Int. à Álg. Linear — 1ª Prova — 14/11/2013

1 Determine se os subconjuntos abaixo são subespaços de $\mathbb{E}$

(a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\}$, $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$

Solução:

W_1 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$. De fato, $(1,1,1) \in W_1$,

mas $2\cdot(1,1,1) = (2,2,2) \notin W_1$

(b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2) : a+b+c+d = 0 \right\}$, $\mathbb{E} = M(2)$

Solução

W_2 é subespaço de $M(2)$.

(i) $W_2 \neq \phi$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2)$ ... claro!

(ii) Sejam $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

$$A_1, A_2 \in W_2 \Rightarrow \begin{cases} a_1+b_1+c_1+d_1 = 0 \\ a_2+b_2+c_2+d_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = A_1+A_2 \in W_2$$

(iii) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_2$, então $a+b+c+d = 0$. Logo, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos $\alpha(a+b+c+d) = 0$. Ou seja,

$(\alpha a)+(\alpha b)+(\alpha c)+(\alpha d) = 0$. Daí

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \in W_2$$

De (i), (ii) e (iii) temos que W_2 é subespaço de $M(2)$.

(c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$, $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$.

<u>Solução</u>:

W_3 é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(i) $W_3 \neq \phi$. Claro, $(0,0,0) \in W_3$ já que $3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

(ii) $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - y_1 + 2z_1 = 0 \\ 3x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W_3$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W_3.$$

(iii) Se $(x,y,z) \in W_3$ então $3x - y + 2z = 0$. Logo, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ tem-se: $3(\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z) = 0$.

Daí $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in W_3$, ou seja $\alpha(x,y,z) \in W_3$.

Logo (por (i), (ii) e (iii)) W_3 é subesp. de $\mathbb{R}^3$.

2 $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z+t=0\}$

(V e W são subespaços de $\mathbb{R}^4$)

(a) Encontre bases para V e W. Determine dim V e dim W.

Solução :

V

$$(x,y,z,t) \in V \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ t=z \end{cases}$$

Daí $(x,y,z,t) = (x,-x,z,z)$

$= x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,1)$

$\therefore \quad V = [(1,-1,0,0), (0,0,1,1)]$

Como os vetores $(1,-1,0,0)$ e $(0,0,1,1)$ são L.I. (um não é múltiplo do outro) então

$B = \{(1,-1,0,0), (0,0,1,1)\}$ é uma base para V

e logo, $\dim V = 2$

W Analogamente, $(x,y,z,t) \in W \Rightarrow x-y-z+t=0$

$$x - y - z + t = 0 \Rightarrow t = y + z - x$$

logo $(x, y, z, t) = (x, y, z, -x+y+z)$

$$= x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,1) + z(0,0,1,1)$$

Daí, $W = [(1,0,0,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)]$

é claro que os vetores $(1,0,0,-1)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,1)$ são L.I já que

$$\alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$(*) \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$\therefore \quad \tilde{B} = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$

é base de W. Daí $\dim W = 3$

(b) Determine $V \cap W$ e $V + W$.

Solução:

De (a) Temos imediatamente que $(0,0,1,1) \in V \cap W$

e como $(1,-1,0,0) \notin W$ (já que $1-(-1) \neq 0+0 \neq 0$)

temos que $V \cap W = [(0,0,1,1)]$.

Logo $V \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = 0 \text{ e } z = t\}$

Note que $\underline{\dim V \cap W = 1}$

$\underline{\underline{V + W}}$

Sabemos que: $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

Logo, $\dim(V+W) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Assim, $\underline{\underline{V + W = \mathbb{R}^4}}$

Uma base para $V+W$ agora pode ser, por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$.

(c) Encontre bases para $V \cap W$ e $V+W$. Determine $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V+W)$.

<u>Solução</u>:

Tudo isto já foi feito em (b) acima.

Base para $V \cap W$: $\{(0,0,1,1)\}$, $\dim(V \cap W) = 1$.

Base para $V + W$: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\dim(V+W) = 4$

(d) $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$?

<u>Solução</u>:

$\mathbb{R}^4 = V + W$ como vimos em (b), mas a soma não é direta pois $V \cap W \neq \{0\}$. De fato, $\dim(V \cap W) = 1$.

(e) Encontre um subespaço F de $\mathbb{R}^4$ t.q.

$$V \oplus F = \mathbb{R}^4$$

<u>Solução</u>:

Lembre que $V = [(1,-1,0,0), (0,0,1,1)]$

$(\therefore \dim V = 2)$

Temos que encontrar $F \subseteq \mathbb{R}^2$ de modo que $\dim F = 2$ e $F \cap V = \{0\}$. Sendo assim teremos

$$\begin{aligned} \dim(V+F) &= \dim V + \dim F - \dim(V \cap F) \\ &= 2 + 2 - 0 = 4 \end{aligned}$$

$\therefore \dim(V+F) = 4$ e logo $V + F = \mathbb{R}^4$.

Como $V \cap F = \{0\}$ teríamos $V \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Tome, por exemplo,

$$F = [(0,0,1,-1), (1,1,0,0)]$$

É claro que $V \cap F = \{0\}$ e como $\dim V = 2 = \dim F$ temos

$$V \oplus F = \mathbb{R}^4$$

3 $\quad \mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$

$$(*) \begin{cases} w_1 = v_1 - v_2 - v_3 \\ w_2 = 2v_2 + 3v_3 \\ w_3 = 3v_1 + v_3 \end{cases}$$

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ e $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

Solução:

De $(*)$ acima é imediato que $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Agora,

$$[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \left([I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \right)^{-1}.$$

e

$$\left([I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

(b) Se $[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quais as coord. de v na base $\mathcal{B}_2$.

<u>Solução</u>:

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = [I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \cancel{-18} & \cancel{+18} \\ -1 & -8 & +9 \\ 1 & \cancel{+6} & \cancel{-6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$