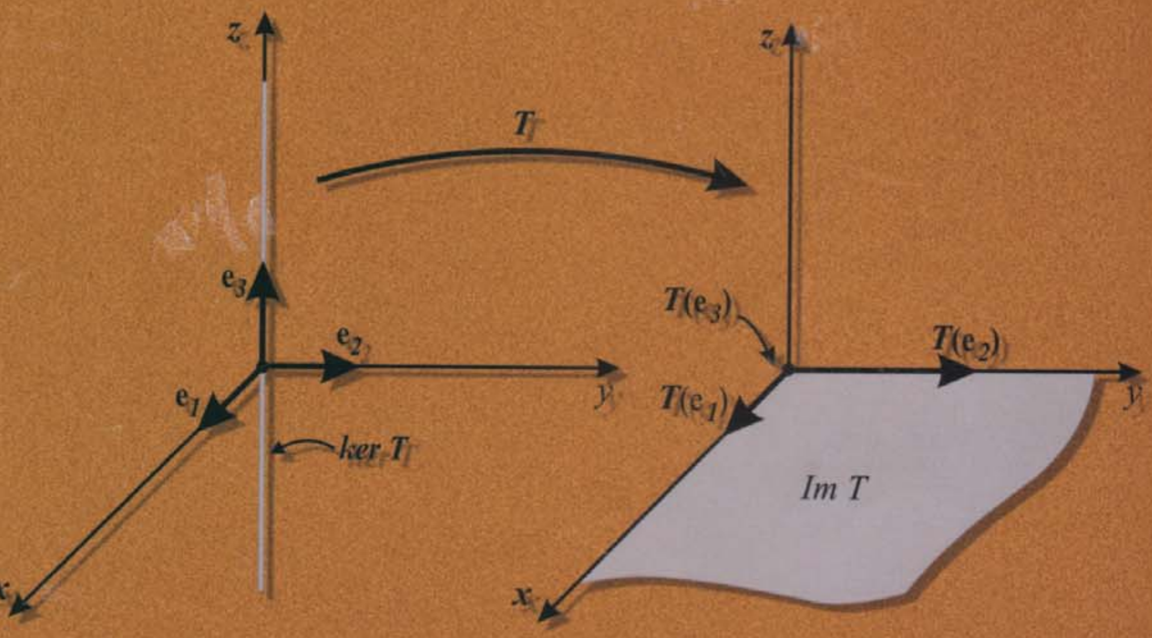
Introdução à
ÁLGEBRA LINEAR

Antônio de Andrade e Silva



EDITORA UNIVERSITÁRIA
UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
reitor
RÔMULO SOARES POLARI
vice-reitora
MARIA YARA CAMPOS MATOS

EDITORA UNIVERSITÁRIA

diretor
JOSÉ LUIZ DA SILVA
Vice-diretor
JOSÉ AUGUSTO DOS SANTOS FILHO
divisão de editoração
ALMIR CORREIA DE VASCONCELLOS JUNIOR

S586i Silva, Antônio de Andrade e
Introdução à Álgebra Linear / Antônio de Andrade e Silva. – João Pessoa: Ed. Universitária/UFPB, 2007.
266p.

1. Álgebra Linear 2. Geometria Analítica
1. Atividade física e saúde

UFPB/BC CDU: 512.64

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Foi feito o depósito legal

A minha mãe
Maria da Conceição de Freitas
e em memória de meu pai
José de Andrade e Silva.

Prefácio

Este texto surgiu da experiência do autor quando ministrou algumas vezes a disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica para vários cursos na Universidade Federal da Paraíba.

O principal objetivo deste texto é fazer uma apresentação rigorosa e clara das provas dos Teoremas e exemplos da Álgebra Linear no nível de graduação, desenvolvendo, também, a capacidade de modelagem de problemas e provas envolvendo combinações lineares, transformações lineares e matrizes, diagonalizações de operadores lineares e classificações de quádricas. Além disso, resolver problemas que envolvam matrizes utilizando a forma canônica de Jordan.

É nossa expectativa que este texto assuma o caráter de espinha dorsal de uma experiência permanentemente renovável, sendo, portanto, bem vindas as críticas e/ou sugestões apresentadas por todos - professores ou alunos quantos dele fizerem uso.

O leitor interessado em aprender a utilizar um programa de computação, por exemplo o Maple, como ferramenta na aprendizagem da Álgebra Linear e Geometria Analítica pode consultar uma das referências [1, 3, 5, 7].

Para desenvolver a capacidade do estudante de pensar por si mesmo em termos das novas definições, incluímos no final de cada seção uma extensa lista de exercícios, onde a maioria dos exercícios dessas listas foram selecionados dos livros citados no final do texto. Devemos, porém, alertar aos leitores que os exercícios variam muito em grau de dificuldade, sendo assim, não é necessário resolver todos numa primeira leitura.

No capítulo 1 apresentaremos as principais definições e resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares que serão necessárias para o desenvolvimento deste texto.

No capítulo 2 apresentaremos definições abstratas de espaços vetoriais e subespaços, combinações lineares, conjuntos linearmente independentes e dependentes, bases e dimensão, coordenadas de um vetor e mudança de bases. Esse capítulo envolve o desenvolvimento axiomático de vetores, sendo assim, exigindo maior esforço no início do curso tanto do professor quanto do estudante.

No capítulo 3 apresentaremos transformações lineares, núcleo e imagem de uma transformação linear e representação matricial. A representação matricial proporciona um modo elegante de desenvolver a álgebra das matrizes e a geometria das transformações lineares.

No capítulo 4 apresentaremos as definições de autovalores e autovetores de um operador linear, o polinômio característico e minimal de um operador linear e operadores diagonalizáveis. Esse capítulo inicia o estudo das relações de equivalências e das formas canônicas, úteis nas aplicações que envolvem representações matriciais.

No capítulo 5 apresentaremos definições abstratas de espaços com produto interno, processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e o complemento ortogonal. Esse capítulo introduz a noção de conceitos métricos sobre um espaço vetorial qualquer.

No capítulo 6 apresentaremos operadores lineares especiais tais como: operador adjunto, ortogonais e simétricos e usá-los-emos para classificar as quádricas.

Finalmente, no capítulo 7 apresentaremos a forma canônica de Jordan, a qual é uma ferramenta poderosa no estudo das relações de equivalência de matrizes.

Agradecemos aos colegas e alunos do Departamento de Matemática que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em particular, ao professor Inaldo Barbosa de Albuquerque, pela leitura criteriosa e sugestões.

Antônio de Andrade e Silva.

Sumário

Prefácio **v**

1 Pré-Requisitos **1**

1.1 Corpos 1

1.2 Matrizes 3

1.3 Sistemas de Equações Lineares 13

2 Espaços Vetoriais **23**

2.1 Espaços Vetoriais 23

2.2 Subespaços Vetoriais 32

2.3 Combinação Linear 40

2.4 Dependência e Independência Linear 45

2.5 Bases e Dimensão 50

2.6 Mudança de Bases 62

3 Transformações Lineares **71**

3.1 Transformações Lineares 71

3.2 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear 82

3.3 Transformações Lineares e Matrizes 97

3.4 Funcionais Lineares 116

4 Formas Canônicas Elementares **117**

4.1 Autovalores e Autovetores 117

4.2 Operadores Diagonalizáveis 126

4.3 Polinômio Minimal 134

5 Espaços com Produto Interno **149**

5.1 Produto Interno 149

5.2 Norma 157

5.3 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt 163

5.4 Complementar Ortogonal 167

6 Operadores Especiais **175**

6.1 Operador Adjunto 175

6.2 Operadores Ortogonais e Simétricos 182

6.3 Quádricas 188

7 Forma Canônica de Jordan **197**

7.1 Teorema da Decomposição Primária 197

7.2 Operadores Nilpotentes 205

7.3 Forma Canônica de Jordan 212

Bibliografia **219**

Índice **220**

Capítulo 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados sobre matrizes e sistemas de equações lineares que serão necessárias para o desenvolvimento deste texto. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [7, 9].

1.1 Corpos

Um *corpo* é um conjunto F com duas operações

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array},$$

chamadas de *adição* e *multiplicação*, tais que as seguintes propriedades valem:

1. A adição é associativa,

   $$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

   para todos $x, y, z \in F$.

2. Existe um único elemento 0 (zero) em F tal que

   $$x + 0 = 0 + x = x,$$

   para todo $x \in F$.

3. A cada x em F corresponde um único elemento $-x$ (oposto) em F tal que

   $$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. A adição é comutativa,

   $$x + y = y + x,$$

   para todos $x, y \in F$.

5. A multiplicação é associativa,
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$
para todos $x, y, z \in F$.

6. Existe um único elemento 1 (um) em F tal que
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$
para todo $x \in F$.

7. A cada x em $F - \{0\}$ corresponde um único elemento x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ (inverso) em F tal que
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

8. A multiplicação é comutativa,
$$x \cdot y = y \cdot x,$$
para todos $x, y \in F$.

9. A multiplicação é distributiva com relação à adição,
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$
para todos $x, y, z \in F$.

Exemplo 1.1 *O conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$, *dos reais* $\mathbb{R}$ *e dos complexos* $\mathbb{C}$, *com as operações usuais de adição e multiplicação são corpos.*

Exemplo 1.2 *Seja* $F = GF(2) = \{0, 1\}$. *Definimos uma adição e uma multiplicação em* F *pelas tábuas*:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

É fácil verificar que F *com essas duas operações é um corpo, chamado de* corpo de Galois.

Proposição 1.3 *Sejam* $a, b, x \in \mathbb{R}$. *Então*:

1. *Se* $a + x = a$, *então* $x = 0$.

2. *Se* $b \neq 0$ *e* $b \cdot x = b$, *então* $x = 1$.

3. *Se* $a + b = 0$, *então* $b = -a$.

4. *A equação* $a + x = b$ *tem uma única solução* $x = (-a) + b$.

5. *Se* $a \neq 0$, *a equação* $a \cdot x = b$ *tem uma única solução* $x = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}$.

6. $x \cdot 0 = 0$.

7. $-x = (-1)x$.

8. $-(a+b) = (-a) + (-b)$.

9. $-(-x) = x$.

10. $(-1)(-1) = 1$.

Prova. Vamos provar apenas o item (8).

$$-(a+b) = (-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b).$$

■

Sejam F e K corpos. Dizemos que K é uma *extensão de corpos* de F se $F \subseteq K$ e, nesse caso, F é um *subcorpo* de K. Por exemplo, $\mathbb{R}$ é uma extensão de corpos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

1.2 Matrizes

Uma *matriz* $m \times n$ $\mathbf{A}$ sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ é um arranjo retangular com m linhas e n colunas da forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Usaremos, também, a notação

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

ou, simplesmente, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

A i-ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ é matriz $1 \times n$

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

e a j-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$ é matriz $m \times 1$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

O símbolo a_{ij} significa o elemento da matriz $\mathbf{A}$ que está na i-ésima linha e j-ésima coluna e será chamado de *entrada* da matriz $\mathbf{A}$. O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ será denotado por $M(m, n)$ ou $\mathbb{R}^{m\times n}$. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é chamada de *matriz quadrada* se $m = n$. Nesse caso, as entradas

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \text{ e } a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{(n-1)n}$$

formam a *diagonal principal* e a *superdiagonal* de $\mathbf{A}$, respectivamente.

Dizemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é uma *matriz diagonal* se

$$a_{ij} = 0, \ \ i \neq j.$$

Em particular, dizemos que a matriz diagonal $\mathbf{A}$ é uma *matriz identidade* se

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e será denotada por $\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}]$, onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*. A matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, é chamada de *matriz nula* e será denotada por $\mathbf{0}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é *igual* a $\mathbf{B}$, em símbolos $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se, e somente se,

$$a_{ij} = b_{ij}, \ \ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ munido com as operações de adição

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{A} = [aa_{ij}], \ \ \forall \ a \in \mathbb{R},$$

possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Existe $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

3. Para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, existe $-\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, onde $-\mathbf{A} = [-a_{ij}]$.

4. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

5. $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

6. $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

7. $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.

8. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$. O *produto* de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$, em símbolos, $\mathbf{AB}$, é definido como

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}[\ \mathbf{C}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_p\ ] = [\ \mathbf{AC}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{AC}_p\ ] = [c_{ij}],$$

onde $\mathbf{C}_j$ é a j-ésima coluna da matriz $\mathbf{B}$ e

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ \ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq p.$$

Note que $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m\times p}$. O produto de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

4. $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$ e $\mathbf{OB} = \mathbf{O}$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{B}, \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A *matriz transposta* de $\mathbf{A}$ é a matriz obtida escrevendo-se as linhas da matriz $\mathbf{A}$ como colunas, ou seja,

$$\mathbf{A}^t = [a_{ji}],\ \ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

A transposta de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. $(a\mathbf{A})^t = a\mathbf{A}^t$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.

3. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e as *matrizes unitárias* $\mathbf{E}_{ij} = [e_{pq}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, onde

$$e_{pq} = \delta_{pi}\delta_{qj} = \begin{cases} 1 & \text{se } (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{se } (p,q) \neq (i,j). \end{cases}$$

Por exemplo, quando $m = n = 2$, obtemos

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então é fácil verificar que (quando o produto é definido)

1. $$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

2. $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{pq} = \delta_{jp}\mathbf{E}_{iq}$.

3. $\mathbf{AE}_{pq} = \sum_{i=1}^{m} a_{ip}\mathbf{E}_{iq}$, isto é, $\mathbf{AE}_{pq}$ é a matriz cuja q-ésima coluna é igual a p-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$ e as demais zeros.

4. $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{qj}\mathbf{E}_{pj}$, isto é, $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{A}$ é a matriz cuja p-ésima linha é igual a q-ésima linha da matriz $\mathbf{A}$ e as demais zeros.

5. $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{AE}_{rs} = a_{qr}\mathbf{E}_{ps}$, isto é, $\mathbf{E}_{pq}\mathbf{AE}_{rs}$ é a matriz cuja (p,s)-ésima entrada é igual a a_{qr} e as demais zeros.

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O *determinante* da matriz $\mathbf{A}$ é definido por

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

onde S_n é o conjunto de todas as permutações do conjunto

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

e $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^N$, com N igual ao número de inversões (transposições) necessárias para trazer de volta o conjunto

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$$

a sua ordem natural. Assim, $\det \mathbf{A}$ é a soma de $n!$ termos, onde o sinal está bem definido, e qualquer termo tem n elementos, um e somente um, de cada linha e coluna de $\mathbf{A}$.

Uma permutação $\sigma \in S_n$ pode ser escrita sob a forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

onde a ordem das colunas não importa. Por exemplo, para $n = 3$, temos que os seis elementos de S_3 são:

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \sigma\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma^2\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad +(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \end{aligned}$$

Observação 1.4 *Uma maneira alternativa para determinar o número de inversões de uma permutação*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

é ilustrado no esquema da Figura 1.1*. Nesse caso, o número de cruzamentos corresponde ao número de inversões de* σ*.*

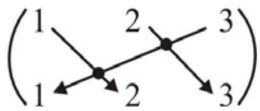


Figura 1.1: Número de inversões de σ.

Portanto, σ *admite duas inversões. Esse procedimento vale para* S_n*.*

Proposição 1.5 *Sejam* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{L}_i$ *a* i*-ésima linha de* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{R}_i = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$ *uma matriz fixada.*

1. $\det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}.$

2. $\det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ a\mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{bmatrix}, \ \forall \ a \in \mathbb{R}.$

3. *Se* $\mathbf{L}_i = \mathbf{O}$*, então* $\det \mathbf{A} = 0$*.*

4. *Se duas linhas da matriz* $\mathbf{A}$ *são iguais (ou* $L_i = aL_j$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$*, com* $i < j$*), então* $\det \mathbf{A} = 0$*.*

5. $\det \mathbf{A}^t = \det \mathbf{A}$*.*

6. *Se* $\mathbf{B}$ *é a matriz obtida de* $\mathbf{A}$ *trocando-se a* i*-ésima linha pela* j*-ésima linha, então* $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$*.*

Prova. Vamos provar apenas os itens (1), (4) e (5) Para provar (1), basta notar que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + r_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots r_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

(4) Suponhamos que $L_i = L_j$ com $i < j$. Seja $\tau \in S_n$ a permutação definida por $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(x) = x$, para todo $x \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i, j\}$. Então pode ser provado que

$$\operatorname{sgn} \tau = -1 \text{ e } \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn} \sigma, \ \forall \ \sigma \in S_n.$$

Sejam

$$X = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) < \sigma(j)\} \text{ e } Y = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Então a função $f : X \to Y$ definida por $f(\sigma) = \sigma \circ \tau$ é bijetora. De fato, dado $\varphi \in Y$ existe $\sigma = \varphi \circ \tau \in X$ tal que $f(\sigma) = (\varphi \circ \tau) \circ \tau = \varphi$, pois $\tau \circ \tau = I$, isto é, f é sobrejetora. Agora, se $f(\sigma) = f(\varphi)$, então

$$\sigma = \sigma \circ I = \sigma \circ (\tau \circ \tau) = (\sigma \circ \tau) \circ \tau = (\varphi \circ \tau) \circ \tau = \varphi \circ (\tau \circ \tau) = \varphi \circ I = \varphi,$$

ou seja, f é injetora. Portanto,

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) a_{1\sigma(\tau(1))} \cdots a_{n\sigma(\tau(n))} \\
&= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma \left(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in X} \operatorname{sgn} \sigma \left(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $L_i = L_j$. Finalmente, para provar (5), note que

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\varphi(1)\sigma(\varphi(1))} \cdots a_{\varphi(n)\sigma(\varphi(n))}, \ \forall \ \sigma, \varphi \in S_n.$$

Assim, em particular, para $\varphi = \sigma^{-1}$ e $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \det \mathbf{A}^t.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.6 (Teorema de Binet) *Sejam* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Então*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

■

Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Então

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Mais geralmente, pode ser provado que

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}), \;\; i = 1, \ldots, n.$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a matriz obtida eliminando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$. O escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ é chamado o *cofator* do termo a_{ij} no $\det \mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada a *matriz dos cofatores* da matriz $\mathbf{A}$.

Teorema 1.7 *Seja* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Então*

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} = \operatorname{adj} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n,$$

onde $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ *é a transposta da matriz dos cofatores de* $\mathbf{A}$, *a qual é chamada de* adjunta clássica *de* $\mathbf{A}$.

Prova. Seja $\mathbf{B} = \operatorname{adj} \mathbf{A} = [b_{ij}]$, de modo que $b_{ij} = c_{ji} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$, para todos i, j. Então

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} = \mathbf{AB} = [d_{ij}], \;\text{ onde }\; d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} \det(\mathbf{A}_{jk}).$$

Agora, seja $\widehat{\mathbf{A}} = [\widehat{a}_{ij}]$ a matriz obtida de $\mathbf{A}$ substituindo-se a j-ésima linha pela i-ésima linha (note que se $i = j$, então $\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$). Então $\widehat{a}_{jk} = a_{ik}$, para todo k. Logo, $\widehat{\mathbf{A}}_{jk} = \mathbf{A}_{jk}$, para todo k, pois a j-ésima linha é eliminada para obter essas matrizes. Assim,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{a}_{jk} (-1)^{k+j} \det(\widehat{\mathbf{A}}_{jk}) = \det(\widehat{\mathbf{A}}) = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

pois $\widehat{\mathbf{A}}$ tem duas linhas iguais quando $i \neq j$. De modo análogo trabalha com $\mathbf{BA}$. Portanto,

$$\mathbf{A} \cdot \operatorname{adj} \mathbf{A} = \operatorname{adj} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n$$

■

Teorema 1.8 (Regra de Cramer) *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ *as colunas da matriz* $\mathbf{A}$. *Se existirem* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *tais que* $\mathbf{B} = x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_n\mathbf{C}_n$, *então*

$$x_j \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Prova. Aplicando, indutivamente, os itens (1) e (3) da Proposição 1.5 (pelo item (5) continua válido para colunas), obtemos

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{C}_k & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{C}_k & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \\ &= x_j \det \mathbf{A}, \end{aligned}$$

pois as outras matrizes têm duas colunas iguais quando $k \neq j$. ■

Uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é *invertível* ou *não-singular* se existir uma matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

Caso contrário, $\mathbf{A}$ é *não-invertível* ou *singular*. Vamos denotar a matriz inversa de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^{-1}$. A inversa de matrizes possui as seguintes propriedades:

1. Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são invertíveis, então $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Nesse caso,

   $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}.$$

   Em particular, se

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

   então

   $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *equivalentes* se existirem matrizes invertíveis $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}^{-1}.$$

Em particular, se $m = n$ e $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$, dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *semelhantes* ou *conjugadas*.

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *congruentes* se existir uma matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^t\mathbf{AP}.$$

Uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada uma *matriz triangular superior* (*inferior*) se

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i > j \ \ (a_{ij} = 0, \text{ para } i < j).$$

Note que se $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz triangular, então

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Mostre que existem matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tais que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   Existe uma matriz $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ com $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$? Existe uma matriz $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$ com $\mathbf{CA} = \mathbf{O}$?

4. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível. Mostre que

$$\left(\mathbf{PAP}^{-1}\right)^m = \mathbf{PA}^m\mathbf{P}^{-1}, \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

5. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det \mathbf{A}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

6. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, onde $b_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}$. Mostre que

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}.$$

7. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível. Mostre que $\det(\mathbf{PAP}^{-1}) = \det \mathbf{A}$.

8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Mostre que $\det \mathbf{A} = 0$ ou $\det \mathbf{A} = 1$.

9. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que $\det \mathbf{A} = 0$.

10. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{I}_n + \mathbf{AB}$ seja invertível. Mostre que $\mathbf{I}_n + \mathbf{BA}$ é invertível e

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{I}_n + \mathbf{B}(\mathbf{I}_n + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}.$$

11. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{B}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{APA}^t + \mathbf{B}^{-1}$ sejam invertíveis. Mostre que $\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}^t\mathbf{BA}$ é invertível e

$$(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}^t\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{PA}^t(\mathbf{APA}^t + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{AP}.$$

12. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

   Mostre que $\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$. Se $\mathbf{A}$ é invertível, mostre que

$$\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}).$$

Em particular, se $\mathbf{AC} = \mathbf{CA}$, mostre que $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{CB})$. (Sugestão: Note que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.)$$

13. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Mostre que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{B} - \mathbf{BA}^m = m\mathbf{A}^{m-1}, \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

14. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O *traço* de $\mathbf{A}$ é definido por

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Mostre que:

(a) $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) $\operatorname{tr}(a\mathbf{A}) = a \operatorname{tr}(\mathbf{A})$, para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(d) $\operatorname{tr}(\mathbf{PAP}^{-1}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A})$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\mathbf{P}$ invertível.

(e) $\operatorname{tr}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) = 0$, para todas $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

15. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$, para toda matriz diagonal $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal.

16. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, para toda $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n$, para algum $a \in \mathbb{R}$. (Sugestão: Calcule $\mathbf{AE}_{ij} = \mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$.)

17. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma *matriz simétrica* se $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ e que $\mathbf{A}$ é uma *matriz anti-simétrica* se $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$. Mostre que se $\mathbf{A}$ é anti-simétrica e n é ímpar, então $\det \mathbf{A} = 0$.

18. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma *matriz ortogonal* se $\mathbf{AA}^t = \mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ Mostre que se $\mathbf{A}$ é ortogonal, então $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

19. Seja $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(\mathbf{AB}) = f(\mathbf{A})f(\mathbf{B}), \ \forall \ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

e existem $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $f(\mathbf{X}) \neq 0$ e $f(\mathbf{Y}) \neq 1$. Mostre que se $\mathbf{A}$ é invertível, então $f(\mathbf{A}) \neq 0$.

1.3 Sistemas de Equações Lineares

Um *sistema de equações lineares* com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \tag{1.1}$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Uma *solução* do sistema de equações lineares (1.1) é uma n-upla

$$\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_n) \text{ ou } \mathbf{Y} = [y_1, \ldots, y_n]$$

que satisfaz cada uma das m equações, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = b_i, i = 1, \ldots, m.$$

Observação 1.9 *Se*

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

dizemos que o sistema de equações lineares (1.1) *é um* sistema homogêneo*. Note que a n-upla*

$$(0, \ldots, 0)$$

é sempre uma solução do sistema homogêneo.

O sistema (1.1) pode ser escrito sob a forma matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \text{ ou } \mathbf{X}^t\mathbf{A}^t = \mathbf{B}^t,$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes. Nesse caso,

$$\mathbf{L}_1\mathbf{X} = b_1, \mathbf{L}_2\mathbf{X} = b_2, \ldots, \mathbf{L}_m\mathbf{X} = b_m, \tag{1.2}$$

onde

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, m.$$

O sistema de equações lineares (1.2) é chamado de *sistema compatível* se para qualquer escolha de $r_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\mathbf{L}_i = \mathbf{0},$$

então necessariamente

$$\sum_{i=1}^{m} r_i b_i = 0.$$

Caso contrário, ele é chamado de *sistema incompatível.*

Se o sistema de equações lineares (1.2) tem solução, então ele é compatível, pois se $\mathbf{Y}$ é uma solução do sistema e

$$\sum_{i=1}^{m} r_i\mathbf{L}_i = \mathbf{0},$$

então

$$\sum_{i=1}^{m} r_i b_i = \sum_{i=1}^{m} r_i(\mathbf{L}_i\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{m}(r_i\mathbf{L}_i)\mathbf{Y} = \left(\sum_{i=1}^{m} r_i\mathbf{L}_i\right)\mathbf{Y} = \mathbf{0Y} = 0.$$

A matriz associada ao sistema de equações lineares (1.1) ou (1.2)

$$\mathbf{A}' = [\ \mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{B}\ ] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz ampliada (aumentada) do sistema.*

Dizemos que dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se eles admitem as mesmas soluções.

Exemplo 1.10 *Vamos resolver o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

usando algumas operações sobre as linhas da matriz ampliada do sistema.

Solução. Considerando a matriz ampliada do sistema, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & 4 & -4 & \vdots & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + \frac{2}{3}L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 & & & = & \frac{7}{3} \\ & x_2 & & = & -\frac{1}{3} \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Logo,

$$(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -1)$$

é a única solução do sistema.

As operações usadas na matriz ampliada do sistema foram:

1. Permutação das i-ésima e j-ésima linhas. $(L_i \leftrightarrow L_j)$

2. Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não-nulo c. $(L_i \to cL_i,\ c \neq 0)$

3. Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais c vezes a j-ésima linha, $i \neq j$. $(L_i \to L_i + cL_j)$

essas operações são chamadas de *operações elementares sobre as linhas* da matriz $\mathbf{A}$. É fácil verificar que operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $\mathbf{A}'$ correspodem a efetuar *combinações lineares* das equações do sistema de equações lineares

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Observações 1.11 *1. Cada operação acima tem uma inversa do mesmo tipo*:

(a) $L_j \to L_i$ *é sua própria inversa.*

(b) $L_i \to cL_i$ *e* $c^{-1}L_i \to L_i$ *são inversas.*

(c) $L_i \to L_i + cL_j$ *e* $L_i + c^{-1}L_j \to L_i$ *são inversas.*

2. *Note, também, que as operações acima são equivalentes a:*

(a) $\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A}$, *onde* $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{I}_n - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}$.

(b) $\mathbf{S}_i(c)\mathbf{A}$, *onde* $\mathbf{S}_i(c) = \mathbf{I}_n + (c-1)\mathbf{E}_{ij}$.

(c) $\mathbf{V}_{ij}(c)\mathbf{A}$, *onde* $\mathbf{V}_{ij}(c) = \mathbf{I}_n + c\mathbf{E}_{ij}, i \neq j$.

