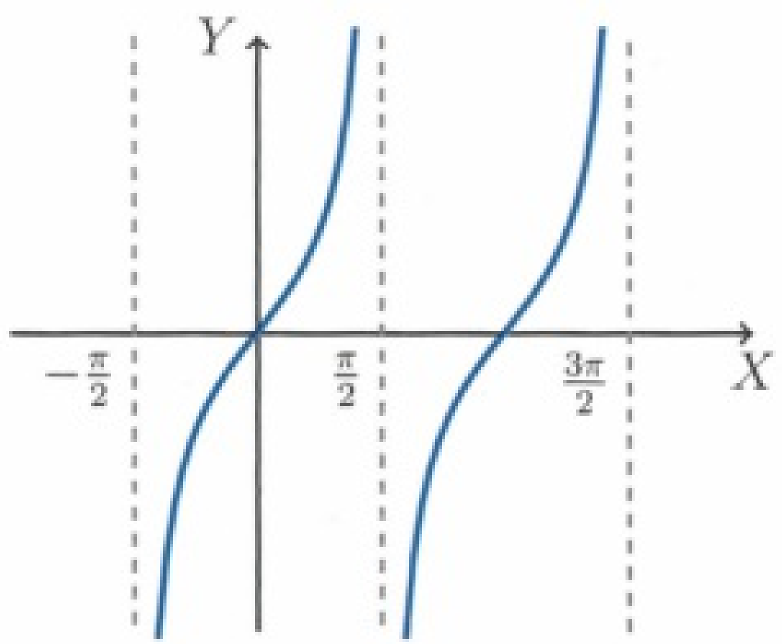


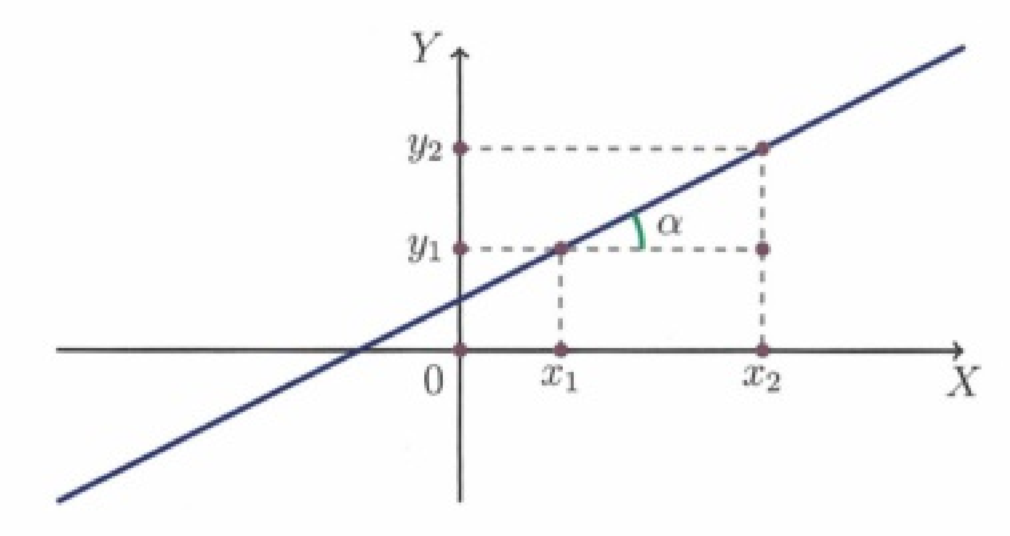
Gráfico de $y = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$

é bijetiva ($\therefore$ tem inversa)

sua inversa $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ é chamada de arco-tangente.

Ex: Para a reta $y = ax + b \quad (a \neq 0)$



temos

$$a = tg\,\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha$$

A lei dos Cossenos e a lei dos Senos