1 Corpos.

1.1. Def: Um corpo é um conj. não vazio $\mathbb{K}$ no qual estão definidas duas operações binárias internas

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{(adição)}$$
$$(a,b) \longmapsto a+b$$

e

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{(multiplicação)}$$
$$(a,b) \longmapsto a \cdot b$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $a+b = b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutatividade)

(A2) $a+(b+c) = (a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associatividade)

(A3) Existe em $\mathbb{K}$ um elemento que denotamos por 0 e chamamos de elemento neutro para a adição, tal que, $0+a = a+0 = a$ $\forall a \in \mathbb{K}$.

(A.4) $\forall a \in \mathbb{K}$, $\exists -a \in \mathbb{K}$ t.q. $a+(-a) = (-a)+a = 0$

(o elemento $-a \in \mathbb{K}$ é dito inverso aditivo de a)

(M1) $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutatividade)

(M2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associatividade)

(M3) Existe em $\mathbb{K}$ um elemento, denotado por 1, chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $\forall a \in \mathbb{K}$

(M4) $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ t.q. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

(o elemento a^{-1}, também denotado por $\frac{1}{a}$, é chamado inverso multiplicativo de a)

(D) $(a+b) \cdot c = ac + bc$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (distributividade)

1.2. Exemplos

(1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e multiplicação são, claramente, corpos.

O conj $\mathbb{Z}$, com as operações usuais, não é um corpo já que a propriedade (M4) da def. não é satisfeita.

(2) Considere o conj. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{ a + b\sqrt{2} \, ; \, a, b \in \mathbb{Q} \}$

com as operações

$$\begin{cases} (a+b\sqrt{2}) + (c+d\sqrt{2}) := (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \\ (a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) := (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \end{cases}$$

$\mathbb{Q}\sqrt{2}$ com as operações acima é um corpo. (Verificar).

1.3. Observações

(1) O elemento $0 \in \mathbb{K}$ dado por (A3) é único.

De fato, suponha que existe $\tilde{0} \in \mathbb{K}$ t.q. $a + \tilde{0} = a \; \forall a \in \mathbb{K}$.

Então $0 + \tilde{0} = 0$, pois $\tilde{0}$ é neutro aditivo. Por outro lado, $0 + \tilde{0} = \tilde{0}$ já que 0 é neutro aditivo, Assim,

$0 = \tilde{0}$.

#

(2) Analogamente prova-se que os elementos $1 \in \mathbb{K}$ e $a^{-1} \in \mathbb{K}$ dados por (M3) e (M4) respectivamente também são únicos.

2. Espaços Vetoriais

2.1. Def: Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espaço vetorial é um conj. não vazio $\mathbb{E}$ no qual estão definidas duas operações binárias

$$\begin{aligned} + : \mathbb{E} \times \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (u,v) &\longmapsto u+v \end{aligned} \qquad \text{(Adição)}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{E} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ (\alpha, u) &\longmapsto \alpha \cdot u \end{aligned} \qquad \text{(Multiplicação por escalar)}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(A1) $u+v = v+u, \ \forall u,v \in \mathbb{E}$ (comutatividade)

(A2) $(u+v)+w = u+(v+w), \ \forall u,v,w \in \mathbb{E}$ (Associatividade)

(A3) $\exists \ 0 \in \mathbb{E}$ t.q. $0+u = u+0 = u \ \ \forall u \in \mathbb{E}$.

(o elemento $0 \in \mathbb{E}$ é chamado vetor nulo)

(A4) $\forall v \in \mathbb{E}, \ \exists -v \in \mathbb{E}$ t.q. $v+(-v) = (-v)+v = 0$

(M1) $(\alpha\beta)\cdot v = \alpha(\beta v), \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \ \forall v \in \mathbb{E}$

(M2) $1 \cdot v = v, \ \forall v \in \mathbb{E}$

($1 \in \mathbb{K}$ é o elemento neutro da multiplicação)

(D1) $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall u,v \in \mathbb{E}$

(D2) $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot u, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \ \forall u \in \mathbb{E}$.

2.2. Obs.

(1) Os elementos do conj. $\mathbb{E}$ são chamados de vetores e os elementos de $\mathbb{K}$, de escalares.

(2) Como antes, é fácil verificar que os vetores $0 \in \mathbb{E}$ e $-v \in \mathbb{E}$ são únicos.

2.3. Exemplos:

(1) Todo corpo $\mathbb{K}$ é um esp. vet. sobre si mesmo.
De fato, não é difícil verificar que as operações do corpo satisfazem as propriedades das operações de um esp. vet.

(2) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e considere o conjunto

$$\mathbb{K}^n := \mathbb{K} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{K} = \{(a_1, \dots, a_n) : a_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \dots, n\}$$

com as operações abaixo:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) := (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$$

É fácil verificar (Exercício) que $\mathbb{K}^n$, com as operações acima, é um $\mathbb{K}$-esp. vet.

