

Cap. 7: Funções Polinomiais

7.1 Funções Polinomiais vs Polinômios

7.2 Determinação de um Polinômio a partir dos seus Valores

7.3 Gráficos de Polinômios

Def: Uma função polinomial é uma função do tipo
 $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são dados.

Se $a_n \neq 0$ dizemos que p tem grau n.

Note que a soma e o produto de funções polinomiais ainda é uma função polinomial.

Seja p uma função polinomial. Para $x, \alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} p(x) - p(\alpha) &= a_n (x^n - \alpha^n) + \dots + a_1 (x - \alpha) \\ &= (x - \alpha) \cdot q(x) \end{aligned}$$

onde q é uma função polinomial

Se $\text{grau}(p) = n$, então $\text{grau}(q) = n-1$
Em particular se α é uma raiz de p, ou seja, $p(\alpha) = 0$, então

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

consequentemente, uma função polinomial de grau n tem no máximo n raízes

Obs:

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e
 $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, então

$$p(x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff a_j = b_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Def: Um polinômio é uma expressão formal do tipo
 $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$, x é um símbolo (indeterminada) e $x^i := x \cdot x \cdot \dots \cdot x$

e como no caso de funções polinomiais, dois polinômios são iguais se têm os mesmos coef.

Temos uma correspondência biunívoca que associa a cada polinômio $p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ a função polinomial $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$. Sendo assim, não é necessário fazer distinção entre polinômio e função polinomial.

7.2
Teor: Dados $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ t.q. $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$, e fixados valores arbitrários $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$, existe um único polinômio p de grau $\leq n$ t.q.
 $p(x_i) = f_i \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$

Dem:

unicidade: Se p e q são polinômios de grau menor ou igual a n t.q. $p(x_i) = q(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$, então $p - q$ é um polinômio de grau menor ou igual a n com $n+1$ raízes distintas, logo $p - q \equiv 0$

e portanto $p = q$ $\checkmark$

Existência:

Defina:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

Fórmula de Interpolação
de Lagrange

p é um polinômio de grau $\leq n$ e

$p(x_i) = f_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$. De fato,

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f_0 \left[\left(\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_2} \right) \dots \left(\frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n} \right) \right] + \\ &\quad f_1 \left[\left(\frac{x_0 - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} \right) \dots \left(\frac{x_0 - x_n}{x_1 - x_n} \right) \right] + \\ &\quad \dots + f_n \left[\left(\frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0} \right) \left(\frac{x_0 - x_1}{x_n - x_1} \right) + \dots \left(\frac{x_0 - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) \right] \\ &= f_0 \quad \because \quad p(x_0) = f_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p(x_1) &= \sum_{i=0}^n f_i \prod_{k \neq i} \left(\frac{x_1 - x_k}{x_i - x_k} \right) \\
 &= f_0 \left[\left(\frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2} \right) \cdots \left(\frac{x_1 - x_n}{x_0 - x_n} \right) \right] + \\
 &\quad f_1 \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} \right) \cdots \left(\frac{x_1 - x_n}{x_1 - x_n} \right) \right] + \\
 &\quad \dots + \\
 &\quad f_n \left[\left(\frac{x_1 - x_0}{x_n - x_0} \right) \left(\frac{x_1 - x_1}{x_n - x_1} \right) \cdots \left(\frac{x_1 - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) \right] \\
 &= f_1 \quad \therefore \quad p(x_1) = f_1
 \end{aligned}$$

etc //

No caso $n=1$ o polinômio dado pela fórmula de interpolação de Lagrange é

$$p(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Para $n=2$, temos:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= f_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) + f_1 \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) + \\
 &\quad + f_2 \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)
 \end{aligned}$$

Exemplo: (Exercício 7.5)

Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

Solução: Temos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$
 $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ e $y_3 = 3$

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 f_i \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$$

$$f_0 = 2, f_1 = 1, f_2 = 4, f_3 = 3$$

$$p(x) = 2 \left(\frac{x-2}{1-2} \right) \left(\frac{x-3}{1-3} \right) \left(\frac{x-4}{1-4} \right) + 1 \left(\frac{x-1}{2-1} \right) \left(\frac{x-3}{2-3} \right) \left(\frac{x-4}{2-4} \right) \\ + 4 \left(\frac{x-1}{3-1} \right) \left(\frac{x-2}{3-2} \right) \left(\frac{x-4}{3-4} \right) + \\ + 3 \left(\frac{x-1}{4-1} \right) \left(\frac{x-2}{4-2} \right) \left(\frac{x-3}{4-3} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} (x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{2} (x-1)(x-3)(x-4) \\ + 2 (x-1)(x-2)(x-4) + \frac{1}{2} (x-1)(x-2)(x-3) \\ \text{etc.}$$

$$p(1) = -\frac{1}{3} (1-2)(1-3)(1-4) = -\frac{1}{3} (-1)(-2)(-3) = 2$$

$$p(2) = \frac{1}{2} (2-1)(2-3)(2-4) = \frac{1}{2} (1)(-1)(-2) = 1 \\ \text{etc.}$$

