Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA11 - Cap. 3: Números Cardinais

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Conjuntos Finitos e Infinitos - Cardinalidade

Os números naturais podem ser usados para contar os elementos de um conjunto finito, para tanto, o princípio de indução é essencial.

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{p \in \mathbb{N} : p \leq n\}$, ou seja $I_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Definição 1.1 *Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que X possui n elementos se existe uma bijeção $f : I_n \to X$. A função f é dita uma contagem dos elementos do conjunto X e dizemos que X possui n elementos. Convencionamos que o conjunto vazio tem zero elementos.*

Dizemos que X é um conjunto finito se ele é vazio ou se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X possui n elementos, neste última caso dizemos que o número natural n é o número cardinal do conjunto X ou, também, que X tem cardinalidade n e escrevemos $\#(X) = n$.

Fazendo: $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $\cdots, x_n = f(n)$, podemos escrever $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.

Um exemplo óbvio de conjunto finito é o próprio I_n, e claro, a função identidade $f : I_n \to I_n$ é uma contagem dos elementos de I_n.

Definição 1.2 *Um conjunto X diz infinito se ele não é finito, ou seja, se ele não é vazio e qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \to X$.*

O próprio conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é infinito. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, nenhuma função $f : I_n \to \mathbb{N}$ é sobrejetiva. De fato, tomando, por exemplo, $M = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ temos $M > f(k)$, $\forall k \in I_n$. Logo $M \notin f(I_n)$ e f não é sobrejetiva.

A rigor a Definição 1 ainda não é "boa". Precisamos nos convencer de que todas as contagens fornecem o mesmo número de elementos. Ou seja, dado um conjunto, não vazio, X e bijeções $\psi : I_n \to X$, e $\varphi : I_m \to X$ será que $n = m$? Note que, nessas condições, $\varphi^{-1} \circ \psi : I_n \to I_m$ é uma bijeção. Assim, para que todas as contagens de um conjunto X forneçam o mesmo número de elementos, basta provar que, se existe uma bijeção $f : I_n \to I_m$, então $n = m$. Suponhamos que $m \leq n$, então $I_m \subset I_n$. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito é consequência do seguinte teorema.

Teorema 1.1 *Seja $A \neq \phi$ tal que $A \subset I_n$. Se existe uma bijeção $f : I_n \to A$. então $A = I_n$.*

Demonstração: Faremos indução em n. É claro que o resultado vale para $n = 1$. Suponhamos que ele seja válido para $n \in \mathbb{N}$ e consideremos uma bijeção $f : I_{n+1} \to A$. Ponhamos $a := f(n+1)$. $\widetilde{f} := f|_{I_n} : I_n \to A \setminus \{a\}$ é uma bijeção.

Se $A \setminus \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, temos $A \setminus \{a\} = I_n$, logo $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$.

Se $A \setminus \{a\} \not\subset I_n$, então devemos ter $n+1 \in A \setminus \{a\}$. Neste caso, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(p) = n+1$. Definimos uma nova bijeção

$$g : I_{n+1} \to A,\ g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq p \text{ e } x \neq n+1 \\ g(p) = a \\ g(n+1) = n+1 \end{cases}$$

Temos, $\widetilde{g} := g|_{I_n} : I_n \to A \setminus \{n+1\}$ é uma bijeção e, é claro que, $A \setminus \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A \setminus \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$, o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 1.2 *Se existe uma bijeção $f : I_n \to I_m$, então $n = m$.*

Demonstração: Suponha que $m \leq n$. Então $I_m \subset I_n$. Tomando $A = I_m$ no teorema acima, obtemos $I_m = I_n$, portanto $m = n$. $\square$

Desta maneira, os números naturais podem ser usados para contar os elementos de um conjunto finito dado. Ou seja, podem ser usados como números cardinais.

Corolário 1.3 *Sejam X, Y conjuntos finitos tais que $Y \subset X$ e $Y \neq X$. Então não existe uma função bijetiva $f : X \to Y$.*

Demonstração: Se X é finito, existe uma bijeção $\varphi : I_n \to X$. Seja $A = \varphi^{-1}(Y)$. Então $A \subset I_n,\ A \neq I_n$ e $\widetilde{\varphi} = \varphi|_A : A \to Y$ é uma bijeção.

$$\begin{tikzcd} I_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad g = (\widetilde{\varphi})^{-1} \circ f \circ \varphi : I_n \to A$$

g seria uma bijeção de I_n sobre sua parte própria A. Isto contradiz o Teorema 1.1. Logo não existe a bijeção f. $\square$

Teorema 1.4 *Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. Além disso,*

$$\boxed{\#(Y) \leq \#(X) \ \ e \ \ \#(Y) = \#(X) \quad \Longleftrightarrow \quad X = Y.}$$

Demonstração: Basta provar o teorema no caso em que $X = I_n$ o que pode ser feito por indução em n.

Ver: Curso de Análise (vol I), Elon .....