Teorema 1.12 *Se um sistema de equações lineares é obtido de outro através de um número finito de operações elementares, então eles são equivalentes.*

Prova. É claro que basta provar que uma operação elementar sempre produz um sistema equivalente. As operações (1) e (2) são facilmente provadas. Suponhamos que a operação consiste na substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais c vezes a j-ésima linha com $i < j$. Então o sistema (1.2) pode ser escrito sob a forma

$$\mathbf{L}_1\mathbf{X} = b_1, \ldots, \mathbf{L}_{i-1}\mathbf{X} = b_{i-1}, (\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{X} = b_i + cb_j, \ldots, \mathbf{L}_j\mathbf{Y} = b_j, \ldots, \mathbf{L}_m\mathbf{X} = b_m. \quad (1.3)$$

Agora, se $\mathbf{Y}$ é solução do sistema (1.2), então é claro que $\mathbf{Y}$ também é solução do sistema (1.3). Reciprocamente, seja $\mathbf{Y}$ uma solução do sistema (1.3), de modo que, em particular,

$$(\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{Y} = b_i + cb_j \text{ e } \mathbf{L}_j\mathbf{Y} = b_j.$$

Como

$$(\mathbf{L}_i + c\mathbf{L}_j)\mathbf{Y} = \mathbf{L}_i\mathbf{Y} + c\mathbf{L}_j\mathbf{Y}$$

temos que

$$\mathbf{L}_i\mathbf{Y} = b_i$$

Portanto, $\mathbf{Y}$ é solução do sistema (1.2). ■

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}$ duas matrizes $m \times n$. Dizemos que $\mathbf{R}$ é *equivalente por linha* a $\mathbf{A}$ se $\mathbf{R}$ for obtida de $\mathbf{A}$ através de um número finito de operações elementares sobre as linhas da matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo 1.13 *As matrizes abaixo são equivalentes por linhas:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz $\mathbf{R}$ é *reduzida por linha à forma em escada* se:

1. O primeiro elemento não-nulo em cada linha não-nula de $\mathbf{R}$ for igual a 1.

2. Cada coluna de $\mathbf{R}$ que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha tem todos os outros elementos nulos.

3. Toda linha de $\mathbf{R}$ cujos elementos são todos nulos ocorre abaixo de todas as linhas que possuem um elemento não-nulo.

4. Se as linhas $i = 1, \ldots, r$, com $r \leq m$, são as linhas não-nulas de $\mathbf{R}$ e se o primeiro elemento não-nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_r.$$

Observação 1.14 *O primeiro elemento em qualquer linha de* $\mathbf{R}$ *na posição* (i, k_i) *é chamado de* pivô.

Exemplos 1.15 *1. A matriz*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

está na forma em escada.

2. A matriz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

não está na forma em escada, pois $k_1 = 1$*,* $k_2 = 3$ *e* $k_3 = 2$ *não implica que*

$$k_1 < k_2 < k_3.$$

Teorema 1.16 *Toda matriz* $m \times n$ *é equivalente por linha a uma matriz na forma em escada.* ■

Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e $\mathbf{R}$ a matriz $m \times n$ linha reduzida à forma em escada de $\mathbf{A}$. O *posto* (*linha*) de $\mathbf{A}$, em símbolos posto($\mathbf{A}$), é igual ao número de linhas não-nulas de $\mathbf{R}$. A *nulidade* de $\mathbf{A}$, em símbolos nul($\mathbf{A}$), é igual a

$$\text{nul}(\mathbf{A}) = n - \text{posto}(\mathbf{A}).$$

Exemplo 1.17 *Determine o posto e a nulidade da matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução. Reduzindo a matriz $\mathbf{A}$ à forma em escada

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix},$$

temos que o $\mathrm{posto}(\mathbf{A})=3$ e a $\mathrm{nul}(\mathbf{A})=4-3=1$.

Teorema 1.18 *Sejam $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas e $\mathbf{A}'$ sua matriz ampliada. Então o sistema tem solução se, e somente se,*

$$\mathrm{posto}(\mathbf{A})=\mathrm{posto}(\mathbf{A}')$$

ou, equivalentemente, a forma reduzida da matriz $\mathbf{A}'$ não contém uma linha da forma $(0,\ldots,0,b)$ com $b\neq 0$. ■

Observações 1.19 *1. Se* $\mathrm{posto}(\mathbf{A})=\mathrm{posto}(\mathbf{A}')$ *e* $\mathrm{posto}(\mathbf{A})=n$*, então o sistema tem uma única solução. Em particular, se $m=n$, então para determinar a solução do sistema basta transformar a matriz*

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{I}_n\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]$$

na matriz

$$[\ \mathbf{I}_n\ \vdots\ \mathbf{A}^{-1}\ \vdots\ \mathbf{X}\ ].$$

2. Se $\mathrm{posto}(\mathbf{A})=\mathrm{posto}(\mathbf{A}')$ *e* $\mathrm{posto}(\mathbf{A})<n$*, então o sistema tem infinitas soluções. Nesse caso, existem*

$$\mathrm{nul}(\mathbf{A})=n-\mathrm{posto}(\mathbf{A})$$

variáveis livres.

3. Se $\mathrm{posto}(\mathbf{A})<\mathrm{posto}(\mathbf{A}')$*, então o sistema não tem solução.*

4. Uma maneira alternativa de resolver o sistema $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ é considerando a matriz $\mathbf{A}$-associada

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ -\mathbf{B}^t & \vdots & \mathbf{O}^t \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ tem uma solução particular $\mathbf{X}_p$ se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t & \vdots & \mathbf{I}_n \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ -\mathbf{B}^t & \vdots & \mathbf{O}^t \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \mathbf{R}^t & \vdots & \mathbf{S} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{O}^t & \vdots & \mathbf{X}_p^t \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{R}^t$ *é a matriz linha reduzida à forma em escada de* $\mathbf{A}^t$. *Portanto, a solução geral do sistema é* $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_h$, *onde*

$$\mathbf{X}_h = \sum_{i=k+1}^{n} c_i \mathbf{s}_i, c_i \in \mathbb{R},$$

$k = \text{posto}(\mathbf{A}^t)$ *e* $\mathbf{s}_i$, $i = k+1, \ldots, n$, *são as linhas da matriz* $\mathbf{S}$. *Note que* $\mathbf{X}_h$ *é a solução do sistema homogêneo* $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$.

Exemplo 1.20 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ x + 8y - 6z = -7. \end{cases}$$

Solução. Vamos escalonar a matriz $\mathbf{A}$-associada

$$\left[\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -6 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & 5 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$\mathbf{X} = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right) + c\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right), \ \forall \ c \in \mathbb{R},$$

é a solução geral do sistema. Fazendo $c = 0$, temos que a solução particular do sistema é

$$\mathbf{X}_p = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$$

EXERCÍCIOS

---

1. Determine $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

   tenha infinitas soluções.

2. Seja o sistema
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_2 \\ \qquad 5x_2 - x_3 = b_3 \end{cases}.$$
Determine condições sobre b_1, b_2 e b_3, de modo que o sistema tenha solução.

3. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que exista uma matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Sejam
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
Determine uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, de modo que
$$\mathbf{XA} - 2\mathbf{X} + \mathbf{XB}^2 = \mathbf{C}^2 - \mathbf{XA} - \mathbf{XB}^2.$$

5. Seja $t \in \mathbb{R}$ fixado e considere os conjuntos
$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + tz = 2\}, V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 1\}, \\ W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - (1+t)y = t\}. \end{aligned}$$
Determine $U \cap V \cap W$. Dê uma interpretação geométrica desse problema.

6. Seja a matriz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$
Determine uma matriz $\mathbf{R}$ linha reduzida à forma em escada que seja linha equivalente a $\mathbf{A}$ e uma matriz 3×3 invertível $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{R} = \mathbf{PA}$. (Sugestão: Basta reduzir a matriz
$$[\ \mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}_3\ ] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\ \mathbf{R} \ \vdots \ \mathbf{P}\ ].$$
à forma em escada.)

7. Determine a inversa da matriz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$
(Sugestão: Basta reduzir a matriz
$$[\ \mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}_3\ ] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\ \mathbf{I}_3 \ \vdots \ \mathbf{A}^{-1}\ ]$$
à forma em escada.)

8. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $\mathbf{A}$ é equivalente $\mathbf{B}$ se $\mathbf{B}$ for obtida de $\mathbf{A}$ por uma seqüência finita de operações elementares por linha e coluna.

9. Seja
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$
Determine uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que
$$\mathbf{P}^t\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$
Note que $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ é diagonal. (Sugestão: Considere a matriz
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
agora aplique as operações de linhas e as correspondentes oparações de colunas para reduzir $\mathbf{B}$ à forma
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
continue até obter
$$[\ \mathbf{D}\ \vdots\ \mathbf{P}^t\ ].)$$

10. Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma
$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4,$$
de modo que
$$f + f' + f'' + f''' = 1.$$

11. Uma matriz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
é um *quadrado mágico de ordem* 3 se a soma das três linhas, a soma das três colunas e a soma das duas diagonais são todas iguais ao mesmo número s.

    (a) Reescreva as condições para um quadrado mágico como um sistema de 8 equações lineares nas variáveis s, a_i, b_i e c_i, $i = 1, 2, 3$ e resolva esse sistema.

(b) Mostre que $3b_2 = s$.

(c) Substitua as estrelas por números de modo que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ * & * & * \\ 2 & * & 4 \end{bmatrix}$$

seja um quadrado mágico.

12. Mostre que as matrizes do item (2) da Observação 1.11, possui as seguintes propriedades:

    (a) $\mathbf{P}_{ij}^2 = \mathbf{I}_n$.

    (b) $\mathbf{S}_i(c)\mathbf{S}_i(d) = \mathbf{S}_i(cd)$.

    (c) $\mathbf{S}_i(c)^{-1} = \mathbf{S}_i(c^{-1})$.

    (d) $\mathbf{V}_{ij}(c+d) = \mathbf{V}_{ij}(c)\mathbf{V}_{ij}(d)$.

    (e) $\mathbf{V}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{V}_{ij}(c^{-1})$.

13. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Mostre que se o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tem uma solução $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, então ele tem também uma solução $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

14. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j).$$

Esse determinante é conhecido como o *determinante de Vandermonde*. (Sugestão: Use indução em n e considere as operações elementares sobre colunas $C_{j+1} \to C_{j+1} - x_jC_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.)

15. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} = [(a-b)(a-c)(b-c)]^2,$$

onde $s_i = a^i + b^i + c^i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

O principal objetivo deste capítulo é levar o aluno a compreender o conceito de espaço vetorial de um ponto de vista axiomático, isto é, o conceito abstrato de espaço vetorial como objeto com uma estrutura algébrica específica. Além disso, veremos os conceitos de subespaços vetoriais, dependência e independência linear, bases e dimensão de um espaço vetorial e relações entre bases de um mesmo espaço vetorial.

2.1 Espaços Vetoriais

Um *espaço vetorial* sobre o corpo $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é um conjunto não-vazio V munido com duas operações: *adição*

$$\begin{array}{rccc} +: & V \times V & \to, & V \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{u}+\mathbf{v} \end{array}$$

e *multiplicação por escalar*

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (a, \mathbf{u}) & \mapsto & a\mathbf{u} \end{array}$$

tal que as seguintes propriedades valem:

1. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

3. Para cada $\mathbf{u} \in V$, existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

4. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

5. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$.

6. $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$.

7. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

8. $1 \cdot \mathbf{u}=\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

Observações 2.1 *1. Note que $\mathbb{R}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

2. Seja $\mathbf{w} = -\mathbf{u} + \mathbf{u}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{w} + \mathbf{w} &= (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u} + \mathbf{u}) = -\mathbf{u} + ([\mathbf{u} + (-\mathbf{u})] + \mathbf{u}) \\ &= -\mathbf{u} + (\mathbf{0} + \mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = [\mathbf{w} + \mathbf{w}] + (-\mathbf{w}) = \mathbf{w} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] \\ &= \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Portanto, $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{u} \in V$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \mathbf{u} &= [\mathbf{u} + (-\mathbf{u})] + \mathbf{u} = \mathbf{u} + [-\mathbf{u} + \mathbf{u}] \\ &= \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \end{aligned}$$

isto é, $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

3. Na Proposição 2.8, provaremos que $-\mathbf{u} = -1 \cdot \mathbf{u}$ e podemos escrever

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}),$$

para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, para representar a diferença entre elementos de V. Os elementos de V serão chamados, por conveniência, de vetores.

4. As propriedades associativa e comutativa da adição de vetores implicam que a soma de um certo número de vetores é independente da maneira pela qual esses vetores são combinados ou associados. Por exemplo, se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{t}$ são vetores quaisquer em V, então

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{w} + \mathbf{t}) = [\mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})] + \mathbf{t}$$

e essa pode ser escrita sem confusão como

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{t}.$$

Exemplo 2.2 *Seja*

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n) \in V$, então V, com as operações de adição

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{u} = (ax_1, \dots, ax_n),$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. O leitor que tenha dificuldade em trabalhar com o caso geral pode iniciar esse exemplo com $n = 2$ ou $n = 3$.

1. Dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ e $\mathbf{w} = (z_1, \ldots, z_n) \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \\
&= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

2. Dado $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, devemos encontrar $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$. Logo,

$$(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow x_i + y_i = x_i, i = 1, \ldots, n.$$

Assim, $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$. Portanto, existe $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

3. Dado $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, devemos encontrar $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Logo,

$$(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (0, \ldots, 0) \Rightarrow x_i + y_i = 0, i = 1, \ldots, n.$$

Assim, $y_i = -x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto, existe $-\mathbf{u} = (-x_1, \ldots, -x_n) \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

4. Dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = \mathbf{v} + \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

5. Dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
a(b\mathbf{u}) &= a(bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) = (ab)\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

6. Dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
(a + b)\mathbf{u} &= ((a + b)x_1, \ldots, (a + b)x_n) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= (ax_1 + bx_1, \ldots, ax_n + bx_n) \\
&= (ax_1, \ldots, ax_n) + (bx_1, \ldots, bx_n) \\
&= a\mathbf{u} + b\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

7. Dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= a(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \\ &= (a(x_1+y_1), \ldots, a(x_n+y_n)) \text{ em } \mathbb{R} \\ &= (ax_1+ay_1, \ldots, ax_n+ay_n) \\ &= (ax_1, \ldots, ax_n)+(ay_1, \ldots, ay_n) \\ &= a\mathbf{u}+a\mathbf{v}. \end{aligned}$$

8. Dado $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, temos que

$$\begin{aligned} 1 \cdot \mathbf{u} &= (1 \cdot x_1, \ldots, 1 \cdot x_n) \text{ em } \mathbb{R} \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \\ &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3 *Seja V o conjunto de todas as matrizes $m \times n$, isto é,*

$$V = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\}.$$

Se $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in V$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in V$, então V, com as operações de adição

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}]$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{A} = [aa_{ij}],$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Note que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1\times n}$.

Solução. Fica como um exercício.

Exemplo 2.4 *Seja*

$$V = P_n(\mathbb{R}) = \{p : p = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \ \ a_i \in \mathbb{R}\}.$$

o conjunto de polinômios com coeficientes reais e grau menor do que ou igual a n. Se $p, q \in V$, então V, com as operações de adição $p+q$ dada por

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x)$$

e multiplicação por escalar ap dada por

$$(ap)(x) = ap(x),$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Fica como um exercício.

Exemplo 2.5 *Sejam S um conjunto não-vazio e*

$$V = \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \{f : S \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}.$$

o conjunto de todas as funções de valores reais. Se $f \in V$ e $g \in V$, então V, com as operações de adição $f + g$ dada por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall \ x \in S,$$

e multiplicação por escalar af dada por

$$(af)(x) = af(x), \ \forall \ x \in S,$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. (1) Dados $f, g, h \in V$. Como a adição em $\mathbb{R}$ é associativa temos que

$$\begin{aligned}
[f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\
&= f(x) + [g(x) + h(x)] \text{ em } \mathbb{R} \\
&= [f(x) + g(x)] + h(x) \\
&= (f + g)(x) + h(x) \\
&= [(f + g) + h](x), \ \forall \ x \in S.
\end{aligned}$$

Portanto, $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(2) Seja $\mathbf{0}$ a função nula, isto é, $\mathbf{0}(x) = 0$, para todo $x \in S$. Então

$$\begin{aligned}
(f + \mathbf{0})(x) &= f(x) + \mathbf{0}(x) \\
&= f(x) + 0 \text{ em } \mathbb{R} \\
&= f(x), \ \forall \ x \in S.
\end{aligned}$$

Portanto, $f + \mathbf{0} = f$, para todo $f \in V$.

3. Seja $-f$ a função definida por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in S$. Então

$$\begin{aligned}
(f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\
&= f(x) - f(x) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= 0, \ \forall \ x \in S.
\end{aligned}$$

Portanto, $f + (-f) = 0$, para todo $f \in V$,

(4) Dados $f, g \in V$. Como a adição em $\mathbb{R}$ é comutativa temos que

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \text{ em } \mathbb{R} \\
&= g(x) + f(x) \\
&= (g + f)(x), \ \forall \ x \in S.
\end{aligned}$$

Portanto, $f + g = g + f$.

(5) Dados $f \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Como a multiplicação em $\mathbb{R}$ é associativa temos que

$$\begin{aligned}[a(bf)](x) &= a[(bf)(x)] \\ &= a[bf(x)] \text{ em } \mathbb{R} \\ &= (ab)f(x) \\ &= [(ab)f](x), \ \forall \ x \in S.\end{aligned}$$

Portanto, $a(bf) = (ab)f$.

(6) Dados $f \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Como a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ são distributivas temos que

$$\begin{aligned}[(a+b)f](x) &= (a+b)f(x) \text{ em } \mathbb{R} \\ &= af(x) + bf(x) \\ &= (af)(x) + (bf)(x) \\ &= [af + bf](x), \ \forall \ x \in S.\end{aligned}$$

Portanto, $(a + b)f = af + bf$.

(7) Dados $f, g \in V$ e $a \in \mathbb{R}$. Como a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ são distributivas temos que

$$\begin{aligned}[a(f+g)](x) &= a(f+g)(x) \\ &= a[f(x) + g(x)] \text{ em } \mathbb{R} \\ &= af(x) + ag(x) \\ &= (af)(x) + (ag)(x) \\ &= [af + ag](x), \ \forall \ x \in S.\end{aligned}$$

Portanto, $a(f + g) = af + ag$.

(8) Dado $f \in V$, temos que

$$\begin{aligned}(1 \cdot f)(x) &= 1 \cdot f(x) \text{ em } \mathbb{R} \\ &= f(x), \ \forall \ x \in S.\end{aligned}$$

Portanto, $1 \cdot f = f$.

Exemplo 2.6 *Sejam*

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}, \ \ \mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V \ \ e \ \mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V.$$

Verifique se V com as operações de adição

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{u} = (ax_1, x_2)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. É claro que a operação de adição satisfaz as propriedades de (1) a (4). Assim, devemos verificar as propriedades relativas à multiplicação por escalar. Note que

$$(a+b)\mathbf{u} = ((a+b)x_1, x_2) = (ax_1 + bx_1, x_2) \text{ e } a\mathbf{u} + b\mathbf{u} = (ax_1 + bx_1, 2x_2).$$

Logo,

$$(a+b)\mathbf{u} \neq a\mathbf{u} + b\mathbf{u},$$

pois se $x_2 \neq 0$, então $x_2 \neq 2x_2$. Portanto, V não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.7 *Sejam*

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}, \ \mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V \ \text{ e } \ \mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V.$$

Verifique se V com as operações de adição

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação por escalar

$$a\mathbf{u} = (ax_1 - a + 1, ax_2)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Fica como um exercício..

Proposição 2.8 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Então:*

1. *Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro).*

2. *Cada vetor $\mathbf{u} \in V$ admite um único vetor simétrico $-\mathbf{u}$.*

3. *Existe um único $\mathbf{x} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.*

4. $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$, *para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0} \in V$.*

5. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *para todo $\mathbf{u} \in V$ e $0 \in \mathbb{R}$.*

6. *Se $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$, então $a = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$.*

7. $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$, *para todo $\mathbf{u} \in V$.*

8. $(-a)\mathbf{u} = a(-\mathbf{u}) = -(a\mathbf{u})$, *para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$.*

9. *Se $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n$, onde $\mathbf{u}_i \in V$ e $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, então*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{u}_n \text{ e } a\mathbf{u} = (ax_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (ax_n)\mathbf{u}_n.$$

Prova. Vamos provar apenas os itens (1) e (4). Suponhamos que exista outro vetor $\mathbf{0}' \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$. Então

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

Como $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$, temos, em particular, que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Logo,

$$\begin{aligned} a\mathbf{0} &= a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \\ &= a\mathbf{0} + a\mathbf{0}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo item (1), $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Seja
$$V = \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$
o conjunto dos números complexos. Mostre que V com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (3ax_2, -ax_1),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (a^2x_1, a^2x_2),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

5. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (5ax_1, 5ax_2),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

6. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V, com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (ax_1, 0),$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

7. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Verifique se V com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (0, \ldots, 0)$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Seja
$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = ia, i = 1, \ldots, n, \text{ e } a \in \mathbb{R}\}.$$
Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Verifique se V com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (ax_1, \ldots, ax_n)$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

9. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Verifique se V com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (ax_1, \ldots, ax_n)$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

10. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$, então V com as operações de adição
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$
e multiplicação por escalar
$$a\mathbf{u} = (-ax_1, -ax_2)$$
é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

11. Mostre que a propriedade de comutatividade para a adição de vetores é redundante, isto é, pode ser provada a partir das outras propriedades. (Sugestão: Desenvolva $(1 + 1)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ de duas maneiras.)

2.2 Subespaços Vetoriais

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subconjunto de V. Dizemos que W é um *subespaço* (*vetorial*) de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $W \neq \emptyset$.

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$.

3. $a\mathbf{u} \in W$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in W$.

Observações 2.9 *1. Qualquer subespaço W de V contém o vetor nulo $\mathbf{0}$, pois quando $a = 0$, temos que*

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in W.$$

2. Pode ser provado que, se admitirmos essas duas propriedades em W, as oito propriedades de espaço vetorial são válidas em W. Dessa forma, W é também um espaço vetorial com as propriedades herdadas de V.

3. Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços, a saber, $\{\mathbf{0}\}$ e V, chamados de subespaços triviais *ou* impróprios. *Os demais subespaços de V são chamados de* subespaços não-triviais *ou* próprios.

Exemplo 2.10 *Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e*

$$\begin{aligned} W &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in V : x_1 = 0\} \\ &= \{(0, x_2, \ldots, x_n) : x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então W é um subespaço de V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in W.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ temos que

$$\mathbf{u} = (0, x_2, \ldots, x_n) \text{ e } \mathbf{v} = (0, y_2, \ldots, y_n)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (0 + 0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (0, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} &= (a0, ax_2, \ldots, ax_n) \\ &= (0, ax_2, \ldots, ax_n) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.11 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ *e*

$$W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}\}$$

o conjunto das matrizes simétricas. Então W *é um subespaço de* V*.*

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{O}^t = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{O} \in W.$$

Dados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in W$ temos que

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{B}^t = \mathbf{B}.$$

Logo,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = \mathbf{A}+\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{B} \in W$$

e

$$(a\mathbf{A})^t = a\mathbf{A}^t = a\mathbf{A} \Rightarrow a\mathbf{A} \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.12 *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *uma matriz fixada,* $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$ *e*

$$W = \{\mathbf{X} \in V : \mathbf{AX} = \mathbf{O}\}.$$

o conjunto solução do sistema homogêneo $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$*. Então* W *é um subespaço de* V*.*

Solução. Fica como um exercício.

Exemplo 2.13 *Sejam* $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todas as funções reais e*

$$W = \{f \in V : f(-x) = f(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto das funções pares. Então W *é um subespaço de* V*.*

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0}(-x) = 0 = \mathbf{0}(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \Rightarrow \mathbf{0} \in W.$$

Dados f, $g \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como f, $g \in W$ temos que

$$f(x) = f(-x) \text{ e } g(x) = g(-x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= (f+g)(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \Rightarrow f+g \in W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (af)(-x) &= af(-x) = af(x) \\ &= (af)(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \Rightarrow af \in W. \end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.14 *Sejam* $V = P_n(\mathbb{R})$ *com* $n \geq 2$ *e*

$$W = \{p \in V : p(1) = p(7) = 0\}.$$

Então W *é um subespaço de* V.

Solução. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0}(1) = \mathbf{0}(7) = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in W.$$

Dados p, $q \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como p, $q \in W$ temos que

$$p(1) = p(7) = 0 \text{ e } q(1) = q(7) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(p+q)(1) &= p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0 \text{ e} \\
(p+q)(7) &= p(7) + q(7) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p + q \in W
\end{aligned}$$

e

$$(ap)(1) = ap(1) = a \cdot 0 = 0 \text{ e } (ap)(7) = ap(7) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow ap \in W.$$

Portanto, W é um subespaço de V.

Exemplo 2.15 *Sejam* $V = \mathbb{R}^n$ *e*

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V : x_2 = x_1 + 1\}.$$

Então W *não é um subespaço de* V*, pois*

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \notin W.$$

Exemplo 2.16 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e*

$$W = \{(x_1, x_2) \in V : x_2 = |x_1|\}.$$

Então W *não é um subespaço de* V*, pois* $\mathbf{u} = (-1, 1) \in W$ *e* $\mathbf{v} = (2, 2) \in W$ *mas*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 3) \notin W.$$

Note que $\mathbf{0} = (0, 0) \in W$*. Portanto,* $\mathbf{0} \in W$ *é condição necessária mas não suficiente para que* W *seja um subespaço de* V*.*

Teorema 2.17 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Se* W_1 *e* W_2 *são subespaços de* V*, então* $W_1 \cap W_2$ *é um subespaço de* V*.*

Prova. É claro que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} \in W_1 \text{ e } \mathbf{0} \in W_2 \Rightarrow \mathbf{0} \in W_1 \cap W_2.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ temos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$. Assim, por hipótese,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1, \ \ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$$

e

$$a\mathbf{u} \in W_1, \ \ a\mathbf{u} \in W_2.$$

Logo,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2 \text{ e } a\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2.$$

Portanto, $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V. ■

Exemplo 2.18 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = 0\}$$

subespaços de V (*prove isto*!). *Determine* $W_1 \cap W_2$.

Solução. Dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$, obtemos $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$. Logo, $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ se, e somente se, $x = y = 0$ e z qualquer. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in V : x = y = 0\}.$$

Exemplo 2.19 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in V : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in V : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

subespaços de V (*prove isto*!). *Determine* $W_1 \cap W_2$.

Solução. Dado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2,$$

temos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_2.$$

Logo, $d = 0$, $b = 0$ e $c = 0$. Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$$

se, e somente se, $b = c = d = 0$ e a qualquer. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pergunta. $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V? A resposta dessa pergunta é, em geral, não. De fato, sejam $V = \mathbb{R}^2$,

$$W_1 = \{(x, y) \in V : y = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y) \in V : x = 0\}$$

subespaços de V (prove isto!). Então $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V, pois

$$\mathbf{u} = (1, 0) \in W_1 \cup W_2 \text{ e } \mathbf{v} = (0, 1) \in W_1 \cup W_2$$

mas

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2.$$

Teorema 2.20 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 \in W_1 \textit{ e } \mathbf{u}_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V. Note que $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

Prova. Como $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$ temos que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$. Logo, $W_1 + W_2 \neq \emptyset$. Agora, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ temos que existem $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ e $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in W_2$ tais que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Assim, por hipótese,

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in W_1, \ \ \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \in W_2$$

e

$$a\mathbf{u}_1 \in W_1, \ \ a\mathbf{u}_2 \in W_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

e

$$a\mathbf{u} = a(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = a\mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 \in W_1 + W_2.$$

Portanto, $W_1 + W_2$ é um subespaço de V. ■

Exemplo 2.21 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$,*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \textit{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = z = 0\}$$

subespaços de V (prove isto!). Determine $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

Solução. Dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$, obtemos $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_2$. Logo, $x = 0$ e $y = z = 0$. Portanto, $\mathbf{u} = (x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ se, e somente se, $x = y = z = 0$. Assim,

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Agora, dado $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, existem $\mathbf{u}_1 = (0, y, z) \in W_1$ e $\mathbf{u}_2 = (x, 0, 0) \in W_2$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, tais que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x, y, z).$$

Portanto,

$$W_1 + W_2 = V.$$

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V. Dizemos que V é decomposto em *soma direta* de W_1 e W_2, em símbolos $V = W_1 \oplus W_2$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $V = W_1 + W_2$.
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Exemplo 2.22 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : y = z = 0\}$$

subespaços de V*. Então, pelo Exemplo* 2.21*,* $V = W_1 \oplus W_2$*.*

Exemplo 2.23 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$W_1 = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}\} \text{ e } W_2 = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = -\mathbf{A}\}$$

subespaços de V*. Mostre que* $V = W_1 \oplus W_2$*.*

Solução. Dado $\mathbf{A} \in W_1 \cap W_2$, temos que $\mathbf{A} \in W_1$ e $\mathbf{A} \in W_2$. Logo,

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{A}^t = -\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A} \Rightarrow 2\mathbf{A} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{O}\}$. Agora, dado $\mathbf{A} \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 1 \cdot \mathbf{A} \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^t - \frac{1}{2}\mathbf{A}^t + \frac{1}{2}\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^t).
\end{aligned}$$

É fácil verificar que
$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^t) \in W_1 \text{ e } \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^t) \in W_2.$$
Portanto, $V = W_1 + W_2$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{(x,y,z) \in V : x+y+z=0\}$.

