

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^{18} .

Solução

Fazer o produto $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ não é difícil, mas
temos que concordar que é "muito chato".

O polinômio característico de A é:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} x+3 & -4 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + x - 2 \\ &= (x+2)(x-1) \end{aligned}$$

cujas raízes são $x=1$ e $x=-2$. Ou seja $\lambda_1 = -2$
e $\lambda_2 = 1$ são autovalores de A .

A é diagonalizável... certo?... justifique.

Dá existe uma matriz P invertível tal que

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$P = ??$

Veja que $(4, 1)$ é um ~~*~~ vetor próprio associado ao valor
próprio -2

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente, $(1, 1)$ é um vetor próprio associado ao
valor próprio $\lambda_2 = 1$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Então

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

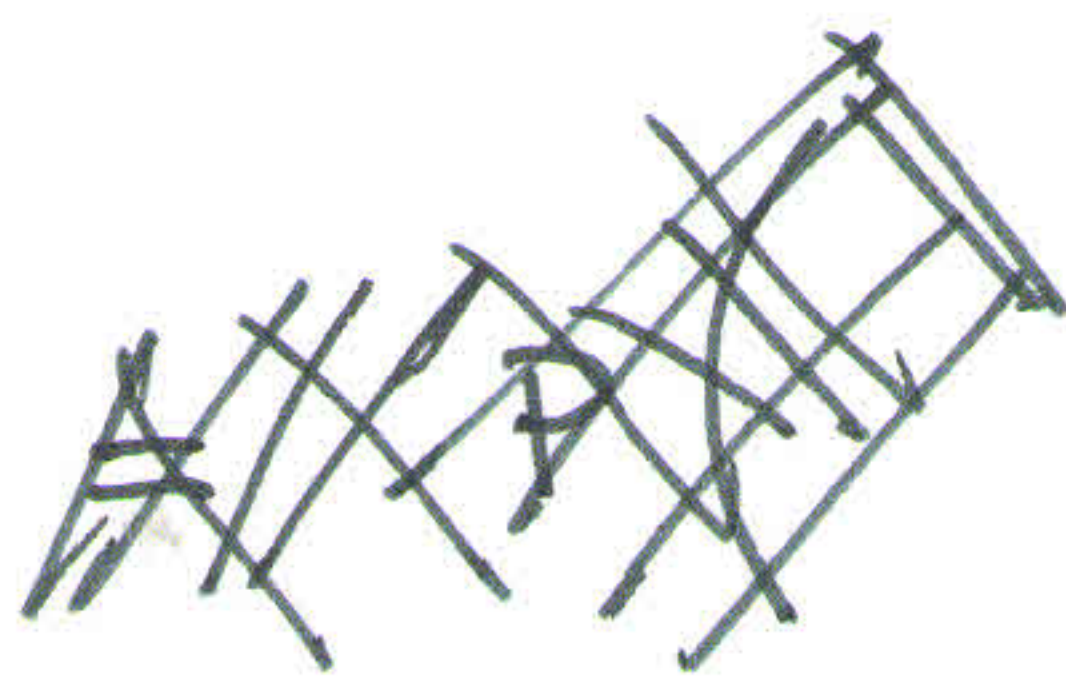
Agora,

$$A^{18} = \left(P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{18}$$

$$= P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \dots \cdot P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{18} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} (-2)^{18} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$



$$= P \begin{pmatrix} 2^{18} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{18} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^{18} & 1 \\ 2^{18} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4 \cdot 2^{18} - 1}{3} & \frac{4 - 4 \cdot 2^{18}}{3} \\ \frac{2^{18} - 1}{3} & \frac{4 - 2^{18}}{3} \end{pmatrix}$$