(3) Seja $M(m \times n, \mathbb{K})$ o conj. das matrizes $m \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.

$M(m \times n, \mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-esp. vet. com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(4) Sejam $A \neq \phi$ um conj. q.q. e $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ o conjunto das funções $f : A \to \mathbb{K}$. Em $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ defina as seguintes operações:

Para $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ defina a função $f+g : A \to \mathbb{K}$ por $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $\forall\, a \in A$, e para $\alpha \in \mathbb{K}$ defina $\alpha f : A \to \mathbb{K}$, $(\alpha f)(a) := \alpha \cdot f(a)$

Com estas operações $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-esp. vet.

(5) Sejam $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e $X \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Considere a equação $A \cdot X = 0$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente o sistema de equações lineares

$$(*) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Seja $S := \{X \in M(n\times 1, \mathbb{R}) : AX = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$

$= \{$ soluções do sistema $(*)\}$.

com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar nas matrizes $M(n\times 1, \mathbb{R})$, S é claramente um esp. vet.

3. Subespaços Vetoriais

A situação do exemplo anterior (exemplo 5) é típica da noção de subespaço de um esp. vet., que definimos a seguir.

3.1 Def. Sejam $\mathbb{E}$ um $\mathbb{K}$-esp vet. e $W \subset \mathbb{E}$ um subconj. não vazio. Dizemos que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{E}$, sse W, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbb{E}$ e $\mathbb{K}$, restritas a W, é um espaço vetorial.

Para mostrar que um ~~subespaço~~ subconj $W \subset \mathbb{E}$, $W \neq \emptyset$, é um subespaço vetorial de $\mathbb{E}$ é necessário verificar que as operações de adição e multiplicação por escalar estão definidas em W e em seguida teremos que verificar que as propriedades (A1), ..., (A4), (M1), (M2), (D1) e (D2) da def. (2.1) são satisfeitas. Entretanto, $\mathbb{E}$ é um esp. vet. e W está contido em $\mathbb{E}$. Assim, algumas das propriedades da def. (2.1) não precisam ser verificadas. Por exemplo, é claro que a adição é comutativa em W.

O resultado seguinte mostra que, de fato, basta verificar que as operações de E estão definidas em W.

3.2 <u>Proposição</u>: Sejam E um $\mathbb{K}$-esp. vet. e $W \subset E$ um subconj. não vazio de E. Então W é um subesp vet. de E sse as condições abaixo são satisfeitas

(i) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

(ii) $\lambda \in \mathbb{K},\ u \in W \Rightarrow \lambda u \in W$

<u>Dem</u>:

($\Rightarrow$) se W é um subesp. de E, então é claro que as condições (i) e (ii) são satisfeitas

($\Leftarrow$) Suponhamos que W possui as propriedades (i) e (ii) Para mostrar que W é um subesp. de E basta verificar que os elementos de W verificam as condições (A3) e (A4) da def. (2.1) (É claro que as outras condições são satisfeitas)

<u>(A3)</u>: Tome $u \in W$, um elemento q.q. (Lembre que $W \neq \emptyset$) como $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u \in W$, tomando $\lambda = 0$ temos $0 \cdot u = 0 \in W$.

<u>(A.4)</u>: Tomando $a = -1$ obtemos $(-1) \cdot u = -u \in W$.

#.

3.3. <u>Obs</u>:

As condições (i) e (ii) da Proposição (3.2) são equivalentes à condição

$$\boxed{u, v \in W,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u + w \in W}$$

3.4. Exemplos:

(1) Se $\mathbb{E}$ é um esp. vet., então $W = \{0\}$ e $W = \mathbb{E}$ são subesp. vetoriais de $\mathbb{E}$.

O subesp. $\{0\}$ é chamado de espaço vetorial nulo.

(2) Sejam U, V subesp. de um $\mathbb{K}$-esp. vet. $\mathbb{E}$. Então $W = U \cap V$ é um subesp. de $\mathbb{E}$.

De fato, note que $U \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$, logo $U \cap V \neq \emptyset$.

Usemos agora a Prop. 3.2. Tome $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in U \cap V$, então como U e V são subesp. de $\mathbb{E}$ temos

$\lambda u + v \in U$ e $\lambda u + v \in V$. Logo $\lambda u + v \in U \cap V$.

e pela Prop 3.2 (de fato pela obs 3.3), $U \cap V$ é subesp. de $\mathbb{E}$.

