

(1) ~~1~~ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear, $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Determine:

(a) O polinômio característico de T

$$p_T(x) = \det(xI - T)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -7 & 6 \\ 1 & x-4 & 0 \\ 0 & -2 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$= x(x-4)(x+2) - 12 + 7(x+2)$$

$$= x(x^2 - 2x - 8) + 7x + 2$$

$$= x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$\therefore \boxed{p_T(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

(b) Os autovalores de T .

Lembre: λ é autovalor de $T \Leftrightarrow p_T(\lambda) = 0$.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \dots (*)$$

É fácil ver que $\lambda = 1$ é raiz da eq (*) acima

$$e \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - x - 2)(x - 1)$$

$$= (x - 2)(x + 1)(x - 1)$$

Logo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$ são os autovalores de T .

(c) Uma base para os espaços próprios.

$$\underline{\lambda_1 = 1}$$

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore S_1 = \text{span} \left\{ \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right) \right\}$$

Uma base para S_1 é dada por $\{ (9, 3, 2) \}$

$$\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como no caso anterior ($\lambda_1 = 1$), temos

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo ~~$\{ (5, 1, 2) \}$~~ $\{ (5, 1, 2) \}$ é base para S_{-1} .

$$\underline{\lambda_3 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $\{(4, 2, 1)\}$ é base para S_2

(d) o polinômio minimal de T .

Como o polinômio característico de T é

$$p_T(x) = x^3 - 2x - x + 2 = (x-2)(x+1)(x-1)$$

Todas as raízes são simples (multiplicidade = 1),
então o polinômio minimal deve ser igual ao
polinômio característico.

$$\boxed{m_T(x) = (x-2)(x+1)(x-1)}$$

(e) T é diagonalizável... Sim! $\left(p_T(x) = m_T(x) \right)$
Uma base que diagonaliza T é $\{(5, 1, 2), (9, 3, 2), (4, 2, 1)\}$

$$B = \{(5, 1, 2), (9, 3, 2), (4, 2, 1)\}$$

(formada por autovetores de T)

(2) V esp. vet. com p.i. $\langle, \rangle$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V .

Seja $v \in V$ t.q. $\langle v, v_j \rangle = 0$. Mostre que $v = 0$.
($\forall j=1, \dots, n$)

Solução

Sabemos que se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , então todo vetor $v \in V$ se escreve como

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle v_j \quad (*)$$

e como $\langle v, v_j \rangle = 0 \quad \forall j=1, 2, \dots, n$, temos

$$\underline{\underline{v = 0}}$$

Para ver que (*) vale escrevemos $v \in V$ como combinação linear dos v_j (vetores da base B)

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_n v_n$$

fazendo o p.i. com v_j obtemos

$$\langle v, v_j \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle$$

e como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal

$$(\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}) \quad \text{temos}$$

$$\alpha_j = \langle v, v_j \rangle$$

(3) Em $\mathbb{R}^3$ com o p.i. usual, seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ 5.
onde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -2)$ e $v_3 = (-1, 0, 1)$

Use Gram-Schmidt para ortogonalizar a base B .

Solução:

Seja $\{w_1, w_2, w_3\}$ a base obtida de B pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Temos:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} \cdot w_2$$

$$\text{e} \quad \langle v_2, w_1 \rangle = \langle (1, 0, -2), (1, 1, 1) \rangle = -1$$

$$\|w_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

$$\text{Logo } \begin{cases} w_1 = (1, 1, 1) \\ w_2 = (1, 0, -2) - \left(-\frac{1}{3}\right)(1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

$$\langle v_3, w_1 \rangle = \langle (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle = 0$$

$$\langle v_3, w_2 \rangle = \langle (-1, 0, 1), \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right) \rangle = -3$$

$$\|w_2\|^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{42}{9}$$

$$w_3 = (-1, 0, 1) - 0 \cdot w_1 - \left(\frac{-3}{42/9}\right) \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

$$= (-1, 0, 1) + \frac{9}{42} (4, 1, -5)$$

$$= \left(-\frac{6}{42}, \frac{9}{42}, \frac{-3}{42}\right) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{-1}{14}\right)$$

Assim,

$$w_1 = (1, 1, 1), \quad w_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right) \text{ e}$$

$$w_3 = \left(\frac{-2}{14}, \frac{3}{14}, \frac{-1}{14}\right)$$

observe que $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_3 \rangle = \langle w_2, w_3 \rangle = 0$

=====