Corolário 1.5 *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y é finito, então X também é finito e* $\#(X) \leq \#(Y)$.

Demonstração: $f : X \to f(X)$ é uma bijeção e como Y é finito, $f(X) \subset Y$ também. Além disso, $\#(X) = \#(f(X)) \leq \#(Y)$. □

Corolário 1.6 *Seja $g : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Se X é finito, então Y é finito e* $\#(Y) \leq \#(X)$.

Demonstração: g possui uma inversa à direita, ou seja, existe $f : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_Y$. Então g é inversa à esquerda de f e logo $f : Y \to X$ é uma função injetiva. Como X é finito, segue-se do Corolário 1.5 que Y é finito e que $\#(Y) \leq \#(X)$. □

Lembre: se $f : A \to B$ é uma função, então
1. f possui inversa à esquerda $\Leftrightarrow$ f é injetiva;
2. f possui inversa à direita $\Leftrightarrow$ f é sobrejetiva.

Dos resultados provados acima, para conjuntos finitos, se deduz que:

(1) Se $f : X \to Y$ é uma função injetiva e X é infinito, então Y também é;

(2) Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva e Y é infinito, então X também é infinito;

(3) Se X admite uma bijeção sobre uma de suas partes próprias, então X é infinito.

Definição 1.3 *Seja $X \subset \mathbb{N}$. Dizemos que X é um subconjunto limitado se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $p \geq n$, qualquer que seja $n \in X$.*

Teorema 1.7 *Seja $X \subset \mathbb{N}$, não vazio. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) X é finito;

(2) X é limitado;

(3) X possui um maior elemento.

Demonstração:
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Se $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. tome, por exemplo, $p = x_1 + x_2 + ... + x_n$. É claro que $p \geq x$, para todo $x \in X$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)
Se X é limitado, então o conjunto $A = \{p \in \mathbb{N} : \forall n \in X, \, p \geq n\}$ é não vazio e pelo princípio da boa ordem, existe $p_0 \in A$ que é o menor elemento de A. Agora prove que $p_0 \in X$.

(3) $\Longrightarrow$ (1)
Se $p_0 \in X$ é o maior elemento de X, então $X \subset I_{p_0}$. □

Definição 1.4 *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é dito ilimitado quando não é limitado, ou seja, dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, existe algum $n \in X$ tal que $n > p$.*

Os subconjuntos ilimitados de $\mathbb{N}$ são precisamente os subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.8 *Sejam* x, Y *conjuntos finitos, disjuntos tais que* $\#(X) = m \quad e \quad \#(Y) = n$. *Então* $X \cup Y$ *é finito e* $\#(X \cup Y) = m + n$.

Demonstração: Se $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to Y$ são bijeções, definimos $h : I_{m+n} \to X \cup Y$ como segue-se:

$$h(x) = f(x) \text{ se } 1 \le x \le m \quad \text{e} \quad h(m + x) = g(x) \text{ se } 1 \le x \le n.$$

Como $X \cap Y = \phi$, h é uma bijeção. □

Corolário 1.9 *Sejam* $X_1, X_2, ..., X_n$ *conjuntos finitos, dois dois disjuntos. Então* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *é finito e* $\#(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \#(X_i)$.

Demonstração: Basta usar o Teorema anterior repetidas vezes.

Corolário 1.10 *Sejam* $X_1, X_2, ..., X_n$ *conjuntos finitos, (não necessariamente disjuntos). Então o produto cartesiano* $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ *é finito e*

$$\#(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) = \prod_{i=1}^{n} \#(X_i)$$

Demonstração: Note que, se $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ então $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{k} (X \times \{y_i\})$.

□

2 Conjuntos Enumeráveis

Definição 2.1 *Um conjunto* X *é dito enumerável, se ele é finito ou se existe uma bijeção* $f : \mathbb{N} \to X$, *neste último caso* X *diz-se um conjunto infinito enumerável.*

Cada bijeção $f : \mathbb{N} \to X$ *chama-se uma enumeração dos elementos de* X.

Exemplo:

Sejam $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos números pares e $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos impares. As funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$, $f(n) = 2n$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$, $g(n) = 2n - 1$ são bijeções e mostram que tanto $\mathbb{P}$ quanto $\mathbb{I}$ são conjuntos infinitos enumeráveis.

Teorema 2.1 *Todo conjunto infinto* X *contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração: Inicialmente vamos definir uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Escolha $x_1 \in X$ qualquer e defina $f(1) = x_1$. A seguir, escolha $x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ e defina $f(2) = x_2$, etc. Definidos $f(1), f(2), ..., f(n)$ escolha $x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e defina $f(n+1) = x_{n+1}$. Isto define $f : \mathbb{N} \to X$ indutivamente. (Note que $X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\} \neq \phi$ já que X é infinito.)

É claro que f é injetiva. De fato, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, suponhamos, por exemplo, que $m < n$. Então, $f(m) \in \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$, mas $f(n) \notin \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$.