(3) Sejam U, V e $\mathbb{E}$ como no exemplo anterior. Em geral, $U \cup V$ não é um subesp. vet. de $\mathbb{E}$. De fato nada garante que ~~[illegible]~~ tomando $u \in U$ e $v \in V$ tenhamos $u + v \in U \cup V$. Por exemplo, os conjuntos

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ e $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

são subesp. de $\mathbb{R}^2$ e temos:

$v = (1,0) \in V$ e $u = (0,1) \in U$ mas $u + v = (1,1) \notin U \cup V$.

(4) Consideremos ainda U, V e $\mathbb{E}$ como antes. Definimos a soma de U e V, ~~[illegible]~~ denotada por $U + V$ como:

$$U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$$

Ou seja, $w \in U+V$ sse existem $u \in U$ e $v \in V$ tais que $w = u+v$.

$U+V$ é um subesp. vet. de $\mathbb{E}$. De fato, é claro que $U+V \neq \emptyset$ já que sendo U e V subesp. de $\mathbb{E}$ temos $0 \in U$ e $0 \in V$, logo $0 = 0+0 \in U+V$.

Agora sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $w_1, w_2 \in U+V$.

$w_1, w_2 \in U+V \Rightarrow$ existem $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ tais que $w_1 = u_1 + v_1$, $w_2 = u_2 + v_2$.

Daí

$$\lambda w_1 + w_2 = \lambda(u_1+v_1) + u_2 + v_2$$
$$= \underbrace{(\lambda u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda v_1 + v_2)}_{\in V}$$

Como U e V são subesp. de $\mathbb{E}$ temos $\lambda u_1 + u_2 \in U$ e $\lambda v_1 + v_2 \in V$. Logo $\lambda w_1 + w_2 \in U+V$

Assim, $U+V$ é um subesp. vet. de $\mathbb{E}$

3.5. Def. sejam U, V subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$-esp. vet. $\mathbb{E}$. Dizemos que a soma $U+V$ é direta sse

$U+V = \mathbb{E}$ e $U \cap V = \{0\}$

3.6 Def: sejam $\mathbb{E}$ um $\mathbb{K}$-esp. vet e $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}$ vetores quaisquer. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{E}$ é combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n$ sse existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

tais que $\quad v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.

$\#$

3.7. <u>Exemplo.</u>

(1) o vetor $(3,5,-2) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. De fato,

$$(3,5,-2) = 3(1,0,0) + 5(0,1,0) + (-2)(0,0,1).$$

Ainda mais, é claro que qq vetor $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ é combinação linear dos vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. De fato,

$$(a,b,c) = a e_1 + b e_2 + c e_3.$$

(2) o vetor $(1,2,3)$ não é combinação linear dos vetores $(1,0,0)$ e $(1,0,1)$, de fato qq combinação linear desses vetores terá a 2ª coord. igual a zero.

$=$

3.8. <u>Notação:</u> sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{E}$ vetores qq num $\mathbb{K}$-esp. vet. $\mathbb{E}$. Denotamos por $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ ou por $\widetilde{\{v_1, \dots, v_n\}}$ ou por $[v_1, \dots, v_n]$ o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \dots, v_n$

A proposição a seguir mostra que este conj. é um subespaço de $\mathbb{E}$.

3.9. Proposição: Sejam $\mathbb{E}$ um $\mathbb{K}$-esp. vet. e $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{E}$ vetores quaisquer em $\mathbb{E}$. Então o conj. $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ é um subesp. vet. de $\mathbb{E}$.

Dem.

É claro que $W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} \neq \emptyset$ já que

$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = 0 \in W$.

Agora sejam $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$u, v \in W \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots \beta_n v_n .$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lambda u + v &= \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) v_n \end{aligned}$$

e como $\lambda\alpha_1 + \beta_1, \dots, \lambda\alpha_n + \beta_n \in \mathbb{K}$, temos

$$\lambda u + v \in W$$

Donde W é subesp. vet. de $\mathbb{E}$.

3.10. Def: O subesp. $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ é chamado espaço gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$.

3.11. Exemplo

Sejam $v_1 = (1,2,0)$ e $v_2 = (3,-1,2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.
Determine $\text{span}\{v_1, v_2\}$.

Solução:

$$\text{span}\{v_1,v_2\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha v_1 + \beta v_2\}$$

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 &= \alpha(1,2,0) + \beta(3,-1,2) \\ &= (\alpha + 3\beta,\ 2\alpha - \beta,\ 2\beta) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + 3\beta \\ y &= 2\alpha - \beta \\ z &= 2\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\begin{aligned} \alpha &= y/2 + z/4 \\ \beta &= z/2 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{4x - 2y - 7z = 0}$$

$$\therefore \quad \text{span}\{v_1,v_2\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 2y - 7z = 0\}$$

(Em cálculo vetorial e Geom. Analítica aprendemos que o conj. acima é um plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $(4,-2,-7)$)