Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 4 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Em* $\mathbb{R}^3$ *encontre três vetores,* u, v *e* w *tais que: nenhum deles é múltiplo de outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e* $[u, v, w] \neq \mathbb{R}^3$.

2 *Sejam* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *duas bases de* $\mathbb{R}^2$. *Se* $\mathcal{B}_2 = \{(1,3),(2,-4)\}$ *e* $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$, *Determine a base* $\mathcal{B}_1$.

3 *Sejam* $V := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0,\ z = t\}$ *e* $W := \{x - y - z + t = 0\}$ *subespaços de* $\mathbb{R}^4$. *Determine* $V \cap W$ *e* $V + W$. *Encontre bases para* $V \cap W$ *e* $V + W$. $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$?

4 *Seja* $W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) *Mostre que* W *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$;

(b) *Encontre um subespaço* V *de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $V \oplus W = \mathbb{R}^3$;

(c) *Dê exemplos de dois subespaços* V, $W \subseteq \mathbb{R}^3$, *de dimensão 2, tais que* $V + W = \mathbb{R}^3$. *A soma é direta?*

5 *Sejam* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial real,* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *uma base de* $\mathbb{E}$ *e* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ *não todos iguais a zero. Prove que o conjunto dos vetores* $v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$ *tais que* $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + ... + \alpha_nx_n = 0$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{E}$ *de dimensão n-1.*

6 *Sejam* $A \in M(n \times m, \mathbb{R})$, $B \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ *e* $S := \{X \in M(m \times 1, \mathbb{R}) : AX = 0\}$. *Seja* $X_0 \in M(m \times 1, \mathbb{R})$, *tal que* $AX_0 = B$ *e seja* $\widetilde{S} := \{X \in M(m \times 1, \mathbb{R}) : AX = B\}$. *Mostre que,*

1. S *é um subespaço de* $M(m \times 1, \mathbb{R})$;
2. $\widetilde{S} = X_0 + S := \{X_0 + X : X \in S\}$.

7 *Sejam* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ *duas bases ordenadas de* $\mathbb{R}^3$ *tais que :*

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 \\ w_2 &= 2v_1 + v_2 + v_3 \\ w_3 &= v_1 + 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ *e* $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

8 *Seja* $P_3(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes reais. Mostre que o conjunto* $\mathcal{B} := \{1,\ 1-x,\ (1-x)^2,\ (1-x)^3\}$ *é uma base para* $P_3(\mathbb{R})$ *e calcule* $[3 - 2x + x^2]_{\mathcal{B}}$.