   (b) $W = \{(x,y,z) \in V : x \leq y \leq z\}$.

   (c) $W = \{(x,y,z) \in V : x-3z=0\}$.

   (d) $W = \{(x,y,z) \in V : x \in \mathbb{Z}\}$.

   (e) $W = \{(x,y,z) \in V : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

   (f) $W = \{(x,y,z) \in V : x \geq 0\}$.

   (g) $W = \{(x,y,z) \in V : xy=0\}$.

   (h) $W = \{(x,y,z) \in V : x=z^2\}$.

3. Seja $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a=c \text{ e } b+d=0 \right\}$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : a+d \leq b+c \right\}$.

   (c) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{AB} = \mathbf{BA},\ \mathbf{B} \text{ uma matriz fixa em } V\}$.

   (d) $W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}$.

   (e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad-bc \neq 0 \right\}$.

   (f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : ad-bc = 0 \right\}$.

4. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

   (a) $W = \{p \in V : p(0) = 0\}$.

(b) $W = \{p \in V : p(0) = 2p(1)\}$.

(c) $W = \{p \in V : p(x) + p'(x) = 0\}$.

(d) $W = \{p \in V : p(2) = 0 \text{ e } p(5) \neq 0\}$.

(e) $W = \{p \in V : p = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} \text{ e } 2k \leq n\}$.

5. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais. Verifique quais dos subconjuntos abaixo são subespaços de V.

(a) $W = \{f \in V : f(0) = 1\}$.

(b) $W = \{f \in V : f(5) = 0\}$.

(c) $W = \{f \in V : f(3) = f(5)\}$.

(d) $W = \{f \in V : f \text{ é contínua}\}$.

(e) $W = \{f \in V : f \text{ é derivável}\}$.

(f) $W = \{f \in V : f \text{ é integrável}\}$.

6. Sejam W_1,W_2 e W_3 os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\right\}, \ W_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\right\}, \\ W_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}. \end{aligned}$$

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$? Em algum dos casos a soma é direta?

7. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$ se, somente se, todo vetor $\mathbf{v}$ em V pode ser escrito de modo único sob a forma $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, onde $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$.

8. Considere

$$W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}.$$

Encontre um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

7. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in V : f(-x) = f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \{f \in V : f(-x) = -f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

subespaços de V. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

8. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixado. Mostre que o conjunto

$$W_r = \{f \in V : f(x) = 0, \ \forall \ x \in [-r, r]\}$$

é um subespaço de V.

9. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1,W_2 subespaços de V. Mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

10. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2, W_3 subespaços de V.

    (a) Mostre que $(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3)$.

    (b) Mostre que $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$.

    (c) Mostre, com um exemplo, que as inclusões acima podem ser estritas.

    (d) Mostre que se $W_3 \subseteq W_1$, então vale a igualdade.

11. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Dizemos que um subespaço U de V é *adaptado* a essa decomposição se

$$U = (U \cap W_1) \oplus (U \cap W_2).$$

    (a) Determine um exemplo de uma decomposição e um subespaço que não seja adaptado à decomposição.

    (b) Mostre que se $W_1 \subseteq U$ ou $W_2 \subseteq U$, então U é adaptado a decomposição.

2.3 Combinação Linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um vetor $\mathbf{u}$ em V é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ em V se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i.$$

Exemplo 2.24 *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$ *e*

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2, 1),\ \ \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4, -1),\ \ \mathbf{u}_3 = (-1, 2, 5, 2)$$

vetores em V. *Quais dos vetores* $\mathbf{u} = (4, -5, 9, -7)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -4, 4)$ *e* $\mathbf{w} = (-1, 1, 0, 1)$ *são combinações lineares dos vetores* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *e* $\mathbf{u}_3$?

Solução. Para resolver esse problema devemos verificar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}$$

tem solução, onde $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$. Mas isto é equivalente a determinar condições sobre b_1, b_2, b_3 e b_4, de modo que o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_3 = b_2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = b_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_4 \end{cases}$$

tenha solução. Para resolver o sistema, vamos reduzir a matriz ampliada à forma em escada

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & \vdots & b_1 \\ 1 & 0 & 2 & \vdots & b_2 \\ -2 & 4 & 5 & \vdots & b_3 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & b_4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{8b_1+19b_2-6b_3}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{3b_1-b_2+b_3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{-4b_1+10b_2+3b_3}{39} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3b_1-14b_2+b_3+13b_4}{13} \end{bmatrix}$$

Portanto, pelo item 2 das Observações 1.19, o vetor $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in V$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ se, e somente se,

$$\frac{3b_1 - 14b_2 + b_3 + 13b_4}{13} = 0 \Leftrightarrow b_3 = -3b_1 + 14b_2 - 13b_4.$$

Assim, $\mathbf{u} = (4, -5, 9, -7)$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$9 = -12 - 70 + 91 \text{ e } \mathbf{u} = -3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,$$

$\mathbf{v} = (3, 1, -4, 4)$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$-4 \neq -9 + 14 - 52$$

e $\mathbf{w} = (-1, 1, 0, 1)$ não é combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$0 \neq 3 + 14 - 13.$$

Teorema 2.25 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores fixados em V. Então o conjunto*

$$W = \{x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subespaço de V.

Prova. É claro que $W \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_n \in W.$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ temos que existem

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \text{ e } \mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) + (y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n) \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{u}_n \in W \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a\mathbf{u} &= a(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) \\ &= (ax_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (ax_n)\mathbf{u}_n \in W. \end{aligned}$$

Portanto, W é um subespaço de V. ■

O subespaço

$$W = \{x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

de V é chamado o *subespaço gerado por* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Mais geralmente, seja β um subconjunto não-vazio de V. Então

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i\mathbf{u}_i : x_i \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{u}_i \in \beta \right\}$$

é o subespaço de V *gerado por* β, onde β é o conjunto de *geradores* de V, e será denotado por

$$W = [\beta].$$

Quando $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, denotamos $[\beta]$ por $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Exemplo 2.26 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbf{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ $i = 1, 2, 3$, *vetores em* V. *Determine* $W = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$.

Exemplo 2.27 *Sejam* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *e*

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vetores em V. *Determine* $W = [\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}]$.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{a\mathbf{E}_{11} + b\mathbf{E}_{12} + c\mathbf{E}_{21} + d\mathbf{E}_{22} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{12}$, $\mathbf{E}_{21}$ e $\mathbf{E}_{22}$.

Exemplo 2.28 *Sejam* $V = P_3(\mathbb{R})$ *e*

$$p_i = x^i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

vetores em V*. Determine* $W = [p_0, p_1, p_2, p_3]$*.*

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} W &= \{a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Portanto, $W = V$, isto é, todo vetor $\mathbf{u}$ em V pode ser escrito como uma combinação dos vetores p_0, p_1, p_2 e p_3.

Exemplo 2.29 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* W_1,W_2 *subespaços de* V*. Mostre que* $W_1 + W_2$ *é o menor subespaço de* V *contendo* W_1 *e* W_2*, isto é,*

$$W_1 + W_2 = [W_1, W_2] = [W_1 \cup W_2].$$

Solução. Já vimos que $W_1 + W_2$ é um subespaço de V. Como $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$ e $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$ temos que

$$W_1 \subseteq W_1 + W_2 \text{ e } W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

Logo,

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \text{ e } [W_1 \cup W_2] \subseteq W_1 + W_2.$$

Por outro lado, se $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$, então existem $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tais que

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = 1 \cdot \mathbf{w}_1 + 1 \cdot \mathbf{w}_2.$$

Assim, todo vetor $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$ é uma combinação linear de vetores em $W_1 \cup W_2$. Consequentemente,

$$W_1 + W_2 \subseteq [W_1 \cup W_2].$$

Portanto, $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$.

Finalmente, seja W qualquer subespaço de V tal que $W_1 \subseteq W$ e $W_2 \subseteq W$. Então

$$W_1 \cup W_2 \subseteq W \text{ e } [W_1 \cup W_2] \subseteq W,$$

pois todo vetor de $[W_1 \cup W_2]$ é uma combinação linear de vetores em $W_1 \cup W_2$ e W é um subespaço de V. Portanto, $W_1 + W_2 \subseteq W$.

Exemplo 2.30 *Determine todos os subespaços de* $\mathbb{R}^2$*.*

Solução. Seja W um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = (x,y) \in W, \text{ para algum } y \in \mathbb{R}\} \text{ e} \\ W_2 &= \{y \in \mathbb{R} : y\mathbf{e}_2 = (0,y) \in W\} \end{aligned}$$

são subespaços de $\mathbb{R}$ (prove isto!). Logo, existem $x_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$W_1 = [x_0] \text{ e } W_2 = [y_1].$$

Assim, pela definição desses subespaços, podemos encontrar $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0) \in W$ e $\mathbf{u}_1 = (0, y_1) \in W$.

Afirmação. $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

De fato, dado $\mathbf{u} = (x,y) \in W$, $x \in W_1$, de modo que $x = ax_0$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathbf{u} - a\mathbf{u}_0 = (0, y - ay_0) \in W \Rightarrow y - ay_0 \in W_2.$$

Logo, $y - ay_0 = by_1$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\mathbf{u} = (x,y) = (ax_0, ay_0 + by_1) = a\mathbf{u}_0 + b\mathbf{u}_1,$$

isto é, $W = [\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1]$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre que todo vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $(1,2)$ e $(5,0)$. Que relação existe entre $\mathbb{R}^2$ e $[(1,2),(5,0)]$?

2. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e
$$f = 2 - 3x + 5x^2, g = -8 + 5x - 2x^2$$
vetores em V. Quais dos vetores $p = -26+11x+7x^2$ e $q = 1+x+x^2$ são combinações lineares dos vetores f e g?

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e
$$\mathbf{u}_1 = (1,1,-2), \mathbf{u}_2 = (3,0,4)$$
vetores em V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (4,-5,9)$, $\mathbf{v} = (3,1,-4)$ e $\mathbf{w} = (-1,1,0)$ são combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$?

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
vetores em V. Quais dos vetores
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
são combinações lineares dos vetores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$?

5. Encontre os geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$.

   (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = x - 2y = 0\}$.

   (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$.

   (d) $W_1 \cap W_2$.

   (e) $W_2 + W_3$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^4$ e

$$W = \{(x, y, z, t) \in V : x + 2y - 2z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

   um subespaço de V. Quais dos vetores $\mathbf{u} = (-2, 4, 3, 0)$, $\mathbf{v} = (6, 2, 4, 1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 1, 0, 0)$ estão em W?

7. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{u}_2 = (3, 0, 4), \mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0)$$

   vetores em V. Determine o valor de k de modo que $(4, -5, k) \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$.

8. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e

$$p_0 = 1, \;\; p_1 = 1 - x, \;\; p_2 = (1 - x)^2, \;\; p_3 = (1 - x)^3$$

   vetores em V. Quais dos vetores em V são combinações lineares dos vetores p_0, p_1, p_2 e p_3?

9. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores não-nulos de $\mathbb{R}^2$ e suponhamos que não exista um escalar a tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$. Mostre que

$$\mathbb{R}^2 = [\mathbf{u}] \oplus [\mathbf{v}].$$

2.4 Dependência e Independência Linear

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente dependentes* (*LD*) se existirem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos iguais a 0, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite uma solução não-nula. Caso contrário, dizemos que os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são *linearmente independentes* (*LI*) ou, equivalentemente, a equação vetorial (2.1) admite apenas a solução nula.

Mais geralmente, sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e β um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que β é LI se para quaisquer vetores distintos $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ em β, temos que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

isto é, todo subconjunto finito de β é LI. Caso contrário, β é LD.

Exemplo 2.31 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e*

$$\mathbf{u}_1 = (3, 0, -3), \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 2), \mathbf{u}_3 = (4, 2, -2), \mathbf{u}_4 = (2, 1, 1)$$

vetores em V. *Verifique se os vetores* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ *e* $\mathbf{u}_4$ *são* LI *ou* LD.

Solução. Para resolver esse problema devemos resolver a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in V$. Mas isto é equivalente a resolver o sistema homogêneo

$$\left\{\begin{array}{r} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Para resolver o sistema, vamos considerar a matriz dos coeficientes do sistema e reduzí-la à forma em escada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, nosso sistema é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right. .$$

Escolhendo, $x_3 = c \in \mathbb{R}$, temos que

$$S = \{(-2c, -2c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto solução do sistema. Em particular, se $c = 1$, então $(-2, -2, 1, 0)$ é uma solução não-nula do sistema. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LD, isto é,

$$-2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 0\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}.$$

Exemplo 2.32 *Sejam* $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todas as funções reais e*

$$\mathbf{u}_1 = e^x, \mathbf{u}_2 = e^{2x}$$

vetores em V. *Verifique se os vetores* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *são* LI *ou* LD. *Note que* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *são soluções da equação diferencial*

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Solução. Para resolver esse problema devemos resolver a equação vetorial

$$ae^x + be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

onde $\mathbf{0}$ é a função identicamente nula. Diferenciando ambos os membros dessa equação, temos que

$$ae^x + 2be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, subtraindo a primeira equação da segunda, resulta que

$$be^{2x} = \mathbf{0}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Assim, $b = 0$ e, da primeira equação, $ae^x = \mathbf{0}$. Logo, $a = 0$. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são LI.

Exemplo 2.33 *Seja* $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$a_{ij} < 0 \ \textit{se} \ i \neq j \ \textit{e} \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} > 0, \ \textit{para} \ i = 1, \ldots, n.$$

Mostre que $\mathbf{A}$ *é não-singular.*

Solução. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{A}$ seja singular. Então as colunas de $\mathbf{A}$ são LD. Logo, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

isto é, o sistema (2.2) possui uma solução não-nula $(x_1, \ldots, x_n)$. Assim, fazendo

$$|x_j| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

e multiplicando a solução do sistema (2.2) por -1, se necessário, podemos supor que $x_j > 0$. Agora, considerando a j-ésima equação do sistema (2.2), temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = a_{jj}x_j + \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{jk}x_k \geq a_{jj}x_j + \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{jk}x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\right) x_j > 0,$$

o que é uma contradição.

Exemplo 2.34 (Regra de Cramer) *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *e* $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$ *as colunas da matriz* $\mathbf{A}$. *Mostre que se existirem* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *tais que* $\mathbf{B} = x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_n\mathbf{C}_n$, *então*

$$x_j \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Em particular, se $\det \mathbf{A} \neq 0$, *então*

$$x_j = \frac{\det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}}{\det \mathbf{A}},$$

isto é, o sistema de equações lineares $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *tem uma única solução.*

Solução. Suponhamos que existam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{B} = x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_n\mathbf{C}_n.$$

Então

$$x_1\mathbf{C}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{C}_{j-1} + 1 \cdot (x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B}) + x_{j+1}\mathbf{C}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{C}_n = \mathbf{O}.$$

Logo, as colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}$$

são LD. Assim, pela Proposição 1.5, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & x_j\mathbf{C}_j - \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \\ &= x_j \det \mathbf{A} - \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_j \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{j-1} & \mathbf{B} & \mathbf{C}_{j+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.35 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for combinação linear dos outros.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como os escalares $x_1, \ldots, x_n$ não são todos nulos temos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i \neq 0$. Logo,

$$\mathbf{u}_i = (-\frac{x_1}{x_i})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_{i-1}}{x_i})\mathbf{u}_{i-1} + (-\frac{x_{i+1}}{x_i})\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + (-\frac{x_n}{x_i})\mathbf{u}_n.$$

Reciprocamente, suponhamos que um desses vetores seja combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_j = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{u}_{j-1} + x_{j+1}\mathbf{u}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Logo, a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_{j-1}\mathbf{u}_{j-1} + (-1)\mathbf{u}_j + x_{j+1}\mathbf{u}_{j+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

admite pelo menos uma solução não-nula, a saber, $(x_1, \ldots, x_{j-1}, -1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Portanto, o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD ■

Corolário 2.36 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores em V com pelo menos dois vetores não-nulos. O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for combinação linear dos precedentes.*

Prova. Suponhamos que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ seja LD. Então, por definição, existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Seja k o maior inteiro tal que $x_k \neq 0$. Então

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Se $k = 1$, então $x_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ e, assim, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, o que é impossível. Portanto, $k > 1$ e

$$\mathbf{u}_k = (-\frac{x_1}{x_k})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_{k-1}}{x_k})\mathbf{u}_{k-1}.$$

■

Exemplo 2.37 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. Então os vetores $\mathbf{u}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 0)$ são LD, pois*

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $V = \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Mostre que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são LD se, e somente se, existe um escalar $a \in \mathbb{R}$ tal que $y_i = ax_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores de um espaço V. Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI, mostre que:

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LI.

   (b) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}\}$ é um conjunto LD.

3. Sejam $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ vetores de $\mathbb{R}^2$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é LD se, e somente se, $ad = bc$.

4. O conjunto $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\}$ é LI ou LD em $P_2(\mathbb{R})$? O que se pode afirmar a respeito de qualquer um de seus subconjuntos com três elementos?

5. Encontre um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $[\mathbf{u}] = W_1 \cap W_2$, onde

$$W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \text{ e } W_2 = [(1, 2, 3), (1, -1, 1)].$$

6. Em quais condições sobre o escalar k, o conjunto

$$\left\{(1, 0, k), (1, 1, k), \left(1, 1, k^2\right)\right\}$$

   é LI em $\mathbb{R}^3$?

7. Seja $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Quais dos subconjuntos abaixo são LI em V.

   (a) $\{x, x+1, x^2-1\}$.

   (b) $\{x+5, x^2-x, x^2+x-10\}$.

   (c) $\{(x+1)^2, 2x, x+\frac{1}{2}\}$.

   (d) $\{(x+1)^2, x^2-1, x+1\}$.

   (e) $\{1-x, x(1-x), 1-x^2\}$.

   (f) $\{1, e^x, e^{-x}\}$.

   (g) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x\}$.

8. Responda verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique.

   ( ) Todo conjunto que contém um subconjunto LD é LD?

   ( ) Todo subconjunto de um conjunto LI é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém dois vetores iguais é LI?

   ( ) Todo conjunto que contém o vetor nulo é LI?

9. Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI se, e somente se, o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i + a\mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_j \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é LI, para todos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, com $i < j$.

2.5 Bases e Dimensão

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um conjunto $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de vetores em V é uma *base* de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é LI.

2. $V = [\beta] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$.

Ou, equivalentemente,

$$V = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_2] \oplus \cdots \oplus [\mathbf{u}_n].$$

Mais geralmente, um subconjunto não-vazio β de V é uma base de V se β é LI e $[\beta] = V$.

Observação 2.38 *Pode ser provado, usando o Lema de Zorn, que todo espaço vetorial $V \neq \{\mathbf{0}\}$ possui uma base.*

Exemplo 2.39 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. É fácil verificar que o conjunto*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

é uma base finita de V, a qual é chamada de base canônica *de V.*

Exemplo 2.40 *Sejam* $V = P(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e*

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}.$$

Então β *é uma base infinita de* V*, a qual é chamada de* base canônica *de* V*.*

Solução. Sejam $p_i = x^i, p_{i+1} = x^{i+1}, \ldots, p_{i+n} = x^{i+n}$ vetores distintos de V com $i \geq 0$. Se

$$c_1 p_i + \cdots + c_n p_{i+n} = \mathbf{0},$$

então, pela igualdade de polinômios, temos que $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Logo, β é LI. É claro que $[\beta] = V$, pois todo vetor p em V é da forma

$$p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Portanto, β é uma base infinita de V.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que V é de *dimensão finita* se ele possui uma base finita, por exemplo, $V = \mathbb{R}^3$ é de dimensão finita. Caso contrário, V é de *dimensão infinita.*

Teorema 2.41 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *vetores em* V *tais que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n].$$

Então, dentre esses vetores, podemos extrair uma base de V*.*

Prova. Se os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 2.35, temos que um desses vetores é combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_n = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Logo,

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}].$$

Se os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 2.35, temos que um desses vetores é combinação linear dos outros, digamos

$$\mathbf{u}_{n-1} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_{n-2} \mathbf{u}_{n-2}.$$

Logo,

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-2}].$$

Continuando dessa maneira (em no máximo $n - 1$ etapas), obtemos uma base de V. ■

Exemplo 2.42 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$*,* $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$*,* $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$*,* $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 1)$ *vetores em* V *tais que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4].$$

Determine dentre esses vetores uma base de V*.*

Solução. Para resolver esse problema devemos verificar se os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LI ou LD, isto é, verificar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

tem solução nula ou não, onde $\mathbf{0} = (0,0,0) \in V$. Mas isto é equivalente a determinar se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + x_4 = 0 \\ \qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

tem solução. É fácil verificar que

$$S = \{(0, -c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

é o conjunto solução do sistema. Em particular, se $c = 1$, então $(0, -1, -1, 1)$ é uma solução não-nula do sistema. Portanto, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LD e

$$\mathbf{u}_4 = 0\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3.$$

Assim,

$$V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$$

e o conjunto $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de V (prove isto!).

Teorema 2.43 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ tal que*

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m].$$

Então todo conjunto com mais de m vetores em V é LD. Assim, todo conjunto de vetores LI em V possui no máximo m vetores.

Prova. Como

$$V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$$

temos, pelo Teorema 2.41, que existe uma base de V dentre os vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. Logo, reenumerando, se necessário, podemos supor que

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\},$$

com $k \leq m$, seja uma base de V. Seja

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

um conjunto de vetores em V com $n > m$. Como $\mathbf{v}_j \in V$ e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base de V temos que existem $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{kj}\mathbf{u}_k, j = 1, \ldots, n.$$

Agora, vamos estudar a combinação linear

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{v}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\mathbf{u}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \mathbf{u}_i. \end{aligned}$$

Assim,

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k,$$

ou seja, basta discutir o sistema homogêneo com k equações e n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Como $n > m \geq k$ temos, pelo item 2. das Observações 1.19, que esse sistema tem pelo menos uma solução não-nula

$$(y_1, \ldots, y_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n &= \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \right) \mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} 0\mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LD. ■

Corolário 2.44 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se*

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} \text{ e } \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

são duas bases quaisquer de V, então $m = n$.

Prova. Como $V = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 2.43, que $n \leq m$. Por outro lado, como $V = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ e $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 2.43, que $m \leq n$. Portanto, $m = n$. ■

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. A *dimensão* de V é o número de elementos em alguma base de V e será denotada por $\dim V$ou $\dim_{\mathbb{R}} V$. Note, pelo Corolário 2.44, que essa definição não depende da base de V, isto é, está bem definida. Quando $V = \{\mathbf{0}\}$, convencionamos que $\dim V = 0$.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto qualquer de vetores de V. O *posto* de α é definido por

$$\text{posto}(\alpha) = \dim[\alpha].$$

Lema 2.45 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um subconjunto LI em V. Então $\mathbf{u} \in V - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ se, e somente se, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}\}$ é um conjunto LI.*

Prova. Sejam $x_1, \ldots, x_m, y$ escalares em $\mathbb{R}$ tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m + y\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Então $y = 0$, pois se $y \neq 0$, então

$$\mathbf{u} = (-\frac{x_1}{y})\mathbf{u}_1 + \cdots + (-\frac{x_m}{y})\mathbf{u}_m \Rightarrow \mathbf{u} \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m],$$

o que é impossível. Assim, $y = 0$ e

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}.$$

Logo, por hipótese,

$$x_1 = \cdots = x_m = 0.$$

Portanto, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}\}$ é um conjunto LI. ■

Teorema 2.46 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V. Então todo conjunto de vetores LI em W é parte de uma base de W.*

Prova. Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ um conjunto de vetores LI em W. Se

$$W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m],$$

acabou. Caso contrário, existe pelo Lema 2.45

$$\mathbf{u}_{m+1} \in W - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m] \text{ tal que } \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}\}$$

é LI em W. Se

$$W = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}],$$

acabou. Caso contrário, existe pelo Lema 2.45

$$\mathbf{u}_{m+2} \in W - [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}] \text{ tal que } \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{u}_{m+2}\}$$

é LI em W. Continuando dessa maneira (em no máximo $\dim V$ etapas), obtemos o conjunto

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{u}_{m+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\},$$

que é uma base de W. ■

Corolário 2.47 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se W é um subespaço próprio de V, então* $\dim W < \dim V$. *Além disso, se* $\dim V = n$, *então todo conjunto com n vetores LI em V é uma base de V.*

Prova. Como $W \neq \{\mathbf{0}\}$ temos que existe $\mathbf{u}$ em W com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. É claro que $\{\mathbf{u}\}$ é um conjunto LI em W. Assim, pelo Teorema 2.46, existe uma base de W contendo $\mathbf{u}$ e no máximo $\dim V$ elementos. Logo, $\dim W \leq \dim V$. Como $W \subsetneq V$ temos que existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} \notin W$. Assim, acrescentando $\mathbf{v}$ a uma base de W, obtemos um conjunto LI para V. Portanto, $\dim W < \dim V$. ■

Exemplo 2.48 *Seja $V = \mathbb{R}^3$. Verifique se os vetores* $(1, 1, 0)$ *e* $(0, 1, 1)$ *é parte de uma base de V.*

Solução. Para resolver esse problema devemos verificar se os vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são LI, isto é, resolver a equação vetorial

$$x_1(1, 1, 0) + x_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Mas isto é equivalente a verificar se o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

tem solução. É fácil verificar que $x_1 = x_2 = 0$. Logo, os vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são LI. Portanto, os vetores $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ é parte de uma base de V. Agora, para determinar

$$\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)],$$

devemos primeiro encontrar os vetores $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3)$ tais que

$$x_1(1, 1, 0) + x_2(0, 1, 1) = \mathbf{u},$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_1 + x_2 = b_2 \\ x_2 = b_3 \end{cases}.$$

Logo, o vetor $\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V$ é combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ se, e somente se, $b_2 = b_1 + b_3$. Portanto,

$$\mathbf{u} = (b_1, b_2, b_3) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)] \Leftrightarrow b_2 \neq b_1 + b_3.$$

Em particular,

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in V - [(1, 1, 0), (0, 1, 1)].$$

Assim, os vetores $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ são LI em V. Como $\dim V = 3$ temos que

$$\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

é uma base de V.

Teorema 2.49 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Prova. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1 e W_2 temos, pelo Teorema 2.46, que $W_1 \cap W_2$ contém uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

que é parte de uma base

$$\alpha \cup \beta, \text{ onde } \beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$$

de W_1 e parte de uma base

$$\alpha \cup \gamma, \text{ onde } \gamma = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

de W_2. Note que os conjuntos α, β e γ são dois a dois disjuntos (confira Figura 2.1).

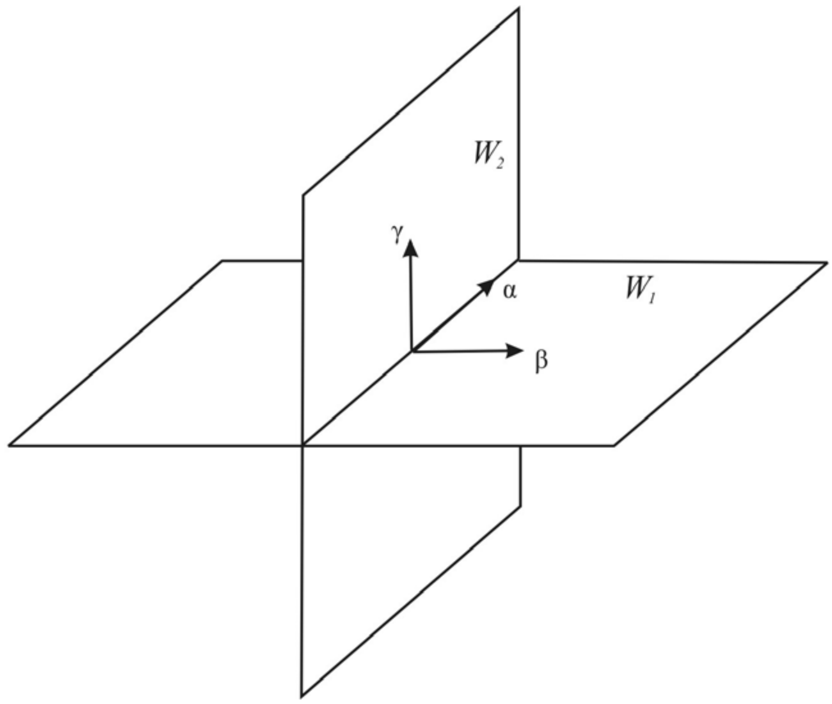


Figura 2.1: Interseção dos subespaços W_1 e W_2.