Outra maneira de resolver o problema anterior é a seguinte, procuramos um polinômio

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{t.q. } p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 4 \text{ e } p(4) = 3$$

$$p(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + d = 2$$

$$p(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 1$$

$$p(3) = 4 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 4$$

$$p(4) = 3 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 3$$

O sistema (*) acima tem solução única já que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

A

$$\det A = 12$$

$$A = \begin{pmatrix} 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1^0 \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 3^0 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 4^0 \end{pmatrix}$$

A é uma matriz de Vandermonde, estas matrizes são da forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Se $a_i \neq a_j \forall i \neq j$, então

$$\det M = \prod_{i < j} (a_j - a_i) \neq 0$$

Ex: Calcular $\det M$

No sistema 1x1 anterior Temos

$$a = -4/3, \quad b = 10, \quad c = -65/3 \quad \text{e} \quad d = 15$$

Dai,

$$p(x) = -4/3 x^3 + 10 x^2 - 65/3 x + 15$$

Método de Newton para obter raízes de uma eq. $p(x) = 0$.

A idéia é obter uma sequência $x_1, x_2, \dots$ t.q. $p(x_1), p(x_2), \dots$ se aproximam de zero.

Se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

tem como limite uma raiz de p .
($p'(x)$ é a derivada de $p(x)$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

$$L = L - \frac{p(L)}{p'(L)}$$

$$\underline{p(L) = 0}$$

Ex Vamos calcular aprox. $\sqrt{3}$.

$$p(x) = x^2 - 3, \quad p'(x) = 2x$$

$$p(1) = -2 < 0, \quad p(2) = 1 > 0$$

Temos uma raiz no intervalo $(1, 2)$

$$\left(\sqrt{3} \approx 1,7320508076 \right)$$

Tomemos $\{x_1 = 1,5\}$

$$p(x_1) = -0,75, \quad p'(x_1) = 3$$

$$x_2 = 1,5 - \frac{-0,75}{3} = 1,5 + 0,25 = 1,75$$

$$\{x_2 = 1,75\}$$

$$p(x_2) = 0,0625 \quad p'(x_2) = 3,5$$

$$x_3 = 1,75 - \frac{0,0625}{3,5} = 1,75 - 0,017857$$

$$\{x_3 = 1,732142\}$$

$$p(x_3) = 0,0003159, \quad p'(x_3) = 3,464284$$

$$x_4 = 1,732142 - \frac{0,0003159}{3,464284} = 1,73205081$$

$$\{x_4 = 1,73205081\}$$

etc ↗

7.6. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau n é um número ímpar. Mostre que existem números reais x_1, x_2 tais que $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$n \text{ ímpar } a_n \neq 0 \text{ (} a_n > 0 \text{)}$$

$$a_n x^n > \textcircled{a_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \textcircled{a_0} \text{ para } x \text{ grande!}$$

