

Lista 8 Exercício 14

E esp. vet. com p.i., $W \subseteq E$ subesp. vet. de E .

$$W^\perp := \{v \in E : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$

Mostre que $W \oplus W^\perp = E$.

Solução

É claro que $W^\perp$ é um subesp. vet. de E .

Então vamos verificar que:

(i) $W \cap W^\perp = \{0\}$

(ii) $W + W^\perp = E$.

(i) Seja $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base ortonormal de W .

Se $x \in W \cap W^\perp$, então $x = \sum_{j=1}^n \langle x, w_j \rangle w_j$ já que $x \in W$ e B é base ortonormal de W . Por outro lado, como $x \in W^\perp$ temos $\langle x, w \rangle = 0 \ \forall w \in W$, em particular $\langle x, w_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$.

Logo $x = \sum_{j=1}^n \langle x, w_j \rangle w_j = 0$

$\therefore W \cap W^\perp = \{0\}$

(ii) Completamos a base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ de W a uma base $\tilde{B} = \{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_s\}$, também ortonormal, de E .

Então, $\forall v \in E$ temos:

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, w_j \rangle w_j + \sum_{k=1}^s \langle v, v_k \rangle v_k$$

É claro que $v_1 := \sum_{j=1}^n \langle v, w_j \rangle w_j \in W$.

Além disso, $v_2 := \sum_{k=1}^s \langle v, v_k \rangle v_k \in W^\perp$

já que $\langle v_k, w_j \rangle = 0 \quad \forall k, \forall j$ (a base $\tilde{B}$ é ortogonal)

Assim, $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$

$$\therefore \underline{E = W + W^\perp}$$