Afirmação. O conjunto $\delta = \alpha \cup \beta \cup \gamma$ é uma base de $W_1 + W_2$.
De fato, é claro que o conjunto δ gera $W_1 + W_2$. Agora, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j + \sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}.$$

Então
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j \in W_1.$$
Logo,
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) \in W_1 \cap W_2.$$
Assim, existem $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ tais que
$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l\right) = t_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + t_k \mathbf{u}_k,$$
ou seja,
$$\sum_{i=1}^{k} t_i \mathbf{u}_i + \sum_{l=1}^{n} z_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}.$$
Como γ é LI temos que $z_1 = \cdots = z_n = 0$. Logo,
$$\sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}.$$
Como β é LI temos que
$$x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_m = 0.$$
Portanto, δ é um conjunto LI. Logo,
$$\begin{aligned}\dim W_1 + \dim W_2 &= (m+k) + (n+k)\\ &= (m+n+k) + k\\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.50 *Sejam* $V = \mathbb{R}^4$,
$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in V : y + z + t = 0\}$$
e
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in V : x + y = 0 \ \text{ e } \ z - 2t = 0\}.$$
subespaços de V*.*

1. *Determine uma base de* $W_1 + W_2$ *e* $\dim(W_1 + W_2)$*.*

2. V *é soma direta de* W_1 *e* W_2*?*

Solução. Note que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z,t) \in V : y+z+t=0\} \\ &= \{(x,y,z,-y-z) \in V : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,0,0)+(0,y,0,-y)+(0,0,z,-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)]. \end{aligned}$$

e $\dim W_1 = 3$. De modo análogo, mostra-se que

$$W_2 = [(1,-1,0,0),(0,0,2,1)]$$

e $\dim W_2 = 2$. Agora, para determinar uma base de W_1+W_2, podemos escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o conjunto

$$\alpha = \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0)\}$$

é uma base de $W_1 + W_2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Assim, $V = \mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$, pois $W_1 + W_2 \subseteq V$. Como

$$\begin{aligned} \dim(W_1 \cap W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \\ &= 3+2-4 = 1 \end{aligned}$$

temos que V não é soma direta de W_1 e W_2. Note que, para determinar uma base de $W_1 \cap W_2$ basta resolver o sistema

$$\begin{cases} y+z+t=0 \\ x+y=0 \\ z-2t=0 \end{cases}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = [(3,-3,2,1)]$.

Exemplo 2.51 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = [(1,0,-1),(0,1,2)] \text{ e } W_2 = [(1,2,3),(1,-1,1)].$$

subespaços de V.

1. *Determine uma base de* $W_1 \cap W_2$ *e a* $\dim(W_1 \cap W_2)$.

2. V é soma direta de W_1 e W_2?

Solução. É fácil verificar que $\dim W_1 = 2$ e $\dim W_2 = 2$. Agora, para determinar uma base para $W_1 \cap W_2$, devemos primeiro determinar os vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ que estão nos subespaços W_1 e W_2, isto é, escalonar as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ -1 & 2 & \vdots & z \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 2 & -1 & \vdots & y \\ 3 & 1 & \vdots & z \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ -1 & 2 & \vdots & z \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y \\ 0 & 0 & \vdots & x - 2y + z \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ 2 & -1 & \vdots & y \\ 3 & 1 & \vdots & z \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{x+y}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{2x-y}{3} \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{-5x-2y+3z}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo, pelo item 2. das Observações 1.19,

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : x - 2y + z = 0\} \text{ e } W_2 = \{(x, y, z) \in V : -5x - 2y + 3z = 0\}.$$

Finalmente, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Assim, $W_1 \cap W_2 = [(1, 2, 3)]$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Portanto, V não é soma direta de W_1 e W_2 mas $V = W_1 + W_2$, pois

$$\dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim V \text{ e } W_1 + W_2 \subseteq V.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e W_1, W_2 subespaços de V tais que $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$. É possível obtermos
$$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}?$$

2. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e W_1, W_2 subespaços V tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e $W_1 \not\subseteq W_2$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

3. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços V, onde $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 5$ e $\dim V = 7$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

4. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços

$$\begin{aligned} W_1 &= [(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)] \text{ e} \\ W_2 &= [(1,-4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)]. \end{aligned}$$

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$W_1 = \{(x,y,z) \in V : x = 0\} \text{ e } W_2 = [(1,2,0),(3,1,2)]$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : b = -a \right\} \text{ e } W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V : c = -a \right\}.$$

subespaços de V. Determine uma base e a dimensão para W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$. É verdade que $\mathbb{R}^{2\times 2} = W_1 \oplus W_2$?

7. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Determine uma base e a dimensão do subespaço

$$W = \{p \in V : p'(x) = 0\}.$$

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e o conjunto de vetores $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ em V, onde

$$\mathbf{u} = (1-a, 1+a) \text{ e } \mathbf{v} = (1+a, 1-a).$$

Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que β não seja uma base de V.

9. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e $p = 2x^2 - 3x + 1 \in V$. O conjunto $\beta = \{p, p', p''\}$ é uma base de V?

10. Mostre que o conjunto

$$\beta = \{(1-x)^3, (1-x)^2, 1-x, 1\}$$

é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

11. Seja $V = \mathbb{R}^4$. Quais dos subconjuntos abaixo são bases de V?

    (a) $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$.

    (b) $\{(1,3,-2,4),(1,1,5,9),(2,0,-13,23),(1,5,1,-2)\}$.

    (c) $\{(1,1,1,1),(3,2,0,3),(0,-1,0,3),(4,2,1,7)\}$.

(d) $\{(1,-2,0,1),(0,0,2,5),(-2,4,2,3),(-1,2,4,9)\}$.

12. Em cada um dos subconjuntos abaixo determine uma base de W e estenda-a a uma base de V.

    (a) Se $V=\mathbb{R}^3$ e
    $$W=\{(x,y,z): x-3y+3z=x+5y-z=x+y+z=0\}.$$

    (b) Se $V=\mathbb{R}^4$ e
    $$W=[(1,-2,0,1),(0,0,2,5),(-2,4,2,3)].$$

    (c) Se $V=\mathbb{R}^4$ e
    $$W=[(1,1,1,1),(3,2,0,3),(0,-1,0,3)].$$

13. Seja W o conjunto de todos os quadrados mágicos de ordem 3 (confira Exercício 11 do Capítulo 1).

    (a) Mostre que W é um subespaço de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ e que o conjunto
    $$\beta=\left\{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\right\}$$
    é uma base de W.

    (b) Mostre que toda matriz
    $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\ *&*&*\\ *&*&*\end{bmatrix}$$
    pode ser transformada em um quadrado mágico. Existe outra maneira de fazê-la?

14. Mostre que o conjunto
$$\beta=\{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x+x^2+x^3+x^4\}$$
é uma base de $P_4(\mathbb{R})$.

15. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $V\neq\{\mathbf{0}\}$ e β um subconjunto não-vazio de V. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) β é um conjunto *independente maximal* de V, no seguinte sentido: não existe subconjunto β' *LI* de V tal que $\beta\subset\beta'$;

    (b) β é um conjunto *minimal de geradores* de V, no seguinte sentido: não existe subconjunto de geradores β' de V tal que $\beta'\subset\beta$;

(c) β é uma base de V.

16. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2, W_3 subespaços de V. Mostre que

$$\begin{aligned}\dim(W_1+W_2+W_3) &\leq \dim(W_1)+\dim(W_2)+\dim(W_3)\\ &\quad -\dim(W_1\cap W_2)-\dim(W_1\cap W_3)-\dim(W_2\cap W_3)\\ &\quad +\dim(W_1\cap W_2\cap W_3).\end{aligned}$$

17. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V.

(a) Mostre que o conjunto

$$\overline{V}=\frac{V}{W}=\{\mathbf{u}+W:\mathbf{u}\in V\}$$

com as operações de adição

$$(\mathbf{u}+W)\boxplus(\mathbf{v}+W)=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+W$$

e multiplicação por escalar

$$a\odot(\mathbf{u}+W)=a\mathbf{u}+W$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ chamado *espaço quociente*.

(b) Se α é uma base de W e se β é um subconjunto de V tal que

$$\{\mathbf{u}+W:\mathbf{u}\in\beta\}$$

é uma base de $\overline{V}$, então $\alpha\cap\beta=\emptyset$ e $\alpha\cup\beta$ é uma base de V.

(c) Se β é uma base de V tal que $\alpha\subseteq\beta$ é uma base de W, então

$$\{\mathbf{u}+W:\mathbf{u}\in\beta-\alpha\}$$

é uma base de $\overline{V}$.

(d) Mostre que

$$\dim V=\dim\overline{V}+\dim W,$$

isto é,

$$\dim\overline{V}=\dim V-\dim W.$$

2.6 Mudança de Bases

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Uma *base ordenada* de V é uma seqüência finita de vetores LI que gera V e será denotada por

$$(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)\text{ ou }\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}$$

Se a seqüência $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ é uma base ordenada de V, então

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é uma base de V.

Observação 2.52 *É importante destacar as principais diferenças entre seqüência e conjunto de vetores: a primeira é a* ordem *- no conjunto não importa a ordem dos elementos enquanto na seqüência a ordem é importante - segunda é a* identidade *- no conjunto os elementos são todos distintos enquanto na seqüência todos podem ser iguais, isto é,*

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}, i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 2.53 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ordenada de V. Então todo vetor $\mathbf{u} \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma:*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Prova. (Existência) Como $\mathbf{u} \in V = [\beta]$ temos que existem escalares $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

(Unicidade) Suponhamos, também, que

$$\mathbf{u} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n.$$

Então

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = (x_1 - y_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{u}_n.$$

Como β é LI temos que $x_i - y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. ■

Os escalares $x_1, \ldots, x_n$ são chamados as *coordenadas* do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base ordenada β e será denotada por

$$[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Note que

$$[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_\beta = [\mathbf{u}]_\beta + [\mathbf{v}]_\beta \text{ e } [a\mathbf{u}]_\beta = a[\mathbf{u}]_\beta, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \ a \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.54 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e*

$$\beta = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$$

uma base ordenada de V. Determine $[(a, b, c)]_\beta$.

Solução. Para resolver esse problema devemos encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = x_1(1, 0, -1) + x_2(1, 1, 1) + x_3(1, 0, 0),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ \qquad\quad x_2 = b \\ -x_1 + x_2 = c \end{cases}.$$

É fácil verificar que $x_1 = b - c$, $x_2 = b$ e $x_3 = a - 2b + c$. Portanto,

$$[(a, b, c)]_\beta = \begin{bmatrix} b - c \\ b \\ a - 2b + c \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.55 *Seja $V = P_2(\mathbb{R})$. Mostre que $\beta = \{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ é uma base de V e determine*

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\beta.$$

Solução. É fácil verificar que os vetores 1, $1+x$ e $(1+x)^2$ são LI. Como $\dim V = 3$ temos que $\beta = \{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ é uma base de V. Agora, devemos encontrar $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 &= y_1 + y_2(1 + x) + y_3(1 + x)^2 \\ &= y_1 + y_2 + y_3 + (y_2 + 2y_3)x + y_3x^2, \end{aligned}$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a_0 \\ \quad y_2 + 2y_3 = a_1 \\ \qquad\quad y_3 = a_2 \end{cases}.$$

É fácil verificar que $y_1 = a_0 - a_1 + a_2$, $y_2 = a_1 - 2a_2$ e $y_3 = a_2$. Portanto,

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2]_\beta = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$,

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \text{ e } \beta' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

duas bases ordenadas de V. Então, pelo Teorema 2.53, todo vetor $\mathbf{u} \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Assim,

$$[\mathbf{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{u}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{v}_j \in V$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{v}_1 & = & a_{11}\mathbf{u}_1 & + & \cdots & + & a_{n1}\mathbf{u}_n & = & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{u}_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_n & = & a_{1n}\mathbf{u}_1 & + & \cdots & + & a_{nn}\mathbf{u}_n & = & \sum_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{u}_i. \end{array} \tag{2.4}$$

Logo, pela Equação (2.3), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\Big)\mathbf{u}_i. \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade das coordenadas, temos que

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n. \end{array}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[\mathbf{u}]_{\beta} = [\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} [\mathbf{u}]_{\beta'}.$$

A matriz $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada a *matriz de mudança de base* da base β' para a base β. Comparando $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}$ com a equação (2.4), notamos que essa matriz é obtida colocando as coordenadas em relação à base β de $\mathbf{v}_j$ na j-ésima coluna.

Observação 2.56 *A matriz $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}$ é invertível, pois para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos que*

$$\mathbf{v}_i = a_{i1}\mathbf{u}_1 + a_{i2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{in}\mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_j \tag{2.5}$$

e para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos que

$$\mathbf{u}_j = b_{j1}\mathbf{v}_1 + b_{j2}\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{jn}\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathbf{v}_k. \tag{2.6}$$

Fazendo $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B} = [b_{jk}]$, temos que $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \mathbf{A}^t$ e $[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \mathbf{B}^t$. Substituindo a equação (2.6) na equação (2.5), temos que

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathbf{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)\mathbf{v}_k.$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathbf{V}$ temos que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n.$$

Portanto,

$$[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta}\,[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t = (\mathbf{AB})^t = (\mathbf{I}_n)^t = \mathbf{I}_n \Rightarrow [\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = ([\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'})^{-1}.$$

Exemplo 2.57 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $\beta' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ duas bases ordenadas de V. Determine $[(5, -8)]_{\beta}$.*

Solução. Uma maneira de resolver esse problema é usando a equação matricial

$$[(5, -8)]_{\beta} = [\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}\,[(5, -8)]_{\beta'},$$

pois

$$[(5, -8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}(1, 0) &= a_{11}(2, -1) + a_{21}(3, 4) \Rightarrow a_{11} = \frac{4}{11} \text{ e } a_{21} = \frac{1}{11}\\ (0, 1) &= a_{12}(2, -1) + a_{22}(3, 4) \Rightarrow a_{12} = -\frac{3}{11} \text{ e } a_{22} = \frac{2}{11}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } [(5, -8)]_{\beta} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.58 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base ordenada canônica de V e $\beta' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ uma base de V obtida de β pela rotação de um ângulo θ. Determine $[\mathbf{u}]_{\beta'}$.*

Solução. Pela Figura 2.2,

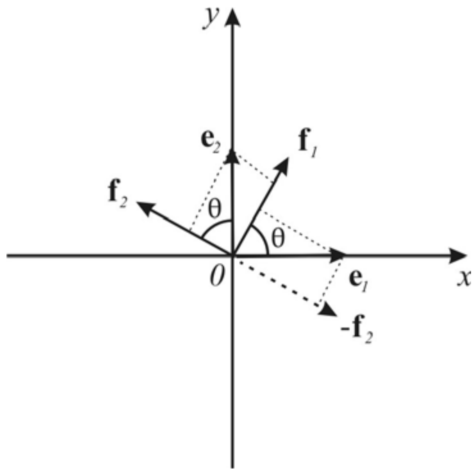


Figura 2.2: Rotação de um ângulo θ.

temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos\theta\mathbf{f}_1 - \operatorname{sen}\theta\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \operatorname{sen}\theta\mathbf{f}_1 + \cos\theta\mathbf{f}_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, se $\mathbf{u} = (x, y)$, então

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_{\beta'} &= [\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta}[\mathbf{u}]_{\beta} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta x + \operatorname{sen}\theta y \\ -\operatorname{sen}\theta x + \cos\theta y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que

$$[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{u}]_{\beta'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} x+y \\ -x+y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.59 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,2),(3,-6)\}$ e β' duas bases ordenadas de V. A matriz de mudança de base da base β para a base β' é*

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a base β'.

Solução. Seja $\beta' = \{(a,b),(c,d)\}$ a base desejada. Uma maneira de resolver esse problema é determinando a inversa da matriz $[I]_{\beta'}^{\beta}$. Logo,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Assim,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \left([I]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}(a,b) &= \frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{2}(3,-6) = (2,-2) \\ (c,d) &= \frac{1}{2}(1,2) - \frac{1}{2}(3,-6) = (-1,4).\end{aligned}$$

Portanto, $\beta' = \{(2,-2),(-1,4)\}$.

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$ um conjunto de vetores em V. Mostre que β é uma base de $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(4,-1)]_\beta$ e $[(x,y)]_\beta$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Calcule $[(6,2)]_\beta$ e $[(x,y)]_\beta$, onde

   (a) $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$.

   (b) $\beta = \{(2,0),(0,-1)\}$.

   (c) $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$

   (d) $\beta = \{(2,1),(1,2)\}$.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (a,b)$ e $\mathbf{v} = (c,d)$ vetores em V tais que

   $$ac + bd = 0 \text{ e } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$$

   Mostre que $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base ordenada de V. Além disso, calcule $[(x,y)]_\beta$.

4. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1-x)^3,(1-x)^2,1-x,1\}$ uma base ordenada de V. Determine $[-x^2-2x+3]_\beta$.

5. Determine a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$ para a base ordenada canônica de $\mathbb{R}^3$.

6. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base ordenada de V. Determine $[(x,y,z)]_\beta$.

7. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\alpha = \{(1,3),(2,-4)\}$ uma base de V. Se

   $$[\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -11 & 8 \end{bmatrix},$$

   então determine a base β.

8. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(3,5), (1,2)\}$ uma base de V. Se

$$[\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix},$$

então determine a base α.

9. Seja $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases ordenadas de V, onde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Determine as matrizes de mudança de bases de α para β e de β para α.

10. Considere os dados do exercício anterior. Se $[\mathbf{v}]_\alpha^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, então determine $[\mathbf{v}]_\beta$.

11. A matriz de mudança de base da base α de $\mathbb{R}^2$ para a base $\beta = \{(1,1), (0,2)\}$ é

$$[\mathbf{I}]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Determine a base α.

12. Sejam

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \beta = \{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} \text{ e } \gamma = \{2\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_2\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Se $[\mathbf{u}]_\beta^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$, então determine $[\mathbf{u}]_\alpha$ e $[\mathbf{u}]_\gamma$.

13. Sejam $V = \mathbb{R}^3$,

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ e } \beta = \{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3\}$$

bases ordenadas de V. Determine $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha$, $[\mathbf{I}]_\alpha^\beta$ e $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha \cdot [\mathbf{I}]_\alpha^\beta$.

14. Sejam

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \beta = \{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\} \text{ e } \gamma = 2\alpha$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. Se $[\mathbf{u}]_\beta^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, então determine $[\mathbf{u}]_\alpha$ e $[\mathbf{u}]_\gamma$.

15. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e α uma base ordenada de V. Determine $[\mathbf{I}]_\alpha^\alpha$.

16. Seja

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $\alpha = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{22}\}, \beta = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{22}\}$ são bases ordenadas de V?

(b) Se sua resposta ao item anterior foi positiva, determine $[\mathbf{I}]_\beta^\alpha$ e $[\mathbf{I}]_\alpha^\beta$.

17. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2, $\ldots$, W_n, $\ldots$ subespaços de V. Mostre que
$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$$
é um subespaço de V.

18. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2, $\ldots$, W_n, $\ldots$ subespaços de V tais que
$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n \subseteq \cdots.$$
Mostre que
$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$$
é um subespaço de V.

19. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Suponhamos que
$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V, \ \ n \geq 3,$$
sejam LD mas quaisquer $n-1$ desses vetores são LI.

(a) Dê um exemplo para tais vetores em $\mathbb{R}^3$!

(b) Mostre que existem escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, todos diferentes de zero, tais que
$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

(c) Suponhamos que
$$y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$
Mostre que existe $a \in \mathbb{R}^*$ tal que
$$y_1 = ax_1, \ldots, y_n = ax_n.$$

(d) Mostre que
$$W = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}\}$$
é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e determine a dimensão de W.

Capítulo 3

Transformações Lineares

Neste capítulo vamos estudar um tipo especial de funções, as quais são chamadas de "transformações lineares" e que é um dos objetos fundamentais da álgebra linear. Em cálculo, por exemplo, costuma-se aproximar uma função diferenciável por uma transformação linear. Veremos, também, que resolver um sistema

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

de equações lineares é equivalente a encontrar todos os elementos $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tais que

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{B},$$

onde $T_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ definida por $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$ é uma transformação linear.

3.1 Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $T : V \to W$ é uma *transformação linear* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (Aditividade).

2. $T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in V$ (Homogeneidade).

Observações 3.1 *1. Intuitivamente, uma transformação linear é uma função que preserva as operações dos espaços vetoriais.*

2. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pois

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

3. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, então

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}),\ \ \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \ e\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

pois

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) &= T(a\mathbf{u})+T(b\mathbf{v}) \\ &= aT(\mathbf{u})+bT(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$T(a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_n\mathbf{u}_n)=a_1T(\mathbf{u}_1)+\cdots+a_nT(\mathbf{u}_n),\ \ \forall\ a_i\in\mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}_i\in V.$$

4. *Se* $T:V\to W$ *é uma transformação linear e* $V=W$*, dizemos que* T *é um* operador linear *sobre* V*.*

Exemplo 3.2 (Operador Nulo) *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$*. A função* $0:V\to W$ *definida por* $0(\mathbf{u})=\mathbf{0}$*, para todo* $\mathbf{u}\in V$*, é uma transformação linear, pois*

$$0(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=0(\mathbf{u})+0(\mathbf{v}),\ \ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

e

$$0(a\mathbf{u})=\mathbf{0}=a0(\mathbf{u}),\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}\in V.$$

Exemplo 3.3 (Operador Identidade) *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. A função* $I=I_V:V\to V$ *definida por* $I_V(\mathbf{u})=\mathbf{u}$*, para todo* $\mathbf{u}\in V$*, é um operador linear, pois*

$$I_V(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{u}+\mathbf{v}=I_V(\mathbf{u})+I_V(\mathbf{v}),\ \ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

e

$$I_V(a\mathbf{u})=a\mathbf{u}=aI_V(\mathbf{u}),\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}\in V.$$

Exemplo 3.4 *Toda transformação linear* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é da forma* ax*, para algum* $a\in\mathbb{R}$ *fixado. De fato, é claro que a função* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $T(x)=ax$*, para todo* $x\in\mathbb{R}$*, é uma transformação linear. Reciprocamente, seja* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma transformação linear. Então*

$$T(x)=T(1\cdot x)=T(1)x,\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

Fazendo $a=T(1)\in\mathbb{R}$*, obtemos* $T(x)=ax$*, para todo* $x\in\mathbb{R}$*.*

Exemplo 3.5 *Sejam* $V=\mathbb{R}^{n\times 1}$*,* $W=\mathbb{R}^{m\times 1}$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ *uma matriz fixada. A função* $T_{\mathbf{A}}:V\to W$ *definida por*

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})=\mathbf{A}\mathbf{X},$$

para todo $\mathbf{X}\in V$*, é uma transformação linear, pois*

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\mathbf{A}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{A}\mathbf{Y}=T_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})+T_{\mathbf{A}}(\mathbf{Y}),\ \ \forall\ \mathbf{X},\mathbf{Y}\in V.$$

e

$$T_{\mathbf{A}}(a\mathbf{X})=\mathbf{A}(a\mathbf{X})=a(\mathbf{A}\mathbf{X})=aT_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}),\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{X}\in V.$$

Note, também, que $S_{\mathbf{A}}:\mathbb{R}^{1\times m}\to\mathbb{R}^{1\times n}$ *definida por*

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})=\mathbf{v}\mathbf{A},$$

para todo $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{m\times 1}$*, é uma transformação linear.*

Exemplo 3.6 (Operador Diferencial) *Seja $V = P_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e grau menor do que ou igual a n. A função $D : V \to V$ definida por $(Dp)(x) = p'(x)$, para todo $p \in V$, é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned}(D(p+q))(x) &= ((p+q)(x))' = (p(x)+q(x))' \\ &= p'(x)+q'(x) = (Dp)(x)+(Dq)(x) \\ &= (Dp+Dq)(x), \ \forall \ p,q \in V\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(D(ap))(x) &= (ap(x))' = ap'(x) = a(Dp)(x) \\ &= (a(Dp))(x), \ \forall \ a \in \mathbb{R} \ \text{ e } p \in V.\end{aligned}$$

Exemplo 3.7 (Operador Semelhança) *Seja $V = \mathbb{R}^2$. A função $T : V \to V$ definida por*

$$T(x,y) = c(x,y), \ \forall \ c \in \mathbb{R},$$

é uma transformação linear (prove isto!). Quando $c > 0$, T é chamado de operador semelhança.

Exemplo 3.8 (Rotação de uma ângulo θ) *Seja $V = \mathbb{R}^2$. Determine a transformação linear $R_\theta : V \to V$, onde $R_\theta(\mathbf{u})$ é uma rotação anti-horário de um ângulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, do vetor $\mathbf{u} \in V$.*

Solução. Sejam $\mathbf{u} = (x,y)$ e $R_\theta(x,y) = (u,v)$. Então, pela Figura 3.1,

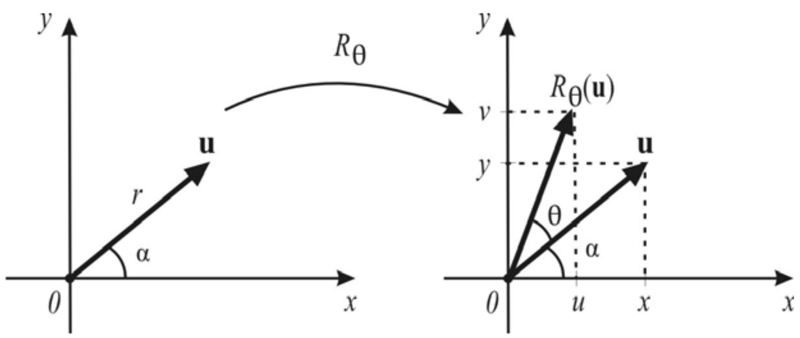


Figura 3.1: Rotação de um ângulo θ.

temos que

$$u = r\cos(\alpha+\theta), \ \ x = r\cos\alpha \ \text{ e } \ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Logo,

$$u = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

De modo análogo,

$$v = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Assim,

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

Exemplo 3.9 (Operador Translação) *Seja $V = \mathbb{R}^2$. A função $T_{\mathbf{v}} : V \to V$ definida por*

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

onde $\mathbf{u} = (x,y)$ e $\mathbf{v} = (a,b)$, não é uma transformação linear, a menos que $a = b = 0$, pois

$$T(0,0) = (a,b) \neq (0,0)$$

(*confira Figura* 3.2).

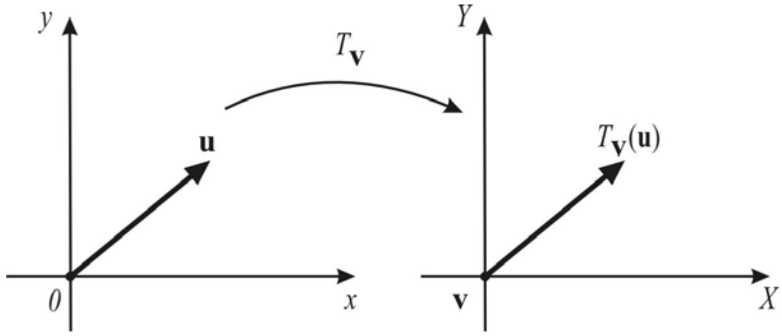


Figura 3.2: Translação por $\mathbf{v}$.

Exemplo 3.10 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. A função $T : V \to V$ definida por $T(x,y) = (x,|y|)$ não é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned} T((x,y)+(r,s)) &= T(x+r, y+s) \\ &= (x+r, |y+s|) \\ &\neq (x,|y|) + (r,|s|) \\ &= T(x,y) + T(r,s), \end{aligned}$$

desde que $|y+s| < |y| + |s|$ se $ys < 0$. Em particular,

$$T((2,1)+(3,-1)) = T(5,0) = (5,0) \neq (5,2) = T(2,1) + T(3,-1)$$

Note que $T(0,0) = (0,0)$. Portanto, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é condição necessária mas não suficiente para que T seja uma transformação linear.

