



Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
<http://www.mat.ufpb.br>

Lista de Exercícios Nº 7 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Seja $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, um isomorfismo linear e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T . Mostre que $\lambda \neq 0$ e que λ^{-1} é autovalor de T^{-1} .

2 Dada uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Seja $[T]$ a matriz de T numa base qualquer de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o polinômio característico de T é: $p_t(x) = x^2 - \text{Tr}([T])x + \det([T])$.

3 Dada $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ linear, sejam $u, v \in \mathbb{E}$ autovetores de T associados aos autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente ($Tu = \lambda_1 u$, $Tv = \lambda_2 v$). Mostre que, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\{u, v\}$ é li.

4 Sejam $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear e $\mathcal{B} = \{u, v\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $Tu = (0, 0)$ e $Tv = u$. Mostre que T não é diagonalizável.

5 Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear. O operador complexificado de T é definido como: $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$, onde $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $u + iv \in \mathbb{C}^n$. Mostre que:

(1) $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é linear;

(2) $\ker(T_{\mathbb{C}}) = \{u + iv \in \mathbb{C}^n : u, v \in \ker(T)\}$;

(3) $\text{Im}(T_{\mathbb{C}}) = \{u + iv \in \mathbb{C}^n : u, v \in \text{Im}(T)\}$;

(4) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de T , então λ também é autovalor de $T_{\mathbb{C}}$;

(5) Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, x)$, então T não é diagonalizável, mas $T_{\mathbb{C}}$ é diagonalizável;

(6) $(T_{\mathbb{C}})^2 = (T^2)_{\mathbb{C}}$.

6 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Verifique que o polinômio característico de A é $p_A(x) = x^2(x - 1)^2$. Verifique que este é também o polinômio minimal.

7 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é $[T] = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Determine: os autovalores de T , os espaços próprios associados a esses autovalores. Verifique que T é diagonalizável.

8 Seja $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ um operador linear tal que $\dim \text{Im}(T) = m$. Prove que T tem no máximo $m + 1$ autovalores.