$f(\mathbb{N}) \subset X$ é infinito enumerável. □

Corolário 2.2 *Um conjunto* X *é infinito se, e somente se, existe uma bijeção* $f : X \to Y$, *de* X *sobre uma parte própria* $Y \subset X$.

Demonstração:
($\Longrightarrow$) Suponhamos que X é infinito e seja $A \subset X$ um subconjunto infinito enumerável ($A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$). Seja $Y = (X \setminus A) \cup \{a_2, a_4, a_6, ...\}$. É claro que Y é uma parte própria de X.

Defina $f : X \to Y,\ f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \setminus A \\ a_{2n} & \text{se } x = a_n \in A \end{cases}$. Claro que f é uma bijeção.

($\Longleftarrow$) Veja o Corolário 1.3

□

Teorema 2.3 *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Suponhamos que X é infinito (se X é finito ele é enumerável).

Sejam x_1 o primeiro elemento de X, x_2 o primeiro elemento de $X \setminus \{x_1\}$, x_3 o primeiro elemento de $X \setminus \{x_1, x_2\}$, e assim por diante. Defina, indutivamente a função

$$f : \mathbb{N} \to X,\ \ f(n) = x_n$$

f é uma bijeção. □

Corolário 2.4 *Sejam X, Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Temos:*

(1) Se f é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável;

(2) Se f é sobrejetiva e X é enumerável, então Y é enumerável.

Teorema 2.5 *Se X, Y são conjuntos enumeráveis, então $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração: Considere a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to N,\ f(m, n) = 2^m 3^n$. É claro que f é injetiva (unicidade da decomposição em fatores primos). Assim, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Agora, X e Y são enumeráveis, logo existem funções injetivas $\varphi : \mathbb{N} \to X$ e $\psi : \mathbb{N} \to Y$ a partir das quais obtemos a função injetiva $\xi : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \xi(m, n) = (\varphi(m), \psi(n))$. Logo, $X \times Y$ é enumerável.

□

Exercício:

(1) $\mathbb{Z}$ é enumerável;

(2) $\mathbb{Q}$ é enumerável;

(3) Uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Isto é, Se $X_1, X_2, X_3, ...$ são conjuntos enumeráveis, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável;

(4) Se $X_1, X_2, ..., X_n$ são conjuntos enumeráveis, então seu produto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ é enumerável. Entretanto, nem sempre é verdade que o produto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, de uma sequência de conjuntos enumeráveis seja enumerável.

3 Um Conjunto Não Enumerável

Antes estabeleceremos a linguagem que nos ajudará na apresentação de um conjunto não enumerável.

Definição 3.1 *Dado um conjunto não vazio A, uma sequência em A é uma função $f : \mathbb{N} \to A$. Se $f(n) = x_n$, é usual representar a função f por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e dizemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em A. Os elementos x_1, x_2, ... são chamados termos da sequência e, claro eles não tem que ser diferentes, salvo que f seja uma função injetiva.*

Se A é um conjunto enumerável, então existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ e desta forma, podemos considerar A como uma sequência.

Teorema 3.1 *Seja A o conjunto de todas as sequências cujos termos são 0 ou 1.*

$$(\quad A = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\} \;=\; \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ } ou \text{ } x_n = 1\} \quad)$$

Então A é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Suponhamos, pelo contrário, que A seja enumerável. Então A é uma sequência (de sequências), $A = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ onde s_n é uma sequência em $\{0, 1\}$. Vamos construir uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\{0, 1\}$, ou seja um elemento pertencente ao conjunto A, diferente de todos os s_n, $n \in \mathbb{N}$, ou seja um elemento que não pertence ao conjunto A. Isto será uma contradição e provará que A é um conjunto não enumerável.

Construção de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

Seja $s_i = \{s_{in}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o i-ésimo elemento de A. Se $s_{nn} = 0$, definimos $a_n = 1$ e se $s_{nn} = 1$, definimos $a_n = 0$. Assim, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\{0, 1\}$, portanto um elemento do conjunto A. Por outro lado, é claro que, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é diferente de todos os s_n, $n \in \mathbb{N}$ e logo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é um elemento de A. Assim, A é um conjunto não enumerável. $\square$

Vimos anteriormente (Exercício do Cap. 1) que, dado um conjunto A qualquer, não existe uma função sobrejetiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$ de A no conjunto das partes de A, $\mathcal{P}(A)$. De modo que $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$. Em particular $\#(\mathbb{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Assim, $\#(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ é um conjunto não enumerável com cardinalidade maior que a cardinalidade de $\mathbb{N}$. temos, desta forma, uma maneira de construir conjuntos não enumeráveis com cardinalidade cada vez maior.

$$\#(\mathbb{N}) < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < ...$$

Não pensamos isto antes de Cantor [1].

[1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 3 de março de 1845 - Halle, 6 de janeiro de 1918)