Exemplo 3.11 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Mostre que se a função $T : V \to W$ satisfaz à condição aditiva*

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}),\ \ \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in V,$$

então T é uma transformação linear.

Solução. Como $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ temos que

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}).$$

Logo, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Assim,

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = T(\mathbf{u}) + T(-\mathbf{u}) \Rightarrow T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u}),\ \ \mathbf{u} \in V.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, segue, indutivamente, que $T(n\mathbf{u}) = nT(\mathbf{u})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{u} \in V$. Dado $n \in \mathbb{Z}$ com $n < 0$, obtemos

$$T(n\mathbf{u}) = T(-n(-\mathbf{u})) = -nT(-\mathbf{u}) = -n(-T(\mathbf{u})) = nT(\mathbf{u}).$$

Assim, $T(n\mathbf{u}) = nT(\mathbf{u})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{u} \in V$. Dado $n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$, obtemos

$$T(\mathbf{u}) = T(n(\frac{1}{n}\mathbf{u})) = nT(\frac{1}{n}\mathbf{u}).$$

Logo, $T(\frac{1}{n}\mathbf{u}) = \frac{1}{n}T(\mathbf{u})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, e $\mathbf{u} \in V$. Finalmente, dado $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, obtemos

$$T(r\mathbf{u}) = T(m(\frac{1}{n}\mathbf{u})) = mT(\frac{1}{n}\mathbf{u}) = \frac{m}{n}T(\mathbf{u}) = rT(\mathbf{u})$$

e, assim, $T(r\mathbf{u}) = rT(\mathbf{u})$, para todo $r \in \mathbb{Q}$ e $\mathbf{u} \in V$. Portanto, T é uma transformação linear. Assim, podemos cuncluir que toda função definida em espaço vetorial sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$, satisfazendo à condição aditiva, é sempre linear. Mostraremos a seguir, que esse resultado não é, em geral, verdade.

Teorema 3.12 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base de V e $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ vetores arbitrários em W. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Prova. (Existência) Como $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base de V temos que cada vetor $\mathbf{u} \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Vamos definir $T : V \to W$ por

$$T(\mathbf{u}) = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i.$$

É claro que T está bem definida e

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, \ldots, n,$$

pois

$$\mathbf{u}_i = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_{i-1} + 1\mathbf{u}_i + 0\mathbf{u}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{u}_n, i = 1, \ldots, n.$$

Dados $\mathbf{v} \in V$, digamos

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_n\mathbf{u}_n,$$

e $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{w}_i = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(cx_i)\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(cx_i)\mathbf{w}_i \\ &= c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i\right) = cT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Portanto, T é uma transformação linear.

(Unicidade) Seja $S : V \to W$ outra transformação linear tal que

$$S(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Então

$$S(\mathbf{u}) = S\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_iS(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i = T(\mathbf{u}),$$

para todo $\mathbf{u} \in V$. Portanto, $S = T$. ■

Observação 3.13 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_i\}_{i\in I}$ uma base de V e $\{\mathbf{w}_i\}_{i\in I}$ uma família arbitrário de vetores em W. Então existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que*

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i, \ \forall \ i \in I.$$

Exemplo 3.14 *Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,2) = (3,2,1)$ e $T(3,4) = (6,5,4)$.*

Solução. É fácil verificar que $\{(1,2),(3,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,2) = (3,2,1)$ e $T(3,4) = (6,5,4)$. Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1,2) + s(3,4),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r + 3s = x \\ 2r + 4s = y \end{cases}.$$

Logo, $r = \frac{1}{2}(-4x + 3y)$ e $s = \frac{1}{2}(2x - y)$. Portanto,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(r(1, 2) + s(3, 4)) \\ &= rT(1, 2) + sT(3, 4) \\ &= \frac{-4x + 3y}{2}(3, 2, 1) + \frac{2x - y}{2}(6, 5, 4) \\ &= \left(\frac{3}{2}y, x + \frac{1}{2}y, 2x - \frac{1}{2}y\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3.15 (Operador Projeção) *Determine a projeção de um vetor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *sobre a reta* $y = ax$*, com* $a \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\{(1, a), (-a, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $P(1, a) = (1, a)$ e $P(-a, 1) = (0, 0)$. Agora, para determinar P, dado $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1, a) + s(-a, 1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r - as = x \\ ar + s = y \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}, \frac{ax + a^2 y}{1 + a^2}\right) \\ &= \frac{\langle (x, y), (1, a) \rangle}{\|(1, a)\|^2}(1, a). \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{R}^2 = [(1, a)] \oplus [(-a, 1)],$$

dizemos que P é *a projeção sobre* $[(1, a)]$ *na direção de* $[(-a, 1)]$, com $a \in \mathbb{R}$ (confira Figura 3.3).

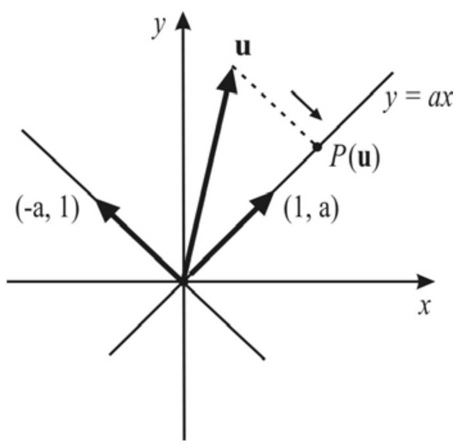


Figura 3.3: Projeção de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sobre a reta $y = ax$.

Exemplo 3.16 (Operador Reflexão) *Determine a reflexão de um vetor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *em torno de uma reta* $y = ax$*, com* $a \in \mathbb{R}$*.*

Solução. É fácil verificar que $\{(1, a), (-a, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Então, pelo Teorema 3.12, existe uma única transformação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, a) = (1, a)$ e $R(-a, 1) = (a, -1)$. Agora, para determinar R, dado $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1, a) + s(-a, 1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r - as = x \\ ar + s = y \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left(\frac{(1 - a^2)x + 2ay}{1 + a^2}, \frac{2ax - (1 - a^2)y}{1 + a^2} \right) \\ &= (x, y) - 2\frac{\langle (x, y), (1, a) \rangle}{\|(1, a)\|^2}(1, a). \end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{R}^2 = [(1, a)] \oplus [(-a, 1)],$$

dizemos que P é *a reflexão em* $[(1, a)]$ *na direção de* $[(-a, 1)]$, com $a \in \mathbb{R}$ (confira Figura 3.4).

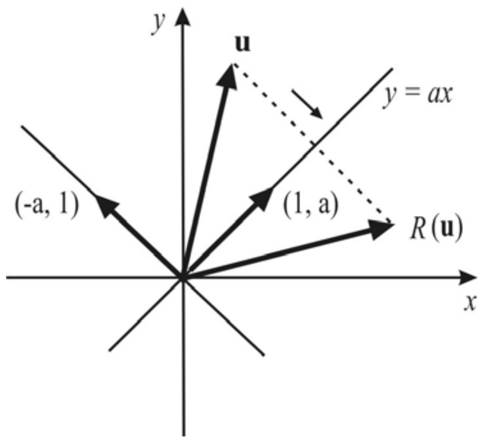


Figura 3.4: Reflexão de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ em torno da reta $y = ax$.

Finalmente, se θ é o ângulo que a reta $y = ax$ faz com o eixo dos x, então $a = \tan \theta$ e é fácil verificar que

$$R(x, y) = (x \cos 2\theta + y \operatorname{sen} 2\theta, x \operatorname{sen} 2\theta - y \cos 2\theta).$$

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, temos que

$$R(x, y) = (y, x).$$

Exemplo 3.17 *Mostre que existe uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo à condição aditiva*

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R},$$

mas não é uma transformação linear, isto é, $T(x) \neq ax$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

Solução. É fácil verificar que $\mathbb{R}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Assim, pela Observação 2.38, podemos escolher uma base "de Hamel" $\beta = \{x_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, existem únicos $r_{k_1}, \ldots, r_{k_n} \in \mathbb{Q}$, onde $k_1, \ldots, k_n \in I$, tais que

$$x = r_{k_1} x_{k_1} + \cdots + r_{k_n} x_{k_n} = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} x_{k_j}.$$

A função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j} T(x_{k_j}), \;\; \forall \; x \in \mathbb{R},$$

possui as propriedades desejadas, pois se fizermos

$$T(x_{k_1}) = 1 \;\text{ e }\; T(x_{k_2}) = 0,$$

então

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}, \;\text{ mas }\; T(x) \neq ax, \;\text{ para algum }\; a \in \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Verifique quais das transformações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$.

   (c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, -x)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x^3)$.

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. Seja $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{n \times n}$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não-nula fixada em $\mathbf{V}$, quais das seguintes transformações são lineares?

   (a) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$.

   (b) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$.

(c) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(d) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$.

(e) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}$.

3. Sejam $\mathbf{V} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $h \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre que cada uma das funções $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tf)(x) = f(x + h)$. (Deslocamento)

   (b) $(Tf)(x) = f(x + h) - f(x)$. (Diferença para frente)

   (c) $(Tf)(x) = f(x) - f(x - h)$. (Diferença para trás)

   (d) $(Tf)(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})$. (Diferença central)

   (e) $(Tf)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})\right)$. (Valor médio)

4. (**Operador Integração**) Seja $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas. Mostre que a função $J : V \to V$ definida por

$$(Jf)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

   é uma transformação linear.

5. (**Operador Cisalhamento na direção de** x) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 0) = (1, 0)$ e $T(0, 1) = (a, 1)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$. Defina **Operador Cisalhamento na direção de** y.

6. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 2) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

7. Determine o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça $T(1, 0) = (a, b)$ e $T(0, 1) = (c, d)$.

8. Seja $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais. Mostre que cada uma das funções $T : V \to V$ abaixo é uma transformação linear:

   (a) $(Tp)(x) = xp(x)$ (Multiplicação por x).

   (b) $(Tp)(x) = \frac{p(x) - a_0}{x}$ (Eliminação do termo constante e divisão por x).

9. Sejam $S : V \to W$ e $T : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $S + T$ e aT, para todo $a \in \mathbb{R}$, são lineares. Conclua que o conjunto de todas as transformações lineares $L(V, W)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

10. Se $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$, determine uma base de $L(V, W)$. (Sugestão: Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases de V e W, respectivamente. Então as transformações lineares

$$E_{ij}(\mathbf{v}_k) = \delta_{ik}\mathbf{w}_j = \begin{cases} \mathbf{w}_j & \text{se } i = k \\ \mathbf{0} & \text{se } i \neq k \end{cases}, i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2, 3,$$

estão bem definidas e são únicas. Agora mostre que o conjunto

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$$

é uma base de $L(V, W)$). Generalize.

11. Sejam $R : U \to V$, $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares. Mostre que $T \circ S$ é uma transformação linear e

$$T \circ (R + S) = T \circ R + T \circ S.$$

12. Sejam $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares definidos por $R(x, y) = (x, 0)$, $S(x, y) = (y, x)$ e $T(x, y) = (0, y)$. Determine:

    (a) $S + T$ e $3S - 5T$.

    (b) $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ T$, $T \circ R$, $S \circ T$ e $T \circ S$.

    (c) R^2, S^2 e T^2.

    (d) Mostre que S e T são LI.

13. Sejam $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e $D : V \to V$ e $M : V \to V$ operadores lineares definidos por

$$(Dp)(x) = p'(x) \text{ e } (Mp)(x) = xp(x).$$

Mostre que $MD - DM = I$ e $(DM)^2 = D^2M^2 + DM$.

14. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $f : V \to W$ uma função. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) Se $\mathbf{w} - \mathbf{u} = c(\mathbf{v} - \mathbf{w})$, então $f(\mathbf{w}) - f(\mathbf{u}) = c(f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}))$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$;

    (b) $f(\mathbf{z}) = T(\mathbf{z}) + \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{z} \in V$, onde $\mathbf{x} \in W$ e $T : V \to W$ é uma transformação linear;

    (c) $f(\sum_{i=0}^{n} c_i\mathbf{u}_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(\mathbf{u}_i)$, para todo $\mathbf{u}_i \in V$ e $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, com $c_1 + \cdots + c_n = 1$.

(Sugestão: $(a \Rightarrow b)$ Sejam $\mathbf{x} = f(\mathbf{0}) \in W$ e $T : V \to W$ definida por $T(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - \mathbf{x}$. Agora, vamos provar que T é linear. Como $\mathbf{y} - c\mathbf{y} = (c-1)(\mathbf{0} - \mathbf{y})$ temos que

$$T(\mathbf{y}) - T(c\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) - f(c\mathbf{y}) = (c-1)[f(\mathbf{0}) - f(\mathbf{y})] = (c-1)(-T(\mathbf{y})).$$

Logo, $T(c\mathbf{y}) = cT(\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{y} \in V$ e $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, como

$$2\mathbf{z} - (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{y} = -\frac{1}{2}(2\mathbf{y} - 2\mathbf{z})$$

temos que

$$\begin{aligned} 2T(\mathbf{z}) - T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= T(2\mathbf{z}) - T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(2\mathbf{z}) - f(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \\ &= -\frac{1}{2}[f(2\mathbf{y}) - f(2\mathbf{z})] = -[T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{z})]. \end{aligned}$$

Portanto, $T(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = T(\mathbf{y}) + T(\mathbf{z})$, para todos $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.)

15. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que se $\mathbf{u} \in V$ é tal que $T^{k-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, então o conjunto

    $$\{\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), \ldots, T^{k-1}(\mathbf{u})\}$$

    é LI.

    (b) Mostre que se

    $$W = [\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), \ldots, T^{k-1}(\mathbf{u})],$$

    então $T(\mathbf{v}) \in W$, para todo $\mathbf{v} \in W$.

3.2 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \{\mathbf{w} \in W : \mathbf{w} = T(\mathbf{u}), \text{ para algum } \mathbf{u} \in V\} \\ &= \{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in V\} \\ &= T(V) \end{aligned}$$

(confira Figura 3.5).

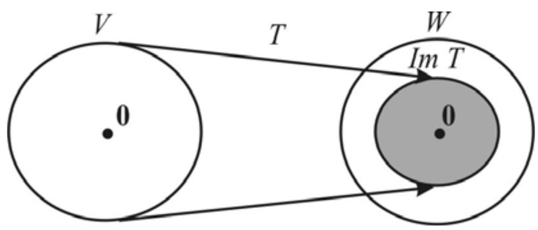


Figura 3.5: Representação gráfica da imagem de T.

O *núcleo* de T é o conjunto

$$\begin{aligned} \ker T &= \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \\ &= T^{-1}(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

(confira Figura 3.6).

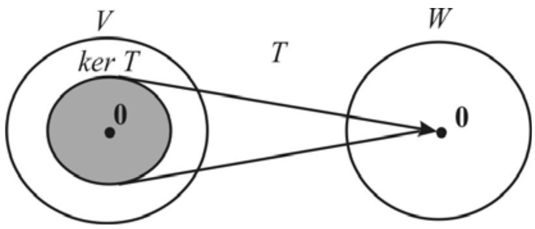


Figura 3.6: Representação gráfica do núcleo de T.

Teorema 3.18 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W e $\ker T$ é um subespaço de V.*

Prova. Vamos provar apenas que $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W. É claro que $\operatorname{Im} T \neq \emptyset$, pois

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \in \operatorname{Im} T.$$

Dados $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im} T$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in \operatorname{Im} T$ temos que existem $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in V$ tais que

$$\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) \text{ e } \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) \\ &= T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in \operatorname{Im} T, \end{aligned}$$

pois $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in V$, e

$$\begin{aligned} a\mathbf{w}_1 &= aT(\mathbf{u}_1) \\ &= T(a\mathbf{u}_1) \in \operatorname{Im} T, \end{aligned}$$

pois $a\mathbf{u}_1 \in V$. Portanto, $\operatorname{Im} T$ é um subespaço de W. ■

Observação 3.19 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear com $\dim V = n$. Então*

$$\operatorname{posto}(T) = \dim \operatorname{Im} T \ \ e \ \ \operatorname{nul}(T) = \dim \ker T.$$

Exemplo 3.20 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 0).$$

Determine o núcleo e a imagem de T.

Solução. Por definição

$$\begin{aligned}\ker T &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=(0,0,0)\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,2y,0)=(0,0,0)\}\\ &= \{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}\}\\ &= [(0,0,1)]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} T &= \{T(x,y,z) : (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{(x,2y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}\\ &= [(1,0,0),(0,2,0)].\end{aligned}$$

Finalmente, como $T(1,0,0)=(1,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,2,0)$ e $T(0,0,1)=(0,0,0)$ temos que

$$\operatorname{Im} T = [T(1,0,0), T(0,1,0)]$$

(confira Figura 3.7).

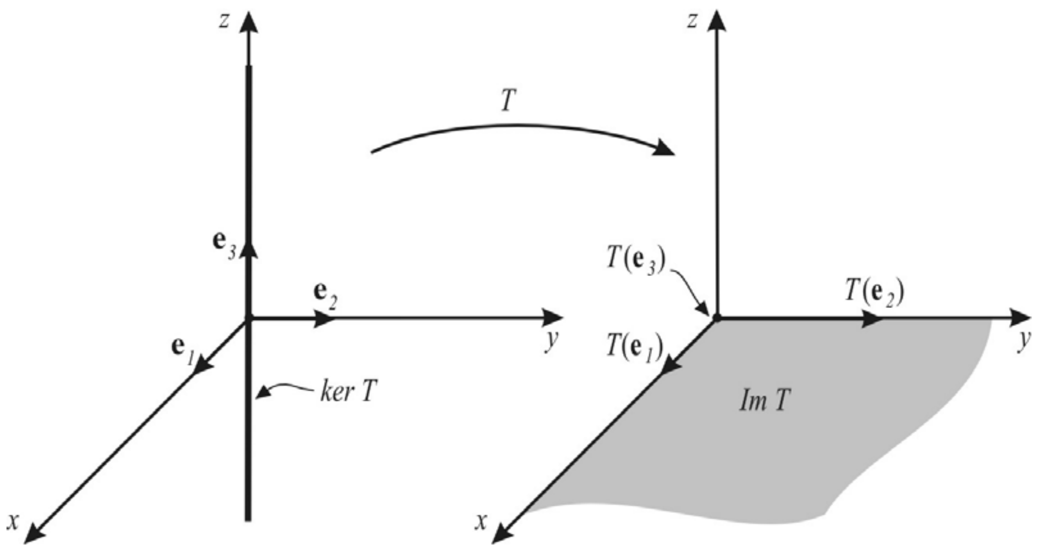


Figura 3.7: Representação gráfica do núcleo e da imagem de T.

Exemplo 3.21 *Determine uma transformação linear* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\operatorname{Im} T = [(1,0,0,-1),(0,1,1,0)].$$

Solução. É fácil verificar que

$$\alpha = \{(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\}$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$. Como $(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\in\operatorname{Im} T$ temos que existem $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(\mathbf{u}_1)=(1,0,0,-1) \text{ e } T(\mathbf{u}_2)=(0,1,1,0).$$

Seja $W = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$. Então $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base de W, pois α é uma base de $\operatorname{Im} T$.

Afirmação. $\mathbb{R}^3 = W \oplus \ker T$.

De fato, dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, temos que $T(\mathbf{u}) \in \operatorname{Im} T$. Logo, existem $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= y_1(1,0,0,-1) + y_2(0,1,1,0) = y_1 T(\mathbf{u}_1) + y_2 T(\mathbf{u}_2) \\ &= T(y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$T\left(\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2)\right) = T(\mathbf{u}) - T(y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

isto é,

$$\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) \in \ker T.$$

Portanto, existe $\mathbf{v} \in \ker T$ tal que

$$\mathbf{u} - (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} = (y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2) + \mathbf{v} \in W + \ker T,$$

ou seja, $\mathbb{R}^3 = W + \ker T$. Agora, é fácil verificar que $W \cap \ker T = \{\mathbf{0}\}$. Escolhendo uma base $\{\mathbf{u}_3\}$ para $\ker T$, obtemos uma base

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

para $\mathbb{R}^3$. Em particular, escolhendo $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$ temos, pelo Teorema 3.12, que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(\mathbf{u}_1) = (1,0,0,-1), T(\mathbf{u}_2) = (0,1,1,0) \text{ e } T(\mathbf{u}_3) = (0,0,0,0).$$

Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(\mathbf{u}_1) + yT(\mathbf{u}_2) + zT(\mathbf{u}_3) \\ &= (x,y,y,-x). \end{aligned}$$

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é *injetora* se

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}, \;\; \forall\; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \Rightarrow T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v}), \;\; \forall\; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Dizemos que T é *sobrejetora* se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{u} \in V$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$, isto é, $\operatorname{Im} T = W$. Finalmente, dizemos que T é *bijetora* se T é injetora e sobrejetora. Neste caso,

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{w}).$$

Exemplo 3.22 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por $T(x, y) = x$. Então T é sobrejetora, pois*

$$\operatorname{Im} T = \{T(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x \cdot 1 : x \in \mathbb{R}\} = [1] = \mathbb{R}.$$

Mas não é injetora, pois $T(0, 1) = 0 = T(0, -1)$ e $(0, 1) \neq (0, -1)$.

Exemplo 3.23 *Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x) = (x, 0)$. Então T é injetora, pois*

$$T(x) = T(y) \Rightarrow (x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y.$$

Mas não é sobrejetora, pois $T(x) \neq (0, 1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.24 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Então T não é injetora e nem sobrejetora, pois*

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0) = T(0, 0, -1)$$

com $(0, 0, 1) \neq (0, 0, -1)$ e $T(x, y, z) \neq (0, 0, 1)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, isto é, $\operatorname{Im} T \neq \mathbb{R}^3$.

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é *não-singular* se $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Caso contrário, dizemos que T é *singular*.

Teorema 3.25 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então T é não-singular se, e somente se, T é injetora.*

Prova. Suponhamos que T seja não-singular, isto é, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, se $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, então

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Logo, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker T = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ou seja, T é injetora. Reciprocamente, suponhamos que T seja injetora. Dado $\mathbf{u} \in \ker T$, temos que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Como $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ temos que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Assim, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, T é não-singular. ■

Corolário 3.26 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então T é não-singular se, e somente se, T leva todo conjunto LI de V em algum conjunto LI de W.*

Prova. Suponhamos que T seja não-singular, isto é, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Seja

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

conjunto qualquer LI de V. Devemos provar que

$$T(\alpha) = \{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI de W. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$T(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) = x_1T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Assim,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n \in \ker T = \{\mathbf{0}\},$$

isto é,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Logo, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, pois α é LI. Portanto,

$$\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI de W. Reciprocamente, seja $\mathbf{u} \in \ker T$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Então $\{\mathbf{u}\}$ é um conjunto LI de V. Assim, $\{T(\mathbf{u})\} = \{\mathbf{0}\}$ é um conjunto LI de W, o que é impossível. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e T é não-singular. ■

Teorema 3.27 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \\ &= \operatorname{nul}(T) + \operatorname{posto}(T).\end{aligned}$$

Prova. Como $\ker T$ é um subespaço de V temos que $\ker T$ contém uma base

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

que é parte de uma base

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V.

Afirmação. $\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$.

De fato, dado $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} T$, existe $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$. Como $\mathbf{u} \in V$ e β é uma base de V temos que existem $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= T(\mathbf{u}) \\ &= T(x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n) \\ &= x_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + x_nT(\mathbf{u}_n),\end{aligned}$$

pois $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, k$. Logo,

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

gera $\operatorname{Im} T$. Agora, para provar que

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI, sejam $y_{k+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + y_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Então

$$T(y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n) = y_{k+1}T(\mathbf{u}_{k+1}) + \cdots + y_nT(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

Assim,

$$y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n \in \ker T.$$

Logo, existem $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + y_n\mathbf{u}_n = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k.$$

Donde,

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + (-y_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (-y_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Como β é uma base de V temos que $y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$ e

$$\{T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto LI. Portanto,

$$\dim V = n = k + (n-k) = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T.$$

■

Corolário 3.28 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = \dim W = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Prova. Suponhamos que T seja injetora. Então, pelo Teorema 3.25, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. Assim,

$$\dim W = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T.$$

Como $\operatorname{Im} T \subseteq W$ e $\dim W = \dim \operatorname{Im} T$ temos que $\operatorname{Im} T = W$. Portanto, T é sobrejetora. Reciprocamente, suponhamos que T seja sobrejetora. Então $\operatorname{Im} T = W$ e $\dim W = \dim \operatorname{Im} T$. Assim,

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow \dim \ker T = 0.$$

Assim, $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ e, pelo Teorema 3.25, T é injetora. ■

Corolário 3.29 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = \dim W = n$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. *T é bijetora.*
2. *T é não-singular.*
3. *T é sobrejetora.*
4. *T leva toda base de V em alguma base de W.* ■

Exemplo 3.30 *Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que*

$$\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Solução. É fácil verificar que

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

é uma base de $\ker T$. Como $\ker T$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ temos que

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

é parte de uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos estender este conjunto a uma base de $\mathbb{R}^3$, digamos

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}.$$

Assim, definindo arbitrariamente $T(0, 0, 1)$, digamos $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$, temos, pelo Teorema 3.12, que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0), T(0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \text{ e } T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1).$$

Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, devemos encontrar $r, s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1, 0, -1) + s(0, 1, -1) + t(0, 0, 1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r = x \\ s = y \\ -r - s + t = z \end{cases}.$$

Logo,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0, x + y + z).$$

Teorema 3.31 *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear bijetora. Então a transformação inversa $T^{-1} : W \to V$ é linear.*

Prova. É claro que $T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, pois $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dados $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 \in W$, $a \in \mathbb{R}$ e T sendo bijetora temos que existem únicos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \in V$ tais que

$$\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1) \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) \text{ e } \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2) \Leftrightarrow \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_2).$$

Como

$$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

temos que

$$T^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = T^{-1}(\mathbf{w}_1) + T^{-1}(\mathbf{w}_2).$$

Finalmente, como

$$T(a\mathbf{u}_1) = aT(\mathbf{u}_1) = a\mathbf{w}_1$$

temos que

$$T^{-1}(a\mathbf{w}_1) = a\mathbf{u}_1 = aT^{-1}(\mathbf{w}_1).$$

Portanto, T^{-1} é linear. ■

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Dizemos que T é um *isomorfismo* se T é bijetora. Se existir um isomorfismo de V sobre W, dizemos que V é *isomorfo* a W e será denotado por $V \simeq W$. Intuitivamente, um isomorfismo T de V sobre W é uma regra que consiste em renomear os elementos de V, isto é, o nome do elemento sendo $T(\mathbf{u})$ ao invés de $\mathbf{u} \in V$.

Exemplo 3.32 *Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ é um isomorfismo e determine uma regra para T^{-1} como a que define T.*

Solução. Como

$$\begin{aligned} \ker T &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \end{aligned}$$

temos que T é injetora. Portanto, T é isomorfismo. Assim, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, existe um único $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow T^{-1}(a,b,c) = (x,y,z).$$

Logo,

$$(a,b,c) = (x-2y, z, x+y),$$

isto é,

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ \qquad z = b \\ x + y = c \end{cases}.$$

Assim,

$$x = \frac{a+2c}{3}, y = \frac{c-a}{3} \text{ e } z = b.$$

Portanto,

$$T^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+2c}{3}, \frac{-a+c}{3}, b\right),$$

ou ainda,

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{-x+z}{3}, y\right).$$

Teorema 3.33 *Todo espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Prova. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$ e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ordenada de V. Então para cada $\mathbf{u} \in V$ existem únicos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i.$$

Vamos definir $T_\beta : \mathbb{R}^n \to V$ por

$$T_\beta(x_1, \ldots . x_n) = \mathbf{u}.$$

É fácil verificar que T_β está bem definida, é linear e injetora. Portanto, V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

Observações 3.34 1. *A transformação linear $T_\beta : \mathbb{R}^n \to V$ é chamada a* parametrização *de V dada pela base β e T_β^{-1} é chamada de* isomorfismo de base canônica *de V associada com a base β.*

2. *Sejam $T : V \to W$ um isomorfismo e $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ um subconjunto de V. Então S é LI se, e somente se, $T(S)$ é LI. Portanto, ao decidirmos que S é LI não importa se consideramos S ou $T(S)$, confira Corolário* 3.26.

