



Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
<http://www.mat.ufpb.br>

Lista de Exercícios Nº 2 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 Seja $\mathcal{B} := \{(2, 1), (-1, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(5, -2)]_{\mathcal{B}}$.

2 Em $\mathbb{R}^2$ considere os vetores $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ tais que $ac + bd = 0$ e $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Mostre que $\mathcal{B} = \{u, v\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$.

3 Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Se $\mathcal{B}_2 = \{(1, 3), (2, -4)\}$ e $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{pmatrix}$, Determine a base $\mathcal{B}_1$.

4 Sejam $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tais que :

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 \\ w_2 &= 2v_1 + v_2 + v_3 \\ w_3 &= v_1 + 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Determine as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ e $[I]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$.

5 Seja $P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes reais. Mostre que o conjunto $\mathcal{B} := \{1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3\}$ é uma base para $P_3(\mathbb{R})$ e calcule $[3 - 2x + x^2]_{\mathcal{B}}$.

6 Seja $M(2)$ o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e seja W o subespaço gerado por:
 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Encontre uma base e a dimensão de W .

7 Seja $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;

(b) Encontre um subespaço V de $\mathbb{R}^3$ tal que $V \oplus W = \mathbb{R}^3$;

(c) Dê exemplos de dois subespaços $V, W \subseteq \mathbb{R}^3$, de dimensão 2, tais que $V + W = \mathbb{R}^3$.
A soma é direta?

8 Sejam $V := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z = t\}$ e $W := \{x - y - z + t = 0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine $V \cap W$ e $V + W$. Encontre bases para $V \cap W$ e $V + W$. $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$?