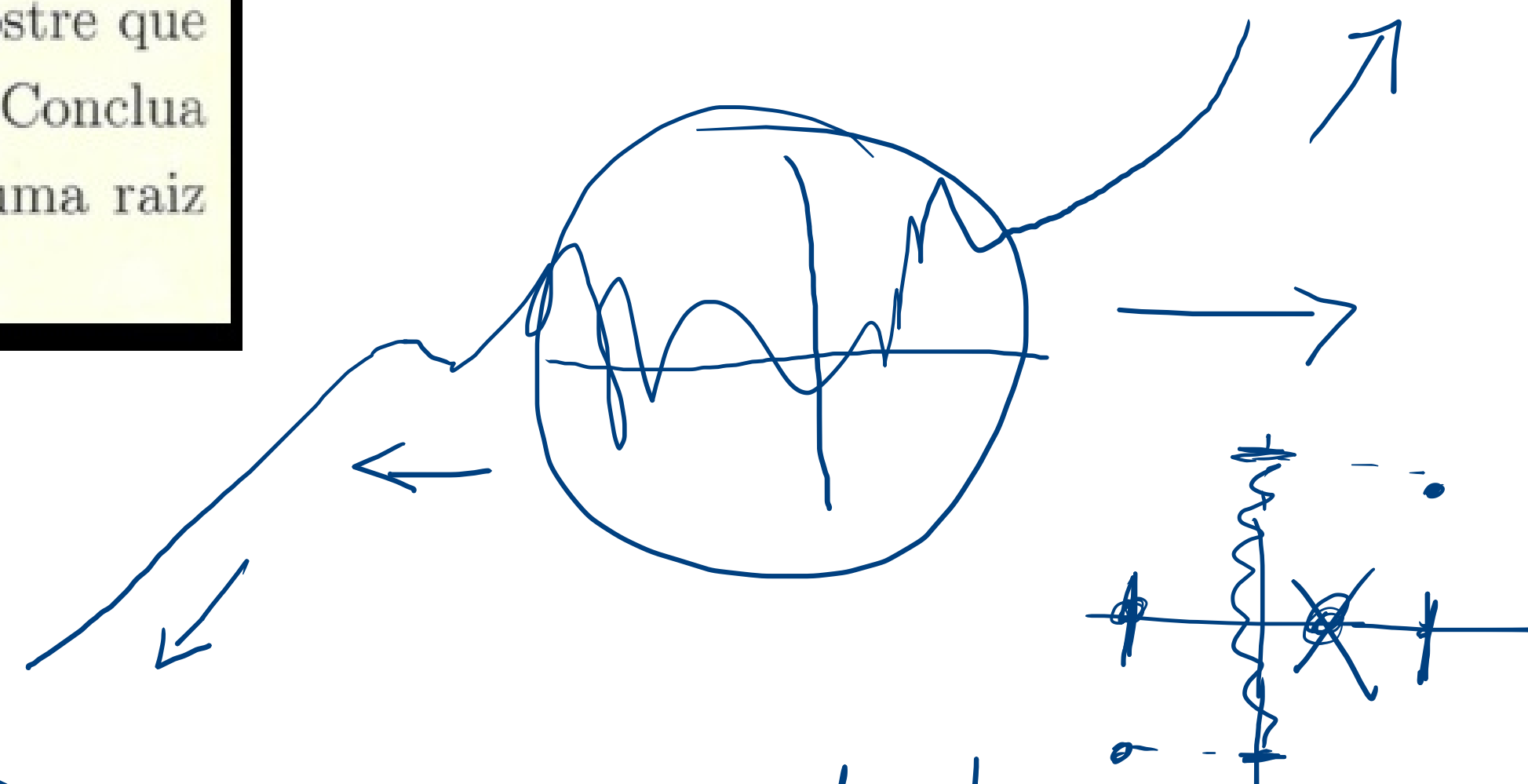
$$K \geq \max \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$$

$$|a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| \leq |a_{n-1}| x^{n-1} + \dots + |a_0|$$

$$< K x^{n-1} + \dots + K x + K = K (x^{n-1} + \dots + 1)$$

$$< K (x^n + x^n + \dots + x^n) = n K x^n$$

$$n K x^n > |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0|$$



$$\textcircled{x > 1}$$

$$\begin{aligned} x^2 &> x > 1 \\ x^3 &> x^2 > x > 1 \end{aligned}$$

7.4. Certo ou errado: α é raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, é raiz simples de $p'(x)$.

$$p(x) = (x - \alpha)^2 \cdot q(x) \quad \text{com } q(\alpha) \neq 0$$

$$p'(x) = 2(x - \alpha)q(x) + (x - \alpha)^2 \cdot q'(x)$$

$$p'(\alpha) \neq 0$$

$\Rightarrow$ ✓✓

$\Leftarrow$

$$p'(x) = 2x$$

$$p(x) = x^2 + 5$$

0 ~~raiz~~ simples de p'
mas 0 não é raiz
de p

7.3. Diz-se que o número real α é uma raiz de *multiplicidade* m do polinômio $p(x)$ quando se tem $p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. (Se $m = 1$ ou $m = 2$, α chama-se respectivamente uma *raiz simples* ou uma *raiz dupla*.) Prove que α é uma raiz simples de $p(x)$ se, e somente se, tem-se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$. Prove também que α é uma raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$. Generalize.

α é raiz de mult. m de $p(x)$
 sse $p(\alpha) = 0, p'(\alpha) = 0, \dots, p^{(m-1)}(\alpha) = 0$
 e $p^{(m)}(\alpha) \neq 0$

a) α raiz simples de $p(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$

($\Rightarrow$) $p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ com $q(\alpha) \neq 0$

$p(\alpha) = 0$ ✓

$$p'(x) = q(x) + (x - \alpha) \cdot q'(x)$$

$$p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x) = (x - \alpha)^2 \cdot q(x) \quad , \quad q(\alpha) \neq 0 \\ p'(x) = 2(x - \alpha) q(x) + (x - \alpha)^2 \cdot q'(x) \\ p'(\alpha) = 0 \\ p''(x) = 2q(x) + 2(x - \alpha)q'(x) + 2(x - \alpha)q'(x) + (x - \alpha)^2 q''(x) \end{array} \right.$$

($\Leftarrow$) $p(\alpha) = 0 \Rightarrow p(x) = (x - \alpha)^m \cdot q(x) \quad , \quad q(\alpha) \neq 0 \quad , \quad m \geq 1$

$$p'(x) = m(x - \alpha)^{m-1} \cdot q(x) + (x - \alpha)^m \cdot q'(x)$$

$$p'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \\ \Rightarrow \underline{m = 1} \quad \checkmark$$

$$p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$$