EXERCÍCIOS

1. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

   (a) Mostre se U é um subespaço de V, então o conjunto
   $$T(U) = \{T(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$$
   é um subespaço de W.

   (b) Mostre que se Z é um subespaço de W, então o conjunto
   $$T^{-1}(Z) = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) \in Z\}$$
   é um subespaço de V.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por $T(x, y) = (x + y, y)$,
   $$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\},\ \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \text{ e} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$
   Determine $T(A)$, $T(B)$ e $T(C)$.

3. Para cada tranformação linear abaixo determine o núcleo e a imagem:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (y - x, 0, 5x)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y + z, z)$.

4. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se
   $$\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n],$$
   então
   $$\operatorname{Im}(T) = [T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)].$$

5. Seja T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ a função definida por
   $$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z).$$

   (a) Verifique que T é uma transformação linear.

   (b) Se (a, b, c) é um vetor em $\mathbb{R}^3$, quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja na imagem de T? Qual é o posto de T?

(c) Quais as condições sobre a, b e c, para que o vetor esteja no núcleo de T? Qual é a nulidade de T?

6. Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ uma transformação linear. Mostre que se

$$\{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é um conjunto linearmente independente de W, então

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é um conjunto linearmente independente de V.

7. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Im} T = [(1, 0, -1), (1, 2, 2)].$$

8. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Im} T = [(1, 2, 3), (4, 0, 5)].$$

9. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\ker T = [(1, 1, 0)].$$

10. Determine uma transformação linear sobrejetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1, 0) = T(0, 0, 1)$.

11. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ e $T(1, 1, 1) = (0, 1)$?

12. Existe uma transformação linear T de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ e $T(-3, 2) = (1, 1)$?

13. Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares.

    (a) Mostre que $\operatorname{Im}(T \circ S) \subseteq \operatorname{Im} T$ e $\operatorname{posto}(T \circ S) \leq \operatorname{posto}(T)$.

    (b) Mostre que $\ker S \subseteq \ker(T \circ S)$ e $\operatorname{nul}(S) \leq \operatorname{nul}(S \circ T)$.

14. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares de V tais que

$$\operatorname{nul}(T_1) = \operatorname{nul}(T_2) = 0.$$

Mostre que $\operatorname{nul}(T_1 \circ T_2) = 0$.

15. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares com $\dim V = n$. Mostre que:

(a) $\text{posto}(T+S) \leq \text{posto}(S) + \text{posto}(T)$.

(b) $\text{nul}(S) + \text{nul}(T) - n \leq \text{nul}(S+T)$.

(c) $\max\{\text{nul}(S), \text{nul}(T)\} \leq \text{nul}(S \circ T) \leq \text{nul}(S) + \text{nul}(T)$.

(d) $\text{posto}(S) + \text{posto}(T) - n \leq \text{posto}(S \circ T) \leq \min\{\text{posto}(S), \text{posto}(T)\}$.

16. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) $V = \ker T + \operatorname{Im} T$;

    (b) $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$;

    (c) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{\mathbf{0}\}$;

    (d) $\ker T^2 = \ker T$;

    (e) $\operatorname{Im} T^2 = \operatorname{Im} T$;

    (f) $T \circ S \circ T = T$ e $\operatorname{Im}(S \circ T) = \operatorname{Im} T$, para algum operador linear $S : V \to V$ invertível.

    Conclua que $T^2 = cT$, para algum $c \in \mathbb{R}^*$, satisfaz essas condições e determine vários operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaça essas condições.

17. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear com $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

    (a) Mostre que se $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora.

    (b) Mostre que se $\dim V > \dim W$, então T não pode ser injetora.

18. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Mostre que V e W são isomorfos se, e somente se, $m = n$.

19. Descreva explicitamente um isomorfismo de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

20. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço W de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

21. Determine o operador linear $T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que faz cada vetor girar de um ângulo fixo θ em torno do eixo z.

22. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Mostre que $\ker T = \operatorname{Im} T$ se, e somente se, $T^2 = 0$ mas $T \neq 0$. Determine todos os operadores lineares com essa propriedade!

23. Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $\mathbf{w}_0 \in W$ um vetor fixado. Se a equação $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}_0$ tem uma solução $\mathbf{u}_0 \in V$, mostre que toda solução desta equação em V é da forma $\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$, para algum $\mathbf{v} \in \ker T$.

24. Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ com $T(\mathbf{e}_1) = (1,0,0)$, $T(\mathbf{e}_2) = (0,1,0)$ e cujo núcleo consiste dos vetores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ tais que

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{array}\right. ?$$

25. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to \mathbb{R}^3$ um isomorfismo. Sejam

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in V$$

tais que

$$T(\mathbf{u}_1) = (1,0,1), T(\mathbf{u}_2) = (-2,1,0), T(\mathbf{u}_3) = (-1,1,1), T(\mathbf{u}_4) = (2,1,3).$$

(a) $\mathbf{u}_1$ está no subespaço gerado por $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$?

(b) Sejam $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ e $W_2 = [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$. Qual é a interseção de W_1 com W_2?

(c) Determine uma base do subespaço de V gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$.

26. Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ um transformação linear. Mostre que se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$ e $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, onde $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$, então α é LI e $V = [\alpha] \oplus \ker T$.

27. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que se existir um operador linear $S : V \to V$ tal que $S \circ T = I$, então T^{-1} existe e $T^{-1} = S$.

28. Sejam $V = P(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e $D, E, T, U : V \to V$ operadores lineares definidos por

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) &= \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}, \quad E\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}, \\ T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i+1} \text{ e } U\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}. \end{aligned}$$

Mostre que:

(a) E é não-singular mas não é sobrejetora. Além disso, $DE = I$ e $ED \neq I$.

(b) T é não-singular mas não é sobrejetora. Além disso, $UT = I$ e $TU \neq I$.

29. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que se $T^2 - T + I = O$, então T é invertível. Determine T^{-1} em função de T.

30. Sejam $S, T : V \to V$ operadores lineares com $\dim V = n$. Mostre que S e T são invertíveis se, e somente se, $S \circ T$ e $T \circ S$ são invertíveis.

31. Sejam $S_i, T_i : V \to V$, $i = 1, 2$, operadores lineares com $\dim V = n$. Mostre que se $S_1 + S_2$ e $S_1 - S_2$ são invertíveis, então existem operadores lineares $X_i : V \to V$, $i = 1, 2$, tais que

$$S_1 \circ X_1 + S_2 \circ X_2 = T_1 \text{ e } S_2 \circ X_1 + S_1 \circ X_2 = T_2.$$

32. Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $S : V \to W$ um isomorfismo. Mostre que a função $f : L(V, V) \to L(W, W)$ definida por $f(T) = S \circ T \circ S^{-1}$ é um isomorfismo.

33. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Seja

$$V \times W = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) : \mathbf{v} \in V \text{ e } \mathbf{w} \in W\}$$

o produto cartesiano entre V e W.

(a) Mostre que $V \times W$ com as operações de adição

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

e multiplicação por escalar

$$a(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) = (a\mathbf{v}_1, a\mathbf{w}_1)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$. (Sugestão: Sejam $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases para V e W, respectivamente. Mostre que

$$\{(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}), \ldots, (\mathbf{v}_m, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_1), \ldots, (\mathbf{0}, \mathbf{w}_n)\}$$

é uma base de $V \times W$.)

(c) Seja U um subespaço de V. Mostre que

$$U_d = \{(\mathbf{u}, \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U\}$$

é um subespaço de $V \times V$. Além disso, mostre que se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base ordenada de W, então

$$\{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1), \ldots, (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k)\}$$

é uma base ordenada de U_d. Conclua que $\dim U = \dim U_d$.

34. Sejam V espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V.

(a) Mostre que a função $T : W_1 \times W_2 \to V$ definida por $T(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ é uma transformação linear.

(b) Mostre que $\operatorname{Im} T = W_1 + W_2$.

(c) Mostre que

$$\ker T = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}) : \mathbf{w} \in W_1 \cap W_2\}.$$

Qual a base e a dimensão para $\ker T$.

(d) Mostre que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

35. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{Im}(T^k) \cap \ker(T^k) = \{\mathbf{0}\}.$$

(Sugestão: Mostre que $\ker(T^m) \subseteq \ker(T^{m+1})$ e $\operatorname{Im}(T^{m+1}) \subseteq \operatorname{Im}(T^m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.)

36. Sejam $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita. Mostre que

$$\dim \operatorname{Im}(T \circ S) = \dim \operatorname{Im} S - \dim(\operatorname{Im} S \cap \ker T).$$

3.3 Transformações Lineares e Matrizes

Nesta seção mostraremos, de um ponto de vista matemático, que o estudo de transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita pode ser reduzido ao estudo de matrizes.

Já vimos no Exemplo 3.5 que, para cada matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$ fixada, existe uma única transformação linear $T_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ definida por

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}, \ \forall \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Reciprocamente, seja $T : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ uma transformação linear. Então existe uma única matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$ tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}, \ \forall \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

De fato, dado

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

temos que

$$\mathbf{u} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{E}_i.$$

Logo,

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\mathbf{E}_i)$$

Assim, fazendo $\mathbf{C}_i = T(\mathbf{E}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz $m \times n$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$.

Mais geralmente, sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}, \ \ \beta = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}.$$

bases ordenadas de V e W, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n) \in W.$$

Como β é uma base de W temos que existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{w}_i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema será chamada a *representação matricial* de T em relação às bases α e β e denotada por

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Observações 3.35 *1. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$ e*

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}, \ \ \beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

bases ordenadas de V. Sejam T_α e T_β duas parametrizações para V. Então a representação matricial do operador linear $T_\alpha^{-1} \circ T_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ é

$$[T_\alpha^{-1} \circ T_\beta] = [I]_\alpha^\beta,$$

isto é, $[T_\alpha^{-1} \circ T_\beta]$ é a matriz de mudança de base da base β para a base α, pois

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{u}_i, j = 1, \ldots, n,$$

onde $[I]_\alpha^\beta = [a_{ij}]$, *implica que*

$$T_\alpha^{-1} \circ T_\beta(\mathbf{e}_j) = T_\alpha^{-1}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(T_\alpha^{-1}(\mathbf{u}_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Neste caso, $T_\alpha^{-1} \circ T_\beta$ *é invertível e é chamada de* transformação de coordenadas (*confira Figura* 3.8 (1)).

2. *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *com* $\dim V = n$ *e* $\dim W = m$. *Sejam*

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \ \ e \ \ \beta = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}.$$

bases ordenadas de V *e* W, *respectivamente, e* $T : V \to W$ *uma transformação linear. Sejam* T_α *e* T_β *parametrizações para* V *e* W, *respectivamente. Então a representação matricial da transformação linear* $T_\beta^{-1} \circ T \circ T_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *em relação às bases canônicas para* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$, *respectivamente, é*

$$[T_\beta^{-1} \circ T \circ T_\alpha] = [T]_\beta^\alpha,$$

pois

$$\begin{aligned} T_\beta^{-1} \circ T \circ T_\alpha(\mathbf{e}_j) &= T_\beta^{-1}(T(\mathbf{u}_j)) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T_\beta^{-1}(\mathbf{w}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{e}_i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Assim, se identificamos V *com* $\mathbb{R}^n$ *via* T_α *e* W *com* $\mathbb{R}^m$ *via* T_β, *então* T *será identificada com* $[T]_\beta^\alpha$ (*confira Figura* 3.8 (2)).

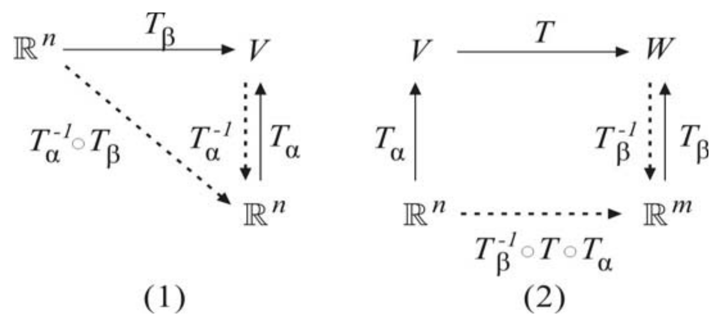


Figura 3.8: Representações gráficas de parametrizações.

Exemplo 3.36 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Sejam

$$\alpha = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \ \ e \ \ \beta = \{(1, 3), (1, 4)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$, *respectivamente. Determine* $[T]_\beta^\alpha$.

Solução. Como

$$T(1,1,1) = a_{11}(1,3) + a_{21}(1,4)$$

temos que

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 2 \\ 3a_{11} + 4a_{21} = 5. \end{cases}$$

Logo, $a_{11} = 3$ e $a_{21} = -1$. De modo inteiramente análogo, obtemos $a_{12} = 11$ e $a_{22} = -8$, $a_{13} = 5$ e $a_{23} = -3$. Portanto,

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.37 *Sejam*

$$\alpha = \{(1,1),(0,1)\} \text{ e } \beta = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*, respectivamente. Determine a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Por definição

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1) \text{ e} \\ T(0,1) &= 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3). \end{aligned}$$

Agora, para determinar T, dado $\mathbf{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, devemos encontrar $r, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = r(1,1) + s(0,1),$$

isto é, resolver o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} r = x \\ r + s = y. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= rT(1,1) + sT(0,1) \\ &= (x, -10x + 9y, -4x + 3y). \end{aligned}$$

Exemplo 3.38 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o operador linear tal que*

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

onde α *é a base canônica de* $\mathbb{R}^2$*. Determine a base ordenada* β *para* $\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Como
$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$
temos que
$$T(\mathbf{e}_1) = (1, -3) \text{ e } T(\mathbf{e}_2) = (-2, 1).$$
Agora, seja $\beta = \{(a, b), (c, d)\}$ a base desejada para $\mathbb{R}^2$. Então
$$(1, -3) = T(\mathbf{e}_1) = 1(a, b) + 4(c, d) \text{ e } (-2, 1) = T(\mathbf{e}_2) = -1(a, b) + 3(c, d).$$
Logo,
$$\begin{cases} a + 4c = 1 \\ b + 4d = -3 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -a + 3c = -2 \\ -b + 3d = 1. \end{cases}$$
Assim, $a = \frac{11}{7}$, $b = -\frac{13}{7}$, $c = -\frac{1}{7}$ e $d = -\frac{2}{7}$. Portanto,
$$\beta = \left\{\frac{1}{7}(11, -13), \frac{1}{7}(-1, -2)\right\}.$$

Teorema 3.39 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sejam*
$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \text{ e } \beta = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}.$$
bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então
$$[T(\mathbf{u})]_\beta = [T]_\beta^\alpha [\mathbf{u}]_\alpha, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Prova. Pelas equações 3.1, temos que
$$T(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i, j = 1, \ldots, n.$$
Dado $\mathbf{u} \in V$, existem únicos $x_j \in \mathbb{R}$ tais que
$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j.$$
Logo,
$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(\mathbf{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{w}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbf{w}_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[T(\mathbf{u})]_\beta &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= [T]_\beta^\alpha [\mathbf{u}]_\alpha, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.40 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que*

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde

$$\alpha = \{(1,0),(0,1)\} \ e \ \beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}.$$

Determine $T(a,b)$.

Solução. Pelo Teorema 3.39,

$$[T(a,b)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [(a,b)]_\alpha.$$

Como

$$[(a,b)]_\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

temos que

$$[T(a,b)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ b \\ -2a+3b \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T(a,b) &= (a-b)(1,0,1) + b(-2,0,1) + (-2a+3b)(0,1,0) \\
&= (a-3b, -2a+3b, a).
\end{aligned}$$

Já vimos no item 4. das Observações 1.19 como resolver um sistema não-homogêneo usando uma matriz adequada. Esta mesma técnica pode ser utilizada para obtermos simultaneamente bases para o núcleo e a imagem de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (ou $T : V \to W$ com $\dim V = n$ e $\dim W = m$). Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times m$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Dizemos que a matriz

$$[\ \mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{B}\ ]$$

é T-*associada* se

$$T(b_{i1},\ldots,b_{in})=(a_{i1},\ldots,a_{im}),\ \ i=1,\ldots,n.$$

Dizemos que a matriz

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ]$$

é *reduzida por linha à T-forma em escada de*

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]$$

se $\mathbf{R}$ for reduzida por linha à forma em escada de $\mathbf{A}$.

Observação 3.41 *Se a matriz*

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]$$

é T-associada, então a matriz reduzida por linha à T-forma em escada

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ]$$

também o é.

Exemplo 3.42 *Seja $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x,y,z,t)=(x-y+z+t,x+2z-t,x+y+3z-3t).$$

Então a matriz

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]$$

é T-associada, onde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&2\\1&3&5\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\ \ e\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Solução. Como

$$\begin{aligned}T(1,1,1,1)&=(2,2,2),\ T(1,1,1,0)=(1,3,5),\\ T(1,1,0,0)&=(0,1,2)\text{ e }T(1,0,0,0)=(1,1,1)\end{aligned}$$

temos que

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]$$

é T-associada. Agora, reduzindo a matriz

$$[\ \mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{B}\ ]=\begin{bmatrix}2&2&2&\vdots&1&1&1&1\\1&3&5&\vdots&1&1&1&0\\0&1&2&\vdots&1&1&0&0\\1&1&1&\vdots&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

à T-forma em escada, temos que

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

que é também T-associada, pois

$$\begin{aligned} T(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}) &= (1,0,-1),\ T(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}) = (0,1,2), \\ T(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}) &= (0,0,0) \text{ e } T(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (0,0,0). \end{aligned}$$

Note que as matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{S}$ são invertíveis.

Teorema 3.43 *Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear e*

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ]$$

a matriz reduzida por linha à T-forma em escada de

$$[\ [T]^t\ \vdots\ \mathbf{I}_n\ ].$$

Então

$$\{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_k\},\ \ k \leq \min\{m,n\},$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$ *e*

$$\{\mathbf{s}_{k+1},\ldots,\mathbf{s}_n\}$$

é uma base de $\ker T$*, onde* $\mathbf{r}_i$ *são as linhas não-nulas de* $\mathbf{R}$ *e* $\mathbf{s}_j$ *são as linhas de* $\mathbf{S}$*.*

Prova. É claro que

$$\{\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_k\}$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$. Dado $\mathbf{u} \in \ker T$, existem únicos $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{s}_1 + \cdots + x_k\mathbf{s}_k + x_{k+1}\mathbf{s}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n,$$

pois

$$\{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= T(\mathbf{u}) = x_1T(\mathbf{s}_1) + \cdots + x_kT(\mathbf{s}_k) + x_{k+1}T(\mathbf{s}_{k+1}) + \cdots + x_nT(\mathbf{s}_n) \\ &= x_1\mathbf{r}_1 + \cdots + x_k\mathbf{r}_k, \end{aligned}$$

pois $T(\mathbf{s}_i) = \mathbf{r}_i$, $i = 1,\ldots,k$, e $T(\mathbf{s}_j) = \mathbf{0}$, $j = k+1,\ldots,n$. Assim,

$$x_1 = 0,\ldots,x_k = 0,$$

pois os vetores $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ são LI. Logo,

$$\mathbf{u} = x_{k+1}\mathbf{s}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{s}_n.$$

Portanto, $\mathbf{s}_{k+1}, \ldots, \mathbf{s}_n$ geram $\ker T$ e

$$\{\mathbf{s}_{k+1}, \ldots, \mathbf{s}_n\}$$

é uma base de $\ker T$. ■

Corolário 3.44 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Então*

$$\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{posto}([T]^t),$$

isto é, o posto linha é igual a $\dim \operatorname{Im} T$. *Além disso,*

$$\dim \ker T = \operatorname{nul}([T]^t) = n - \operatorname{posto}([T]^t).$$

■

Exemplo 3.45 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$

Determine bases para $\operatorname{Im} T$ *e* $\ker T$.

Solução. A representação matricial de T em relação às bases ordenadas canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assim, é claro que a matriz

$$\left[\ [T]^t \ \vdots\ \mathbf{I}_4\ \right] = \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

é T-associada, pois

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 1, 1),\ T(\mathbf{e}_2) = (-1, 0, 1),\ T(\mathbf{e}_3) = (1, 2, 3) \text{ e } T(\mathbf{e}_4) = (1, -1, -3).$$

Agora, reduzindo a matriz

$$\left[\ [T]^t \ \vdots\ \mathbf{I}_4\ \right]$$

à T-forma em escada, temos que

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ] = \left[\begin{array}{rrrcrrrr} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$ e

$$\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$$

é uma base de $\ker T$.

Exemplo 3.46 *Seja* $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ *um operador linear definido por* $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$*, onde*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine bases para o núcleo e a imagem de T*.*

Solução. A representação matricial de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, é claro que a matriz

$$[\ [T]^t\ \vdots\ \mathbf{I}_4\ ] = \left[\begin{array}{rrrrcrrrr} 2 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

é T-associada, pois

$$\begin{aligned} T(\mathbf{E}_{11}) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ T(\mathbf{E}_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ T(\mathbf{E}_{21}) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } T(\mathbf{E}_{22}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, reduzindo a matriz

$$[\ [T]^t\ \vdots\ \mathbf{I}_4\ ]$$

à T-forma em escada, temos que

$$[\ \mathbf{R}\ \vdots\ \mathbf{S}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\operatorname{Im} T$ e

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\ker T$.

Teorema 3.47 *Sejam $R : U \to V$, $S : U \to V$ e $T : V \to W$ transformações lineares, α, β e γ bases ordenadas de U, V e W, respectivamente. Então*

$$[R + S]_{\beta}^{\alpha} = [R]_{\beta}^{\alpha} + [S]_{\beta}^{\alpha}, \ \ [aR]_{\beta}^{\alpha} = a\,[R]_{\beta}^{\alpha}, \ \forall\ a \in \mathbb{R} \ \ e \ \ [T \circ S]_{\gamma}^{\alpha} = [T]_{\gamma}^{\beta}\,[S]_{\beta}^{\alpha}.$$

Prova. Dado $\mathbf{u} \in U$, pelo Teorema 3.39, temos que

$$[T \circ S(\mathbf{u})]_{\gamma} = [T \circ S]_{\gamma}^{\alpha}\,[\mathbf{u}]_{\alpha} \ \text{ e } \ [T(S(\mathbf{u}))]_{\gamma} = [T]_{\gamma}^{\beta}\,[S(\mathbf{u})]_{\beta}.$$

Como

$$T \circ S(\mathbf{u}) = T(S(\mathbf{u})) \ \text{ e } \ [S(\mathbf{u})]_{\beta} = [S]_{\beta}^{\alpha}\,[\mathbf{u}]_{\alpha}$$

temos que

$$[T \circ S]_{\gamma}^{\alpha}\,[\mathbf{u}]_{\alpha} = [T]_{\gamma}^{\beta}\,[S]_{\beta}^{\alpha}\,[\mathbf{u}]_{\alpha}.$$

Assim, pela unicidade das coordenadas, temos que

$$[T \circ S]_{\gamma}^{\alpha} = [T]_{\gamma}^{\beta}\,[S]_{\beta}^{\alpha}.$$

■

Corolário 3.48 *Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e α, β bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então:*

1. *Se T é um isomorfismo, então $[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$.*

2. *T é um isomorfismo se, e somente se, $\det([T]_{\beta}^{\alpha}) \neq 0$.*

3. *T é singular se, e somente se, $\det([T]_{\beta}^{\alpha}) = 0$.*

Prova. Vamos provar apenas o item (1). Pelo Teorema 3.31, $T^{-1}: V \to W$ existe e é linear. Logo,

$$T^{-1} \circ T = I_V \text{ e } T \circ T^{-1} = I_W.$$

Assim,

$$\mathbf{I} = [I_V]_\alpha^\alpha = \left[T^{-1} \circ T\right]_\alpha^\alpha = \left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha$$

e

$$\mathbf{I} = [I_W]_\beta^\beta = \left[T \circ T^{-1}\right]_\beta^\beta = [T]_\beta^\alpha \left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta &= \left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta \cdot \mathbf{I} = \left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta \left([T]_\beta^\alpha\,([T]_\beta^\alpha)^{-1}\right) \\
&= \left(\left[T^{-1}\right]_\alpha^\beta [T]_\beta^\alpha\right)([T]_\beta^\alpha)^{-1} = \mathbf{I} \cdot ([T]_\beta^\alpha)^{-1} = ([T]_\beta^\alpha)^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.49 *Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que*

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então T é um isomorfismo, pois $\det([T]) = 1 \neq 0$. *Além disso,*

$$[T^{-1}] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
[T^{-1}(x,y)] &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3x - 4y \\ -2x + 3y \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$T^{-1}(x,y) = (3x - 4y, -2x + 3y).$$

Proposição 3.50 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz fixada. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\mathbf{A}$ *é invertível;*

2. *O sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tem uma solução, para todo $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$;*

3. *O sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tem uma única solução, para algum $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$;*

4. $\operatorname{posto}(\mathbf{A}) = n$;

5. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. ■

Exemplo 3.51 *Determine todos os isomorfismos de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.*

Solução. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um isomorfismo qualquer. Então $T(\mathbf{e}_1) = (a, b)$ e $T(\mathbf{e}_2) = (c, d)$. Como $(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$T(x, y) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) = (ax + cy, bx + dy) \text{ e } [T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Assim, para cada $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy) = (r, y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy = r \\ bx + dy = s, \end{cases}$$

pois T é sobrejetora. Logo, $ad - bc \neq 0$. Portanto, todo isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ é da forma

$$T(x, y) = (ax + cy, bx + dy), \text{ com } ad - bc \neq 0.$$

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e α, β duas bases ordenadas de V. Se $T : V \to V$ é um operador linear. Qual a relação entre $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$?

Para responder esta questão, vamos considerar o diagrama abaixo:

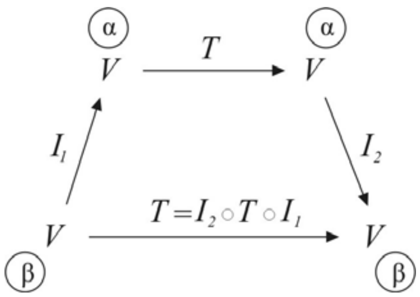


Figura 3.9: Diagrama de composição

Assim,

$$[T]_\beta^\beta = [I_2 \circ T \circ I_1]_\beta^\beta = [I_2]_\beta^\alpha \, [T]_\alpha^\alpha \, [I_1]_\alpha^\beta$$

como $[I_1]_\alpha^\beta = ([I_2]_\beta^\alpha)^{-1}$ temos, fazendo $\mathbf{P} = [I_2]_\beta^\alpha$, que

$$[T]_\beta^\beta = \mathbf{P} \, [T]_\alpha^\alpha \, \mathbf{P}^{-1},$$

isto é, as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são semelhantes. Neste caso,

$$\det([T]_\beta^\beta) = \det([T]_\alpha^\alpha).$$

Portanto, o *determinante* de T é o determinante de qualquer representação matricial de T em relação a alguma base ordenada de V e será denotado por $\det(T)$. Mais geralmente, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.52 *Sejam $S, T : V \to W$ transformações lineares com $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sejam α, β e γ, δ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então $[S]_\gamma^\alpha = [T]_\delta^\beta$ se, e somente se, existem operadores lineares invertíveis $P : V \to V$ e $Q : W \to W$ tais que $T = QSP^{-1}$.*

Prova. Sejam S_α, T_β duas parametrizações para V e S_γ, T_δ duas parametrizações para W (confira Figura 3.10).

