Int. à Álg. Linear — 2ª Prova. — 2013.2 — 12/12/13

1. $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.q. $\begin{cases} (1,2) \in N(T) \\ (1,2,3) \in Im(T) \end{cases}$

Solução:

Queremos que $T(1,2) = (0,0,0)$. Podemos completar $\{(1,2)\}$ a uma base de $\mathbb{R}^2$, por exemplo $\{(1,2),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Agora fazendo

$T(0,1) = (1,2,3)$ teremos $(1,2,3) \in Im(T)$.

Então

$$T(1,2) = (0,0,0)$$
$$T(0,1) = (1,2,3)$$

E como

$$(x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1)$$

Temos $T(x,y) = x\cdot(0,0,0) + (y-2x)(1,2,3)$

$$T(x,y) = (y-2x,\ 2y-4x,\ 3y-6x)$$

Note que poderíamos ter escolhido outro vetor para completar a base de $\mathbb{R}^2$, nesse caso teríamos outra aplicação T.

//

2 $\mathcal{B}_1 = \{(0,1,1), (1,0,0), (1,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^2$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.q. $[T]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Base e dimensão do núcleo e da imagem de T.

(b) Determine $T(x,y,z)$.

Solução:

$\cancel{N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}}$

$$[T(x,y,z)]_{\mathcal{B}_2} = [T]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} \cdot [(x,y,z)]_{\mathcal{B}_1}$$

Faça $[(x,y,z)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, então

$$(x,y,z) = a(0,1,1) + b(1,0,0) + c(1,0,1),$$

daí
$$\begin{cases} b + c = x \\ a = y \\ a + c = z \end{cases}$$

donde obtemos
$$\begin{cases} a = y \\ b = x + y - z \\ c = z - y \end{cases}$$

$$\therefore \quad [T(x,y,z)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x+y-z \\ z-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y - z + y \\ \cancel{-y} + x + \cancel{y} - \cancel{z} + \cancel{z} - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [T(x,y,z)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Daí,

$$T(x,y,z) = (2y-z)(1,0) + (x-y)(0,1)$$

$$= (2y-z,\ x-y)$$

(b)

$$T(x,y,z) = (2y-z,\ x-y)$$

(a) $N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$

$$T(x,y,z) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = y(1,1,2)$$

$$\therefore \quad N(T) = [(1,1,2)].$$

Assim, $\{(1,1,2)\}$ é base para $N(T)$ e $\dim N(T) = 1$

Como $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3$, temos

$$1 + \dim Im(T) = 3$$

donde $\dim Im(T) = 2$

Sendo $Im(T)$ subespaço de $\mathbb{R}^2$, temos

$$Im(T) = \mathbb{R}^2 \qquad \left(\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \right)$$

Uma base para $Im(T)$ é, por exemplo B_2.

//

3 $\quad T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (\overset{z}{\cancel{x}} - y, y, x - y)$

(a) T é isomorfismo ?

(b) $[T^{-1}] = ?$

<u>Solução</u> :

(a) Queremos ver que T é uma bijeção, ou seja, T é injetiva e sobrejetiva.

$$N(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$$

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} z - y = 0 \\ y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = y = 0 \\ x = y = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad N(T) = \{(0,0,0)\} \qquad (\dim N(T) = 0)$$

Daí, T é injetiva.

Como $\underbrace{\dim N(T)}_{0} + \dim Im(T) = 3$, temos $\underline{\dim Im(T) = 3}$

Logo $Im(T) = \mathbb{R}^3$ e T é sobrejetiva.

Portanto, T é um isomorfismo.

(b) $[T^{-1}] = [T]^{-1}$

$[T] = ?$

$T(1,0,0) = (0,0,1)$

$T(0,1,0) = (-1,1,-1)$

$T(0,0,1) = (1,0,0)$

$$\therefore \quad [T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$[T]^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad [T]^{-1} = [T^{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#

4 $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$, linear.

T isomorfismo $\Longrightarrow \dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$.

<u>Solução</u>

T é injetiva e sobrejetiva (é isomorfismo)

T injetiva $\Longrightarrow N(T) = \{0\}$

$\Longrightarrow \underline{\dim N(T) = 0}$

T sobrejetiva $\Longrightarrow Im(T) = \mathbb{F}$

$\Longrightarrow \underline{\dim Im(T) = \dim \mathbb{F}}$

$$\underbrace{\dim N(T)}_{0} + \underbrace{\dim Im\, T}_{\dim \mathbb{F}} = \dim \mathbb{E}$$

Logo $\underbrace{\dim \mathbb{F} = \dim \mathbb{E}}$