

Exercícios Resolvidos

LISTA 4 Ex. 5

E esp. vet. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de E .

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ não todos iguais a zero.

$$F = \left\{ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \dots + \alpha_n \alpha_n = 0 \right\}$$

Provar que F é um subesp. de E de dimensão $n-1$.

Solução:

F é subesp. de E .

i) $F \neq \emptyset$. De fato, tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ Temos que $\alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_n \alpha_n = 0$ e logo $v = 0v_1 + \dots + 0v_n = 0 \in F$.

ii) Sejam $v, w \in F$. Então $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i$

com $\sum \alpha_i \alpha_i = 0$ e $\sum \alpha_i \gamma_i = 0$. ~~Logo~~

É claro que $\sum \alpha_i (\alpha_i + \gamma_i) = 0$ e logo

$$v + w = \sum (\alpha_i + \gamma_i) v_i \in F.$$

$$\therefore v, w \in F \Rightarrow v + w \in F.$$

iii) Se $v = \sum \alpha_i v_i \in F$ (com $\sum \alpha_i \alpha_i = 0$) então,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum \alpha_i (\lambda \alpha_i) = 0$ e logo ~~$\lambda v = \sum \lambda \alpha_i v_i$~~

$$\lambda v = \sum \lambda \alpha_i v_i \in F.$$

$$\therefore v \in F, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in F.$$

Assim, F é subespago de E .

Vejamós agora que $\dim F = n-1$

2.
Como os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ não são todos iguais a zero, então (claro) algum não é zero. Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$. Qualquer vetor de $\mathbb{F}$ pode ser escrito como:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

com $\alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_n \alpha_n = 0$, como $\alpha_1 \neq 0$ podemos escrever

$$\alpha_1 = \frac{-\alpha_2 \alpha_2 - \dots - \alpha_n \alpha_n}{\alpha_1} \quad \text{e logo,}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{-(\alpha_2 \alpha_2 + \dots + \alpha_n \alpha_n)}{\alpha_1} v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_2 \left(v_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_1 \right) + \alpha_3 \left(v_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_1 \right) + \dots + \alpha_n \left(v_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_1 \right) \end{aligned}$$

~~Sejam~~ Sejam $w_j = v_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_1} v_1$, $j = 2, 3, \dots, n$

Então todo vetor $v \in \mathbb{F}$ se escreve como combinação linear dos vetores $w_2, w_3, \dots, w_n$. Além disso estes vetores w_j , $j = 2, \dots, n$, são L.I. De fato,

se $a_2 w_2 + a_3 w_3 + \dots + a_n w_n = 0$, então

$$a_2 \left(v_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_1 \right) + a_3 \left(v_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_1 \right) + \dots + a_n \left(v_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_1 \right) = 0,$$

logo

$$-\left(\frac{a_2 \alpha_2}{\alpha_1} + \frac{a_3 \alpha_3}{\alpha_1} + \dots + \frac{a_n \alpha_n}{\alpha_1} \right) v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_n v_n = 0$$

e, como os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são L.I., Temos

$a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$. Daí $\{w_2, \dots, w_n\}$ é uma base para $\mathbb{F}$ e portanto, $\dim \mathbb{F} = n-1$