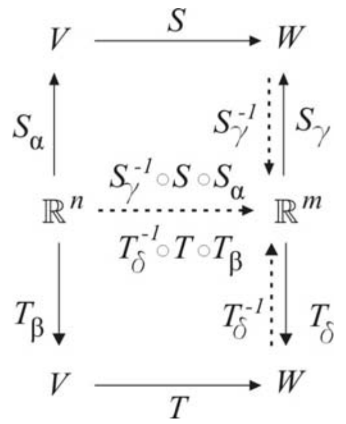


Figura 3.10: Diagrama de composição

Já vimos que

$$
\begin{aligned}
[S]_\gamma^\alpha &= [S_\gamma^{-1} \circ S \circ S_\alpha],\ [S_\alpha^{-1} \circ T_\beta] = [I]_\alpha^\beta, \\
[T]_\delta^\beta &= [T_\delta^{-1} \circ T \circ T_\beta] \text{ e } [S_\gamma^{-1} \circ T_\delta] = [I]_\gamma^\delta.
\end{aligned}
$$

Agora, suponhamos que $[S]_\gamma^\alpha = [T]_\delta^\beta$. Então existem operadores linerares $P = T_\beta \circ S_\alpha^{-1} : V \to V$ que aplica a base α na base β e $Q = T_\delta \circ S_\gamma^{-1} : W \to W$ que aplica a base γ na base δ tais que

$$T = (T_\delta \circ S_\gamma^{-1}) \circ [S_\gamma \circ T_\delta^{-1} \circ T \circ T_\beta \circ S_\alpha^{-1}] \circ (S_\alpha \circ T_\beta^{-1}) = QSP^{-1}.$$

Reciprocamente, se definimos $\beta = P(\alpha)$ e $\delta = Q(\gamma)$, então

$$[T]_\delta^\beta = [QSP^{-1}]_\delta^\beta = [Q]_\delta^\gamma [S]_\gamma^\alpha [P^{-1}]_\alpha^\beta = [I]_\delta^\gamma [S]_\gamma^\alpha [I]_\alpha^\beta = [S]_\gamma^\alpha.$$

■

Exemplo 3.53 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por*

$$T(x, y) = (x + 2y, y).$$

Então

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [T]_\beta^\beta = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix},$$

onde

$$\alpha = \{(1,0),(0,1)\} \ \ e \ \ \beta = \{(1,2),(1,-1)\}$$

são bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. *Portanto,*

$$[T]_\beta^\beta = \mathbf{P}\,[T]_\alpha^\alpha\,\mathbf{P}^{-1},$$

onde

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por $(Dp)(x) = p'(x)$. Determine a representação matricial de D em relações às bases ordenadas canônicas de $P_3(\mathbb{R})$ e $P_2(\mathbb{R})$, respectivamente.

2. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ um operador linear definido por

$$T(a + bx + cx^2) = b + ax + cx^2.$$

Determine a representação matricial de T em relação à base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

3. Para cada uma das transformações lineares abaixo, determine bases para o núcleo e a imagem:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + y, x + y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x + y, y + z)$.

   (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + z, x - z, y)$.

   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x + 2z, z)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ um operador linear definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine bases para o núcleo e a imagem de T.

5. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ a função definida por $(Tp)(x) = p(x) + x^2 p'(x)$.

(a) Verifique que T é linear.

(b) Determine bases para o núcleo e a imagem de T.

6. Mesma questão anterior, considerando agora $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, definida por $(Tp)(x) = x^2 p''(x)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ um operador linear definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$, determine bases para o núcleo e a imagem de T, onde
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Dentre as transformações dos Exercícios 5 a 7, determine as que são isomorfismos e, para essas, encontre uma regra que defina a inversa.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$ (produto vetorial), onde $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor fixado. Determine a representação matricial de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

10. Sejam $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por
$$S(x, y) = (x - y, 3x, y) \text{ e } T(x, y, z) = (2x - y - z, x + y).$$
Determine a representação matricial de S, T, $S \circ T$ e $T \circ S$ com respeito às bases ordenadas
$$\alpha = \{(1, 0), (1, 1)\} \text{ e } \beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$
de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

11. Sejam
$$\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\} \text{ e } \beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$$
bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que
$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $T(x, y)$.

(b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, então determine $[S]_\beta^\alpha$.

(c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que
$$[T]_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontre, se possível, vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

   (b) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

   (c) T é um isomorfismo? Se T for um isomorfismo, determine uma matriz que represente T^{-1}, encontrando, também, $T^{-1}(x, y)$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que

$$[T] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a representação matricial de T em relação à base $\beta = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Qual o significado geométrico do operador T?

14. Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ um operador linear definido por $(Tp)(x) = (1 - x)\, p'(x)$. Determine a representação matricial T em relação à base canônica de P_1.

15. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$(Tp)(x) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)).$$

Determine a representação matricial de T em relação às bases ordenadas

$$\alpha = \{1, x, x^2\} \text{ e } \beta = \{1, x^2, x\}$$

de $P_2(\mathbb{R})$.

16. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a transformação linear definida por

$$(Tp)(x) = \int_0^1 p(x)\, dx.$$

Determine a representação matricial de T em relação às bases canônicas de $P_3(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

17. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$.

   (a) Mostre que T é um isomorfismo.

   (b) Determine uma matriz que represente T^{-1} e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

18. Determine a rotação de um ângulo θ em torno de uma reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $(1, a, 0)$ em $\mathbb{R}^3$ com $a \in \mathbb{R}^*$.

19. Seja $V = W_1 \oplus W_2$, onde $\dim W_1 = n$ e $\dim W_2 = m$. A projeção sobre W_1 na direção de W_2 é a transformação linear $E : V \to V$ definida por $E(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1$, para todo $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) E é uma projeção.

    (b) $V = \operatorname{Im} E \oplus \ker E$.

    (c) Existe uma base de V tal que

    $$[E] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

    (d) $E^2 = E$.

20. Seja $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $E(\mathbf{v})$ é a projeção do vetor $\mathbf{v}$ sobre o plano

    $$3x + 2y + z = 0.$$

    (a) Determine $E(x, y, z)$.

    (b) Determine uma base ordenada β de $\mathbb{R}^3$ tal que

    $$[E]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

21. Seja $V = W_1 \oplus W_2$, onde $\dim W_1 = n$ e $\dim W_2 = m$. A reflexão em W_1 na direção de W_2 é a transformação linear $R : V \to V$ definida por $R(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, para todo $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) R é uma reflexão.

    (b) $V = \ker(R - I) \oplus \ker(R + I)$;

    (c) Existe uma base de V tal que

    $$[R] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_m \end{bmatrix};$$

    (d) $R^2 = I$.

22. Seja $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde $R(\mathbf{v})$ é a reflexão do vetor $\mathbf{v}$ em relação ao plano

    $$3x + 2y + z = 0.$$

    (a) Determine $R(x, y, z)$.

(b) Determine uma base ordenada β de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[R]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

23. Sejam $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, operadores lineares cujas representações matriciais em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ são:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } [T_3] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T_i, $i = 1, 2, 3$, preserva triplas pitagorianas, isto é, ternos $(a, b, c) \in \mathbb{Z}$ tais que $a^2 + b^2 = c^2$.

24. Uma *tesoura* é uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(r) \subseteq r$, para toda reta r em $\mathbb{R}^2$ passando pela origem, e se $P \notin r$, então a reta determinada por P e $T(P)$ é paralela a r. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) T é uma tesoura;

(b) Existe uma base β de $\mathbb{R}^2$ e um $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $(T - I)^k = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

25. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{AP} = \mathbf{PA}$, para toda matriz invertível $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n$, para algum $a \in \mathbb{R}$. (Sugestão: Calcule $\mathbf{A}(\mathbf{I}_n + \mathbf{E}_{ij}) = (\mathbf{I}_n + \mathbf{E}_{ij})\mathbf{A}$, quando $i \neq j$.)

26. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que $[T]_\alpha^\alpha = [T]_\beta^\beta$, para todas as bases ordenadas α e β de V se, e somente se, $T = aI$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

27. Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que T pode ser representado por uma matriz da forma

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde $k = \dim \operatorname{Im} T$.

28. Seja $\operatorname{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ a função traço.

(a) Mostre que tr é uma transformação linear.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que

$$f(\mathbf{AB}) = f(\mathbf{BA}), \ \forall \ \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Mostre que $f = c\,\mathrm{tr}$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

(Sugestão: Note que se $i \neq j$, então $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{ik}\mathbf{E}_{kj} - \mathbf{E}_{kj}\mathbf{E}_{ik}$ e $\mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{11} = \mathbf{E}_{i1}\mathbf{E}_{1i} - \mathbf{E}_{1i}\mathbf{E}_{i1}$, $i = 2, \ldots, n$.)

29. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

    (a) Mostre que se $\dim V = n$, então $ST - TS \neq I$, para todos os operadores lineares $S, T : V \to V$.

    (b) Mostre, com um exemplo, que a afirmação (a) não é necessariamente verdade se $\dim V = \infty$.

30. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva. Mostre que T é um operador linear se, e somente se, T é contínua.

3.4 Funcionais Lineares

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma transformação linear $f : V \to \mathbb{R}$ é chamada um *funcional linear* sobre V.?????????????????????

Capítulo 4

Formas Canônicas Elementares

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Nosso objetivo neste capítulo é determinar uma base de V, em relação à qual, a matriz de T tenha uma forma a mais simples possível.

4.1 Autovalores e Autovetores

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de T se existir $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}.$$

O vetor $\mathbf{v}$ é chamado um *autovetor* de T associado a λ. Note que o vetor $\mathbf{0}$ nunca é um autovetor.

Observação 4.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos os conjuntos*

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\} = \ker(T - \lambda I)$$

e

$$\begin{aligned} V^\lambda &= \{\mathbf{v} \in V : (T - \lambda I)^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \ \textit{para algum } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(T - \lambda I)^n. \end{aligned}$$

Se $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$, então λ é um autovalor de T e, neste caso, dizemos que V_λ é o auto-espaço *de T associado ao autovalor λ e V^λ é o* auto-espaço generalizado *de T associado ao autovalor λ. Note que, V_λ é um subespaço de V^λ.*

Teorema 4.2 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *λ é um autovalor de T;*

2. $T - \lambda I$ *é um operador singular, isto é,* $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$;

3. $V^\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$;

4. $\det(T - \lambda I) = 0$;

5. $\text{posto}(T - \lambda I) < n$.

Prova. É clara da definição que (1) é equivalente a (2). Como $V_\lambda \subseteq V^\lambda$ temos que $V^\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$. Reciprocamente, seja $\mathbf{u} \in V^\lambda$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Então existe um menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $(T - \lambda I)^k(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, pois $\dim V = n$ e $\ker(T - \lambda I)^m \subseteq \ker(T - \lambda I)^{m+1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathbf{v} = (T - \lambda I)^{k-1}(\mathbf{u}) \in V_\lambda$ com $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Agora vamos provar as outras equivalências. Seja $\mathbf{u} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$. Como

$$[T(\mathbf{u})]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha [\mathbf{u}]_\alpha,$$

para alguma base ordenada α de V, temos que

$$\lambda \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = 0, \tag{4.1}$$

onde $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$ e $\mathbf{X} = [\mathbf{u}]_\alpha$. Assim, o sistema homogêneo (4.1) admite uma solução não-nula $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ se, e somente se, $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ é singular se, e somente se, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ se, e somente se, $\text{posto}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) < n$. ■

Como

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$$

temos que $\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$ é uma equação polinomial de grau n em λ, a saber,

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
b_1 &= (-1)^1 \operatorname{tr}(\mathbf{A}), \\
b_2 &= (-1)^2 \sum_{i<j} \det\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}\right) \\
b_3 &= (-1)^3 \sum_{i<j<k} \det\left(\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{bmatrix}\right) \\
&\vdots \\
b_n &= (-1)^n \det(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

O polinômio

$$f_{\mathbf{A}} = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$$

será chamado o *polinômio característico* de $\mathbf{A}$. A equação polinomial

$$\det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0$$

será chamada a *equação característica* de $\mathbf{A}$ e as raízes dessa equação são os autovalores de $\mathbf{A}$.

Lema 4.3 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Prova. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $n \times n$ semelhantes. Então existe uma matriz $n \times n$ invertível $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{B}) &= \det(x\mathbf{PP}^{-1} - \mathbf{PAP}^{-1}) \\ &= \det[\mathbf{P}(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}] \\ &= \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Portanto, $f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}}$. ■

Observação 4.4 *A recíproca do Lema acima é falsa, pois é fácil verificar que as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo polinômio característico $f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{A}} = (x-1)^2$ *mas não são semelhantes.*

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. O *polinômio característico* de T é o polinômio característico de qualquer representação matricial de T em relação a alguma base ordenada de V.

Exemplo 4.5 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de* $\mathbb{R}^2$ *é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T*.*

Solução. O polinômio característico de T é

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = x^2 + 1.$$

Note que esse polinômio não tem raízes sobre $\mathbb{R}$. Portanto, o operador linear T não tem autovalores e nem autovetores. Mas esse polinômio tem duas raízes sobre $\mathbb{C}$, a saber, $-i$ e i. Assim, os autovalores dependem do corpo.

Exemplo 4.6 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T.

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o polinômio característico de T:

$$\begin{aligned} f_T &= \det(x\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} x-4 & -2 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 7x^2 + 16x - 12. \end{aligned}$$

2.^{o} **Passo**. Determinar as raízes de f_T, isto é, os autovalores de T:

As possíveis raízes racionais de f_T são ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 e ± 12. Logo, pelo dispositivo de Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

temos que $\lambda_1 = 2$ é uma raiz dupla de f_T. De modo análogo, temos que $\lambda_2 = 3$ também é uma raiz de f_T. Assim, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores de T.

3.^{o} **Passo**. Determinar os auto-espaços $V_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)$, $i = 1, 2$:

Para $\lambda_1 = 2$, devemos encontrar $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que $(2\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$, isto é, resolver o sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = y = 0$ e z qualquer. Assim,

$$V_{\lambda_1} = \ker(T - 2I) = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1)].$$

Para $\lambda_2 = 3$, devemos encontrar $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que $(3\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{O}$, isto é, resolver o sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = -2y$, $z = y$ e y qualquer. Assim,

$$V_{\lambda_2} = \ker(T - 3I) = \{(-2y, y, y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} = [(-2, 1, 1)].$$

Geometricamente esses cálculos significa que em $\mathbb{R}^3$ cada ponto P da reta determinada pela origem $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 1)$ ($\mathbf{u}_2 = (-2, 1, 1)$) é aplicado por T em $2P$ ($3P$).

Sejam K uma extensão de $\mathbb{R}$ (por exemplo $K = \mathbb{C}$) e $\lambda \in K$ uma raiz do polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$. Dizemos que λ tem *multiplicidade algébrica* m, denotada por

$$m_a(\lambda) = m,$$

se $(x-\lambda)^m$ é um fator de f mas $(x-\lambda)^{m+1}$ não, isto é,

$$f = (x-\lambda)^m g, \text{ onde } g(\lambda) \neq 0.$$

A dimensão do auto-espaço $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ será chamada de *multiplicidade geométrica* de λ e denotada por $m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Exemplo 4.7 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então o polinômio característico de T é

$$f_T = (x-2)^2(x-3).$$

Portanto, $m_a(2) = 2$ e $m_a(3) = 1$. Além disso, pelo Exemplo 4.6, temos que, $m_g(2) = 1$ e $m_g(3) = 1$. Note que $m_g(2) < m_a(2)$.

Teorema 4.8 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se λ é um autovalor de T, então $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = \dim V^\lambda$.*

Prova. Por hipótese existe $\mathbf{u} \in V^\lambda$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Logo, podemos escolher um menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $(T - \lambda I)^k(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ mas $(T - \lambda I)^{k-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, pois $\dim V = n$ e $\ker(T - \lambda I)^m \subseteq \ker(T - \lambda I)^{m+1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, é fácil verificar que

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

é uma base de V^λ, onde $\mathbf{u}_j = (T - \lambda I)^{k-j}(\mathbf{u})$, $j = 1, \ldots, k$, a qual é parte de uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V. Como

$$T(\mathbf{u}_1) = \lambda\mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_{j-1} + \lambda\mathbf{u}_j, j = 2, \ldots, k, \text{ onde } T(\mathbf{u}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i(k+1)}\mathbf{u}_i, \quad (4.2)$$

temos que

$$\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \text{ onde } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

$\mathbf{B}$ é uma matriz $k \times (n-k)$ e $\mathbf{C}$ é uma matriz $(n-k) \times (n-k)$. Logo,

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(x\mathbf{I}_k - \mathbf{J})\det(x\mathbf{I}_{n-k} - \mathbf{C}) = (x-\lambda)^k h,$$

onde $h = \det(x\mathbf{I}_{n-k} - \mathbf{C})$ é um polinômio de grau $n-k$. Note que λ é o único autovalor de T que satisfaz as equações (4.2) e $(T - \lambda I)(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v} \in V - V^\lambda$, pois se μ é outro autovalor de T, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= (T-\lambda I)^k(\mathbf{u}) = \left(\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}T^j(-\lambda I)^{k-j}\right)(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-\lambda)^{k-j}T^j(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-\lambda)^{k-j}\mu^j\mathbf{u} \\
&= (\mu-\lambda)^k\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu - \lambda = 0$, isto é, $\lambda = \mu$. Agora, se $(T - \lambda I)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para algum $\mathbf{v} \in V - V^\lambda$, então $(T - \lambda I)(\mathbf{v}) \in V^\lambda$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T-\lambda I)^{s+1}(\mathbf{v}) = (T-\lambda I)^s(T-\lambda I)(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

isto é, $\mathbf{v} \in V^\lambda$, o que é impossível. Portanto, $h(\lambda) \neq 0$ e $m_a(\lambda) = k = \dim V^\lambda$. ■

Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$, cuja representação matricial em relação a alguma base ordenada α de V é $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$, e λ um autovalor de T. Então

$$(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{I}_n = \mathbf{O}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{A}\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \lambda\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}).$$

Seja $\mathbf{C}_j$ a j-ésima coluna da matriz $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$. Então

$$\mathbf{A}\mathbf{C}_j = \lambda\mathbf{C}_j,$$

isto é, qualquer coluna não-nula $\mathbf{C}_j$ de $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

Exemplo 4.9 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T.

Solução. É fácil verificar que o polinômio característico de T é

$$f_T = x^3 - 8x^2 + 17x - 4 = (x-4)(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}).$$

Para $\lambda_1 = 4$, temos que

$$\operatorname{adj}(4\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -4 & -16 & -64 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{u}_1 = (1, -4, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$. Para $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$, temos que

$$\operatorname{adj}((2-\sqrt{3})\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3}+8 & 4 & 8-4\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-6 & 4\sqrt{3}-9 & 17\sqrt{3}-30 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & 7-4\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathbf{u}_2 = (4(2+\sqrt{3}), -(6+\sqrt{3}), 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$. De modo análogo, obtemos $\mathbf{u}_3 = (4(2-\sqrt{3}), -(6-\sqrt{3}), 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_3 = 2 + \sqrt{3}$.

Teorema 4.10 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$, cuja representação matricial em relação a alguma base ordenada α de V é $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de T. Se $m_a(\lambda_i) = 1$, então existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que a j-ésima coluna $\mathbf{C}_j$ de $\operatorname{adj}(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ_i.*

Prova. (Caso $n = 2$). O polinômio característico de T é

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = x^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A})x + \det(\mathbf{A}), \text{ onde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{df_T}{dx} = 2x - \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = 2x - (a_{11} + a_{22}) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\right),$$

onde

$$\operatorname{adj}(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} x - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{11} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $f_T = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ temos que

$$\frac{df_T}{dx} = (x - \lambda_2) + (x - \lambda_1).$$

Assim,

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\right) = (x - \lambda_2) + (x - \lambda_1).$$

Em particular, quando $x = \lambda_2$, obtemos

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(\lambda_2\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\right) = (\lambda_2 - a_{22}) + (\lambda_2 - a_{11}) = (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Portanto, se $m_a(\lambda_2) = 1$, então $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. Logo, existe $j \in \{1, 2\}$ para o qual $\lambda_2 - a_{jj} \neq 0$, isto é, existe $j \in \{1, 2\}$ tal que a j-ésima coluna $\mathbf{C}_j$ de $\operatorname{adj}(\lambda_2 \mathbf{I}_2 - \mathbf{A})$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ_2. Esse procedimento se aplica ao caso geral. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Determine o polinômio característico dos operadores lineares, encontre seus autovalores e autovetores correspondentes e dar uma base e a dimensão dos respectivos auto-espaços.

   (a) $T(x, y) = (2y, x)$.

   (b) $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

   (c) $T(x, y) = (-y, x)$.

   (d) $T(x, y) = (2x + 3y, -x - 2y)$.

   (e) $T(x, y) = (2x + y, -y)$.

   (f) $T(x, y, z, w) = (2x + y, 2y, 2z, 3w)$.

   (g) $T(a + bx + cx^2) = b + ax + cx^2$.

   (h) $(Tp)(x) = p(1 + x)$, $p \in P_3(\mathbb{R})$.

   (i) $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$, sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (j) $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$.

   (k) $T(x, y, z) = (2x + 2y, x + y + 2z, x + y + 2z)$.

   (l) $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

   (m) $T(x, y, z) = (-9x + 4y + 4z, -8x + 3y + 4z, -16x + 8y + 7z)$.

   (n) $T(x, y, z) = (x + 3y - 3z, 4y, -3x + 3y + z)$.

   (o) $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.

   (p) $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, , w)$.

   (q) $(Tp)(x) = p'(x)$, $p \in P_2(\mathbb{R})$.

   (r) $(Tp)(x) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$, $p \in P_3(\mathbb{R})$.

2. Qual é o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que possui $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ como autovalores associados, respectivamente, a autovetores da forma $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, com $y \neq 0$?

3. Seja $T : V \to V$ um operador linear tendo $\lambda = 0$ como autovalor. Mostre que T é singular.

4. Sejam $T : V \to V$ um operador linear invertível λ um autovalor de T. Mostre que λ^{-1} é um autovalor T^{-1}. O que se pode dizer sobre os autovetores associados?

5. Sejam $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\mathbf{v}$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ, então $\mathbf{v}$ é um autovetor de T^k associado ao autovalor λ^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

6. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^t$ têm o mesmo polinômio característico mas podem ter autovetores distintos.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde a, b, c e d são números reais positivos. Mostre que:

   (a) Os autovalores de T são dados por

   $$\frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2}.$$

   (b) Os autovalores de T são reais, distintos e pelo menos um deles é positivo.

8. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ uma matriz simétrica com autovalor $\lambda_1 = 1$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_1.

   (a) Determine uma matriz $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ que satisfaça essas condições.

   (b) Se $\lambda_2 = 9$ é outro autovalor de $\mathbf{A}$, determine um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_2.

   (c) Determine uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

9. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que os autovalores da matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$

são exatamente os autovalores simultâneos de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. (Sugestão: Note que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A} + \mathbf{B} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

e use o Exercício 12 da Seção 1.1 do Capítulo 1.)

10. Sejam $S : V \to V$ e $T : V \to V$ operadores lineares. Mostre que se $f_S = f_T$, então $\det(S) = \det(T)$. Mostre, com um exemplo, que a recíproca é falsa.

11. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ têm o mesmo polinômio característico. (Sugestão: Sejam

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x\mathbf{I}_n & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B} & x\mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Agora, use o fato de que $\det(\mathbf{CD}) = \det(\mathbf{DC})$.)

12. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que todo $\mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$ é um autovetor de T. Mostre que $T = aI$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

13. Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$, para alguma base ordenada α de V. Mostre que:

    (a) Se n é ímpar e $\det(\mathbf{A}) < 0$, então T possui pelo menos um autovalor positivo.

    (b) Se n é ímpar e $\det(\mathbf{A}) > 0$, então T possui pelo menos um autovalor negativo.

    (c) Se n é par e $\det(\mathbf{A}) < 0$, então T possui pelo menos um autovalor positivo e um negativo.

    (Sugestão: Use o Teorema do Valor Intermediário para o polinômio característico f_T de T e o FATO: se $z = a + bi$ é uma raiz de f_T, então $\overline{z} = a - bi$ também o é, onde $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ e $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$.)

14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear não-nulo. Mostre que existe uma reta r em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem tal que $T(r) \subseteq r$.

15. Mostre que não existe $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{I}_3$.

4.2 Operadores Diagonalizáveis

Antes de definirmos operadores diagonalizáveis, provaremos um fato muito importante de que autovetores associados a autovalores distintos aos pares são linearmente independentes.

Teorema 4.11 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos aos pares de T. Se $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são os autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então o conjunto*

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é linearmente independente.

Prova. (Indução sobre n). Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{4.3}$$

Se $n = 1$, então $x_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Logo, $x_1 = 0$, pois $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$. Agora, suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para todo k com $1 \leq k \leq n-1$. Aplicando T a equação (4.3) e usando que $T(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i$, temos que

$$x_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Agora, multiplicando a equação (4.3) por λ_n e subtraindo da equação (4.4), temos que

$$(\lambda_n - \lambda_1)x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

Logo, pela hipótese de indução,

$$(\lambda_n - \lambda_i)x_i = 0, i = 1, \ldots, n-1.$$

Como $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, temos que $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Assim,

$$x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

mas isto implica que $x_n = 0$. Portanto, o conjunto

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é linearmente independente. ■

Teorema 4.12 *Sejam* $T : V \to V$ *um operador linear com* $\dim V = n$*, cuja representação matricial em relação a alguma base ordenada* α *de* V *é* $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$*, e*

$$\mathbf{X}_j = [\mathbf{v}]_\alpha = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

as coordenadas de um autovetor $\mathbf{v}$ *de* T *associado ao autovalor* λ_j, $j = 1, \ldots, n$*. Se os vetores* $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ *geram* $\mathbb{R}^{n\times 1}$*, então a matriz* $\mathbf{P} = [x_{ij}]$ *é tal que*

$$\mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Prova. Como os vetores $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ geram $\mathbb{R}^{n\times 1}$ temos, pelo Teorema 4.11, que a matriz $\mathbf{P}$ é não-singular. Sendo

$$\mathbf{AX}_j = \lambda_j\mathbf{X}_j$$

temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \lambda_j x_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$\mathbf{PA} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}\right] = [\lambda_j x_{ij}] = \mathbf{DP}.$$

Portanto, $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{D}$. ■

Exemplo 4.13 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3$ possui uma base de autovetores.

Solução. É fácil verificar que o polinômio característica de T é

$$f_T = (x+1)(x-3)^2.$$

Assim, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores de T. Para $\lambda_1 = -1$, temos que

$$V_{\lambda_1} = [(4, -5, 4)].$$

Para $\lambda_2 = 3$, temos que

$$V_{\lambda_2} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)].$$

Portanto,

$$\alpha = \{(4, -5, 4), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

é uma base de autovetores de $\mathbb{R}^3$. Note que

$$\mathbb{R}^3 = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}, \;\; \mathbf{D} = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{D},$$

onde

$$\mathbf{P} = [\mathbf{I}]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança de base da base α para a base canônica β de $\mathbb{R}^3$.

Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Dizemos que T é *diagonalizável* se existir uma base de V formada de autovetores de T.

Exemplo 4.14 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

T é diagonalizável?

Solução. É fácil verificar que o polinômio característica de T é

$$f_T = (x+1)(x-3)^2.$$

Assim, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores de T. Para $\lambda_1 = -1$, temos que

$$V_{\lambda_1} = [(1, -20, 16)].$$

Para $\lambda_2 = 3$, temos que

$$V_{\lambda_2} = [(1, 0, 0)].$$

Portanto, T não é diagonalizável.

Sejam

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

um polinômio de grau $\partial(f) = n$ sobre os reais $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então $f(T)$ é um operador linear sobre V definido por

$$f(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I.$$

Dizemos que f *anula* T se $f(T) = 0$.

Lema 4.15 *Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Então*

$$f(T)(\mathbf{u}) = f(\lambda)\mathbf{u}, \ \forall \ f \in \mathbb{R}[x].$$

Prova. (Exercício) ■

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $W_1, \ldots, W_k$ subespaços de V. Dizemos que W_1, $\ldots$, W_k são *independentes* se $\mathbf{u}_i \in W_i$ e $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, então $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, k$.

Lema 4.16 *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$, $W_1, \ldots, W_k$ subespaços de V e $W = W_1 + \cdots + W_k$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$W_1, \ldots, W_k$ são independentes;*

2. *$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{\mathbf{0}\}$, para $2 \leq j \leq k$;*

3. *Se α_i é uma base ordenada de W_i, então o conjunto ordenado $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ é uma base de W.*

Prova. ($1 \Rightarrow 2$) Seja $\mathbf{u} \in W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1})$. Então $\mathbf{u} \in W_j$ e $\mathbf{u} \in W_1 + \cdots + W_{j-1}$. Assim, existem $\mathbf{u}_1 \in W_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1} \in W_{j-1}$ tais que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{j-1}.$$

Logo,

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{j-1} + (-\mathbf{u}) + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Pela hipótese, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \cdots = \mathbf{u}_{j-1} = (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{\mathbf{0}\}, 2 \leq j \leq k.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ É claro que $W = [\alpha]$. Como qualquer relação linear entre os vetores de α terá a forma

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

onde os $\mathbf{v}_i$ é alguma combinação linear dos vetores de α_i, temos que

$$\mathbf{v}_k \in W_k \cap (W_1 + \cdots + W_{k-1}) = \{\mathbf{0}\},$$

isto é, $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Assim,

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_{k-1} \in W_{k-1} \cap (W_1 + \cdots + W_{k-2}) = \{\mathbf{0}\},$$

isto é, $\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}$. Continuando dessa maneira, temos que α é LI.
$(3 \Rightarrow 1)$ Fica como um exercício. ■

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $W_1, \ldots, W_k$ subespaços de V. Dizemos que V é *soma direta* de $W_1, \ldots, W_k$ se pelo menos uma (e portanto todas) das condições do Lema 4.16 for satisfeita. Notação

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Teorema 4.17 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $V_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)$ os auto-espaços de T associados aos autovalores distintos aos pares λ_i, $i = 1, \ldots, k$ (em alguma extensão de $\mathbb{R}$). Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é diagonalizável;*

2. *O polinômio característico de T é*

$$f_T = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}, \quad \textit{onde } m_i = \dim V_{\lambda_i};$$

3. *$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.*

Prova. $(1 \Rightarrow 2)$ Suponhamos que T seja diagonalizável. Então existe uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V tal que

$$T(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Logo,

$$\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2 \mathbf{I}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \lambda_k \mathbf{I}_k \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{I}_{m_i}$ é uma matriz identidade $m_i \times m_i$ e $m_i = \dim V_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Portanto,

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Sejam $\mathbf{u}_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Para verificar que

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k},$$

basta provar que

$$\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_i = \mathbf{0},\ \ i = 1, \ldots, k,$$

isto é, os V_{λ_i}, $i = 1, \ldots, k$, são independentes. Seja

$$\begin{aligned} S_j &= (T - \lambda_1 I_1) \cdots (T - \lambda_{i-1} I_{i-1})(T - \lambda_{i+1} I_{i+1}) \cdots (T - \lambda_k I_k) \\ &= \prod_{j=1}^{k} (T - \lambda_j I_j) \ \text{ com } \ j \neq i. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 4.15, temos que

$$S_j(\mathbf{u}_i) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{u}_i.$$

Por outro lado, aplicando S_j à equação vetorial

$$\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

e usando o Exercício (8) a seguir, temos que $S_j(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$. Assim,

$$\prod_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Como $\lambda_j \neq \lambda_i$, $j \neq i$ e $j = 1, \ldots, k$, temos que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0},\ \ i = 1, \ldots, k.$$

$(3 \Rightarrow 1)$ É uma conseqüência direta da definição. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Para cada um dos operadores lineares do Exercício (1) da Seção (4.1), identifique os operadores que são diagonalizáveis. Nos casos afirmativos, especifique uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{PAP}^{-1}$ seja diagonal.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

onde a, b, c e d são números reais positivos. Mostre que T é diagonalizável.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Mostre que os autovalores de T são reais e T que é diagonalizável.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é diagonalizável. Generalize para $\mathbb{R}^n$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T. Além disso, especifique uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{PAP}^{-1}$ seja diagonal.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de T. Além disso, para que valores de a e b, T é diagonalizável.

7. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\mathbf{A}^{10}$ e $\mathbf{B}^{35}$.

8. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que
$$Tf(T) = f(T)T, \ \forall \ f \in \mathbb{R}[x].$$
Conclua que
$$f(T)g(T) = g(T)f(T), \ \forall \ f, g \in \mathbb{R}[x].$$

9. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são semelhantes, então $f(\mathbf{A})$ e $f(\mathbf{B})$ são semelhantes, para todo $f \in \mathbb{R}[x]$.

10. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que existe um polinômio não-nulo $f \in \mathbb{R}[x]$ de grau no máximo n^2 tal que $f(T) = O$.

11. Os *números de Fibonacci* $a_1, a_2, \ldots$ são definidos por
$$a_1 = a_2 = 1 \text{ e } a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ \forall \ n \geq 2.$$
   (a) Mostre que
   $$\begin{bmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$
   onde $a_0 = 0$, e conclua que
   $$a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n.$$
   (b) Mostre que
   $$a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right), \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

12. Sejam $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável com $\dim V = n$ e
$$f_T = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$
o polinômio característico de T. Mostre que
$$\text{posto}(T) = \max\{j : b_j \neq 0\}.$$
(Sugestão: Note que
$$b_j = (-1)^j \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j},$$
onde λ_i são os autovalores de T.)

13. Sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x_1, \ldots, x_n$ são distintos aos pares, então existe um único polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$ de grau no máximo $n-1$ tal que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Sugestão: Seja
$$f = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$$

o polinômio desejado, onde os a_i devem ser determinados. Então obtemos o sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas

$$a_1 + a_2 x_i + \cdots + a_n x_i^{n-1} = y_i, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

ou, na forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Agora, use a Regra de Cramer para resolver o sistema.)

14. Seja $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável com $\dim V = n$ e todos os autovalores de T são distintos aos pares. Mostre que qualquer operador linear diagonalizável sobre V pode ser escrito como um polinômio em T.

15. Sejam $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas e

$$\beta = \{e^{a_1 x}, \ldots, e^{a_n x}\},$$

onde os $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são distintos. Mostre que β é um subconjunto linearmente independente de V. (Sugestão: Considere o operador diferencial.)

4.3 Polinômio Minimal

Sejam

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

um polinômio de grau $\partial(f) = n$ sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Já vimos que $f(T)$ é um operador linear sobre V definido por

$$f(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I.$$

e que f anula T se $f(T) = 0$.

Observação 4.18 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$, para alguma base ordenada α de V. Então:*

1. *$f(T) = O$ se, e somente se, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.*

2. *A função $f_\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por*

$$f_\mathbf{A}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n \mathbf{A}^n + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_n$$

é claramente uma transformação linear com

$$\ker f_\mathbf{A} = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}\} \ \ e \ \ \operatorname{Im} f_\mathbf{A} = \{f(\mathbf{A}) : f \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Mostraremos a seguir (Teorema de Cayley-Hamilton) que $\ker f_\mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo 4.19 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se $f = x^2 - 4x + 3$, então $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Logo, f anula T. Se $g = x - 3$, então

$$g(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{O}.$$

Logo, g não anula T.

Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e f_T o polinômio característico de T. Se T é diagonalizável, então $f_T(T) = 0$.

De fato, se T é diagonalizável, então existe uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V tal que

$$T(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Logo, pelo Lema 4.15, temos que

$$f_T(T)(\mathbf{u}_i) = f_T(\lambda_i)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, $f(T) = 0$. Mais geralmente, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.20 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Se f_T é o polinômio característico de T, então $f_T(T) = 0$.*

Prova. (Caso $n = 2$). Sejam

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

uma base ordenada de V e $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$. Então o polinômio característico de T é

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = x^2 + b_1 x + b_2.$$

Seja $\mathbf{B}(x) = \operatorname{adj}(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})$, isto é,

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} x - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{11} \end{bmatrix}.$$

Então os elementos de $B(x)$ são polinômios de grau no máximo 1 $(n - 1)$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \begin{bmatrix} x - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0 x + \mathbf{B}_1, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ são independentes de x. Como

$$(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{B}(x) = \det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{I}_2$$

temos que

$$(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})(\mathbf{B}_0 x + \mathbf{B}_1) = (x^2 + b_1 x + b_2)\mathbf{I}_2,$$

ou ainda,

$$\mathbf{B}_0 x^2 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0)x - \mathbf{A}\mathbf{B}_1 = (x^2 + b_1 x + b_2)\mathbf{I}_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}\mathbf{B}_0 &= b_1\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{A}\mathbf{B}_1 &= b_2\mathbf{I}_2. \end{aligned}$$

Multiplicando as equações à esquerda pelas matrizes $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}$ e $\mathbf{I}_2$, respectivamente, e somando, temos que

$$\mathbf{O} = \mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{I}_2,$$

isto é, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Esse procedimento se aplica ao caso geral. ■

Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Dizemos que o polinômio

$$m_T = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

é o *polinômio minimal* de T se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $m_T(T) = 0$.

2. m_T é o polinômio de menor grau dentre aqueles que anulam T com $\partial(m_T) \geq 1$.

Note que o polinômio minimal m_T não necessita ser irredutível, confira exemplo a seguir.

Exemplo 4.21 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine o polinômio minimal de T.

Solução. É claro que o polinômio característico de T é

$$f_T = x^2.$$

Se $\partial(m_T) = 1$, então $m_T = ax + b$ com $a \neq 0$. Logo,

$$m_T(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \neq \mathbf{O},$$

Assim, $\partial(m_T) \geq 2$. Como $f_T(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ temos que $\partial(m_T) = 2$. Portanto, $m_T = f_T = x^2$ não é irredutível sobre $\mathbb{R}$.

Lema 4.22 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio minimal.*

Prova. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $n \times n$ semelhantes. Então existe uma matriz $n \times n$ invertível $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}.$$

É fácil verificar, indutivamente, que

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{PA}^m\mathbf{P}^{-1}, \ \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$f(\mathbf{B}) = \mathbf{P}f(\mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}, \ \forall \ f \in \mathbb{R}[x].$$

Em particular,

$$m_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{O} \Rightarrow m_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O},$$

isto é, $m_{\mathbf{A}}$ é um fator de $m_{\mathbf{B}}$. Por outro lado,

$$m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \Rightarrow m_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \mathbf{O},$$

isto é, $m_{\mathbf{B}}$ é um fator de $m_{\mathbf{A}}$. Portanto, $m_{\mathbf{B}} = m_{\mathbf{A}}$, pois ambos são mônicos. ■

Observação 4.23 *A recíproca do Lema acima é falsa, pois é fácil verificar que as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo polinômio minimal $m_{\mathbf{B}} = m_{\mathbf{A}} = x^4$ mas não são semelhantes.

Teorema 4.24 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Então os polinômios característico e minimal de T possuem as mesmas raízes, a menos de multiplicidades.*

Prova. Sejam m_T o polinômio minimal de T e $\lambda \in \mathbb{R}$. Devemos provar que $m_T(\lambda) = 0$ se, e somente se, λ é um autovalor de T.

Suponhamos que $m_T(\lambda) = 0$. Então, pelo algoritmo da divisão, existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$m_T = (x - \lambda)q.$$

Como $\partial(q) < \partial(m_T)$ temos que $q(T) \neq 0$. Assim, existe $\mathbf{w} \in V$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, tal que $\mathbf{u} = q(T)(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= m_T(T)(\mathbf{w}) \\ &= (T - \lambda I)q(T)(\mathbf{w}) \\ &= (T - \lambda I)(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Portanto, λ é um autovalor de T e $\mathbf{u}$ é o autovetor associado a λ. Reciprocamente, suponhamos que λ seja um autovalor de T. Então existe $\mathbf{u} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$. Assim, pelo Lema 4.15, temos que

$$m_T(\lambda)\mathbf{u} = m_T(T)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ temos que $m_T(\lambda) = 0$. ■

Observação 4.25 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e f_T, m_T os polinômios característico e minimal de T. Então pelo Teorema de Cayley-Hamilton e o Teorema 4.24, m_T é um fator de f_T.*

Exemplo 4.26 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico*

$$f_T = (x-3)^2(x-1)^3(x+5).$$

Determine os candidatos a polinômio minimal de T e a $\dim V$.

Solução. É claro, da definição de f_T, que $\dim V = 6$. Pela Observação acima os candidatos a polinômio minimal de T são:

$$\begin{aligned}
m_T &= (x-3)(x-1)(x+5)\\
m_T &= (x-3)^2(x-1)(x+5)\\
m_T &= (x-3)(x-1)^2(x+5)\\
m_T &= (x-3)(x-1)^3(x+5)\\
m_T &= (x-3)^2(x-1)^2(x+5)\\
m_T &= f_T.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.27 *Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo polinômio minimal é*

$$m_T = x^3 - 8x^2 + 5x + 7.$$

Solução. Existe um vetor $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^3$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que o conjunto

$$\alpha = \{\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), T^2(\mathbf{u})\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$, pela minimalidade do grau de m_T. Logo,

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}) &= 0\mathbf{u} + 1T(\mathbf{u}) + 0T^2(\mathbf{u})\\
T^2(\mathbf{u}) &= 0\mathbf{u} + 0T(\mathbf{u}) + T^2(\mathbf{u})\\
T^3(\mathbf{u}) &= -7\mathbf{u} - 5T(\mathbf{u}) + 8T^2(\mathbf{u}),
\end{aligned}$$

pois

$$m_T(T) = O \Rightarrow T^3(\mathbf{u}) = \left(-7I - 5T + 8T^2\right)(\mathbf{u}) = -7\mathbf{u} - 5T(\mathbf{u}) + 8T^2(\mathbf{u}).$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } T(x,y,z) = (-7z, x-5z, y+8z).$$

A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de *matriz companheira* associada com m_T.

Lema 4.28 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Se T é diagonalizável e existe $\mathbf{u} \in V$ tal que $T^2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, então $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.*

Prova. Suponhamos que T seja diagonalizável. Então existe uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V tal que

$$T(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{u}_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Como para cada $\mathbf{u} \in V$ existem únicos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

temos que

$$\mathbf{0} = T^2(\mathbf{u}) = c_1\lambda_1^2\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^2\mathbf{u}_n \Rightarrow c_i\lambda_i^2 = 0, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Logo, $\lambda_i = 0$ ou $c_i\lambda_i = 0$, não ambos, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, em qualquer caso $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. ■

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W_1, W_2 subespaços de V tais que $V = W_1 \oplus W_2$. A *projeção* sobre W_1 na direção de W_2 é o operador linear $E_1 : V \to V$ tal que $E_1(\mathbf{v}) = E_1(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1$, para todo $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ (confira Figura 4.1).

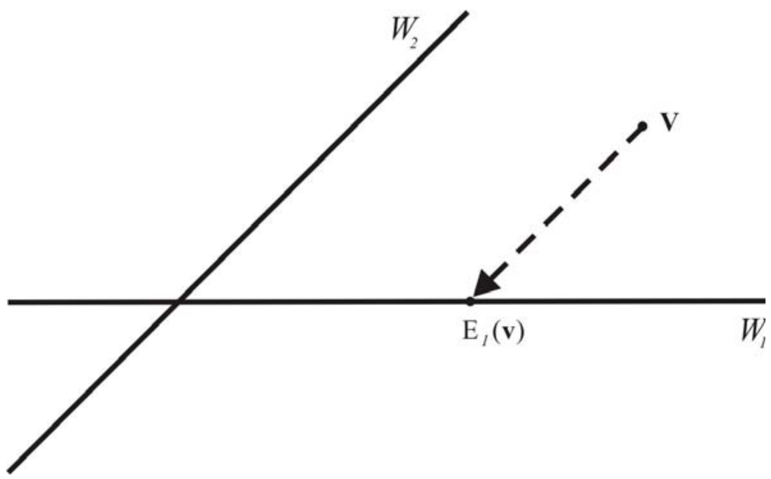


Figura 4.1: Projeção sobre W_1 na direção de W_2.

Exemplo 4.29 *Seja* $E_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a projeção sobre o plano*

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - 2z = 0\}$$

na direção da reta $W_2 = [(1, 1, 1)]$. *Determine a representação matricial de* E_1 *em relação à base canônica de* $\mathbb{R}^3$ *e também em relação à base ordenada*

$$\alpha = \{(1, -1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 3)\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

Solução. Como $W_1 = [(1, -3, 0), (0, 2, 1)]$ temos que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ e

$$\beta = \{(1, -3, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 1)\}$$

é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Assim, é fácil verificar que

$$E_1(x, y, z) = \left(\frac{-x - y + 2z}{2}, \frac{-3x + y + 2z}{2}, \frac{-3x - y + 4z}{2} \right).$$

Portanto,

$$[E_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } [E_1]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{4}{3} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lema 4.30 *Seja* $E : V \to V$ *um operador linear com* $\dim V = n$. *Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. E *é uma projeção*;

2. $V = \operatorname{Im} E \oplus \ker E$ *e* $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} E$ *se, e somente se,* $E(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$;

3. *Existe uma base ordenada* α *de* V *tal que*

$$[E]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

4. $E^2 = E$.

Prova. $(1 \Leftrightarrow 2)$ Suponhamos que E seja uma projeção. Então existe uma decomposição $V = W_1 \oplus W_2$ tal que E é a projeção sobre W_1 na direção de W_2. Portanto, $W_1 = \operatorname{Im} E$ e $W_2 = \ker E$. Além disso,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{w} \in V : E(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\} &= \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 \oplus W_2 : \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\} \\ &= \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 \oplus W_2 : \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}\} \\ &= W_1 = \operatorname{Im} E. \end{aligned}$$

Reciprocamente, basta tomar $W_1 = \operatorname{Im} E$ e $W_2 = \ker E$.

($2 \Rightarrow 3$) Sejam $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ uma base ordenada de $\operatorname{Im} E$ e $\{\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ordenada de $\ker E$. Então

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é uma base ordenada para V. Logo,

$$[E]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

($3 \Rightarrow 4$) É claro.
($4 \Rightarrow 2$) Suponhamos que $E^2 = E$. Então $E(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} E$ e $\mathbf{v} - E(\mathbf{v}) \in \ker E$, para todo $\mathbf{v} \in V$. Logo,

$$\mathbf{v} = E(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - E(\mathbf{v})) \in \operatorname{Im} E + \ker E, \ \forall \ \mathbf{v} \in V,$$

isto é, $V = \operatorname{Im} E + \ker E$. Agora, se $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} E \cap \ker E$, então $E(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ e $E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{v} = E(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e $\operatorname{Im} E \cap \ker E = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, $V = \operatorname{Im} E \oplus \ker E$. Finalmente, $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} E$ se, e somente se, existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{w} = E(\mathbf{v})$ se, e somente se,

$$E(\mathbf{w}) = E^2(\mathbf{v}) = E(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

■

Teorema 4.31 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é diagonalizável;*

2. *Para cada $\mathbf{u} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ se $(T - \lambda I)^2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, então $(T - \lambda I)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$;*

3. *Se $\mathbf{v}_0 \in V$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, então $(T - \lambda_0 I)(\mathbf{u}) \neq \mathbf{v}_0$, para todo $\mathbf{u} \in V$;*

4. *As raízes do polinômio minimal de T são todas distintas (simples);*

5. *Existe um $k \in \mathbb{N}$, escalares distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ e operadores lineares não-nulos $E_i : V \to V$, $i = 1, \ldots, k$, tal que*

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i, \ \sum_{i=1}^{k} E_i = I \ \text{ e } \ E_i E_j = 0 \ \text{ se } i \neq j.$$

Prova. ($1 \Rightarrow 2$) Seja $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$ a representação matricial de T em relação à alguma base ordenada α de V. Suponhamos que $\mathbf{A}$ seja diagonalizável. Então existe uma base ordenada β de V e uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{PAP}^{-1} = [T]_\beta^\beta = \mathbf{D}$$

é diagonal. Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{PX}$, onde $\mathbf{X} = [\mathbf{u}]_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, para cada $\mathbf{u} \in V$. Então

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)^2 \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{DP} - \lambda \mathbf{I}_n)^2 \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_n)^2 \mathbf{Y}.$$

Como $\mathbf{P}$ é invertível temos que $(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_n)^2 \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ e, pelo Lema 4.28, $(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Portanto,

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{PX} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Suponhamos que $\mathbf{v}_0 \in V$ seja um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Então $T(\mathbf{v}_0) = \lambda_0 \mathbf{v}_0$. Logo, se existir $\mathbf{u} \in V$ tal que $(T - \lambda_0 I)(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_0$, então

$$(T - \lambda_0 I)^2(\mathbf{u}) = (T - \lambda_0 I)(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}.$$

Assim, por hipótese,

$$\mathbf{v}_0 = (T - \lambda_0 I)(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

o que é uma contradição.
$(3 \Rightarrow 4)$ Suponhamos que

$$m_T = (x - \lambda_0)^2 q.$$

Então existe $\mathbf{w} \in V$ com $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{v}_0 = (T - \lambda_0 I)q(T)(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$, pois

$$\partial((x - \lambda_0)q) < \partial(m_T).$$

Assim,

$$(T - \lambda_0 I)(\mathbf{v}_0) = m_T(T)(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}.$$

Logo, $\mathbf{v}_0 \in V$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ_0. Mas então a equação

$$(T - \lambda_0 I)(\mathbf{u}) = \mathbf{v}_0$$

tem solução $q(T)(\mathbf{w})$, o que é uma contradição.
$(4 \Rightarrow 5)$ Suponhamos que

$$m_T = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k),$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ são os autovalores distintos de T. Definimos $p_i \in \mathbb{R}[x]$ pelas relações

$$m_T = (x - \lambda_i)p_i, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Então $p_i(\lambda_i) \neq 0$ e $p_i(\lambda_j) = 0$ se, e somente se $i \neq j$. Agora consideremos o polinômio

$$g = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i(\lambda_i)}.$$

Então

$$\partial(g) < \partial(m_T) = k \ \text{ e } \ g(\lambda_i) = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Logo, pela minimalidade do grau de m_T, temos que $g \equiv 0$. Assim, $g(S) = 0$, para todo operador linear $S : V \to V$. Escolhendo os operadores lineares

$$E_i = \frac{1}{p_i(\lambda_i)} p_i(T), \ \ i = 1, \ldots, k,$$

obtemos

$$E_i \neq 0, \ \ \sum_{i=1}^{k} E_i = I \ \text{ e } \ m_T(T) = (T - \lambda_i I) p_i(T) = 0.$$

Logo,

$$T p_i(T) = \lambda_i p_i(T), \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i E_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i(\lambda_i)} \lambda_i p_i(T) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i(\lambda_i)} p_i(T) T = T \left(\sum_{i=1}^{k} E_i \right) = T.$$

Finalmente, se $i \neq j$, então

$$E_i E_j = \frac{1}{p_i(\lambda_i) p_j(\lambda_j)} p_i(T) p_j(T) = 0.$$

($5 \Rightarrow 1$) Seja $\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Então $\mathbf{u}_i = E_i(\mathbf{v})$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ_i, pois

$$T(\mathbf{u}_i) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j \right) (\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j E_i(\mathbf{v}) = \lambda_i E_i(\mathbf{v}) = \lambda_i \mathbf{u}_i.$$

Além disso,

$$\mathbf{v} = I(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} E_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i,$$

de modo que, todo vetor é combinação linear dos autovetores. Portanto,

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é uma base de V formada de autovetores, isto é, T é diagonalizável. ■

Exemplo 4.32 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

T é diagonalizável?

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o polinômio característico de T.

$$\begin{aligned} f_T &= \det(x\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) \\ &= (x-1)^2(x-3). \end{aligned}$$

2.^{o} **Passo**. Determinar os candidatos a polinômio minimal de T. Neste caso, são

$$\begin{aligned} m_T &= (x-1)(x-3) \\ m_T &= f_T. \end{aligned}$$

3.^{o} **Passo**. Calcular $m_T(\mathbf{A})$ para cada um dos candidatos. Neste caso,

$$\begin{aligned} m_T(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$m_T = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

é o polinômio minimal de T. Portanto, T é diagonalizável. Note que

$$\begin{aligned} p_1 &= x-3,\ E_1 = -\frac{1}{2}(T-3I),\ p_2 = x-1,\ E_2 = \frac{1}{2}(T-I), \\ E_1E_2 &= 0 \text{ e } E_1 + E_2 = I. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

---

1. Para cada um dos operadores lineares do Exercício (1) da Seção (4.1), determine o polinômio minimal e identifique os operadores que são diagonalizáveis.

2. Seja $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é

$$f = (x-1)^2(x-4)^3(x+2).$$

   (a) Qual é a dimensão de V?

   (b) Quais são as possibilidades para o polinômio minimal de T?

   (c) Se T é diagonalizável, qual é o seu polinômio minimal?

3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 5 e $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio minimal é

$$m = (x-1)^2(x-2).$$

(a) Quais são as possibilidades para o polinômio característico de T?

(b) T é diagonalizável?

4. Determine condições necessárias e suficientes em a, b, c e d, de modo que a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

não seja semelhante a uma matriz diagonal.

5. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matriz cujos autovalores distintos são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

(a) Escreva todas as possibilidades para o polinômio característico de $\mathbf{A}$.

(b) Para cada possibilidade do polinômio característico de $\mathbf{A}$, escreva os possíveis polinômios minimais de $\mathbf{A}$.

6. Mostre que se λ e μ são autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$, então $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$.

7. Seja $T : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é

$$f = (x-4)^2(x+2)^4.$$

(a) Quais são as possibilidades para $\dim V_4$ e $\dim V_{-2}$?

(b) Se T é diagonalizável, qual a dimensão de V_4 e a de V_{-2}?

8. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 6 e $T : V \to V$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1 e λ_2. Se $\dim V_{\lambda_1} = 3$ e $\dim V_{\lambda_2} = 1$.

(a) Quais são as possibilidades para o polinômio característico de T?

(b) O polinômio minimal de T pode ser

$$m = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)?$$

9. Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear não diagonalizável cujo polinômio característico é

$$f = (x+1)(x-3)^3.$$

Quais são as possibilidades para $\dim V_{-1}$ e $\dim V_3$?

10. Seja $T : V \to V$ um operador linear invertível com $\dim V = n$. Mostre que T^{-1} é um polinômio em T de grau no máximo $n-1$.

11. Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e
$$\text{Spec}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$
Mostre que $\text{Spec}(T)$ é um conjunto finito.

12. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e
$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$
uma base ordenada de V. Se $E_{ij} : V \to V$ é um operador linear definido por $E_{ij}(\mathbf{u}_k) = \delta_{ik}\mathbf{u}_j$, determine o $\text{Spec}(E_{ij})$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$
Determine o polinômio minimal de T quando $a = 0$ e $a \neq 0$. Generalize para $\mathbb{R}^n$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é simétrica. Prove que T é diagonalizável.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por
$$T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$
Mostre que se θ for um multiplo inteiro de π, então o autovalor de T será $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

16. Determine a projeção E de $\mathbb{R}^2$ sobre $W_1 = [(1, -1)]$ na direção da reta $W_2 = [(1, 2)]$.

17. Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$. Mostre que E_1 é a projeção sobre W_1 na direção de W_2 se, e somente se, $I - E_1$ é a projeção sobre W_2 na direção de W_1.

18. Sejam E_1 a projeção de V sobre W_1 na direção de W_2 e E_1 a projeção de V sobre U_1 na direção de U_2. Mostre que $E_1 + E_2$ é uma projeção se, e somente se, $E_1E_2 = 0$.

19. Sejam $E : V \to V$ uma projeção e $f \in \mathbb{R}[x]$. Mostre que $f(E) = aI + bE$.

20. Seja $E : V \to V$ uma projeção. Mostre que $I + E$ é invertível exibindo sua inversa $(I + E)^{-1}$.

21. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$
Determine matrizes $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ tais que $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$.

22. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine matrizes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{E}_3$ tais que $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + \lambda_3\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 = \mathbf{0}$.

23. Mostre que o auto-espaço associado ao autovalor λ_i, nos Exercícios 21 e 22, é gerado pelos vetores colunas das matrizes $\mathbf{E}_j$ com $i \neq j$. Essa afirmação pode ser generalizada?

24. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Sejam $E_1 : V \to V$ uma projeção sobre $\ker T$ e $E_2 : W \to W$ uma projeção na direção de $\operatorname{Im} T$. Mostre que existe uma transformação linear $S : W \to V$ tal que $ST = I_V - E_1$ e $TS = I_W - E_2$.

25. Seja $T : V \to W$ um operador linear tal que $T^2 = I$.

    (a) Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$, onde
    $$W_1 = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\} \text{ e } W_2 = \{\mathbf{u} \in V : T(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}\}$$

    (b) Determine W_1 e W_2 para o operador linear $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^t$.

26. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) $T^2 = I$;

    (b) Se $E_1 = \frac{1}{2}(I - T)$ e $E_2 = \frac{1}{2}(I + T)$, então $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$ e $E_1 + E_2 = I$;

    (c) $\ker(T + I) = \operatorname{Im}(T - I)$;

    (d) $\ker(T - I) = \operatorname{Im}(T + I)$;

    (e) T é uma reflexão.

27. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ tal que $T^k = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Mostre que o polinômio característico de T é x^n.

28. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^t$ têm o mesmo polinômio minimal.

29. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que o polinômio minimal $m_{\mathbf{C}}$ da matriz
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$
é o mínimo múltiplo comum dos polinômios minimais $m_{\mathbf{A}}$ e $m_{\mathbf{B}}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente.

30. Sejam $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz fixada e $T : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ um operador linear definido por
$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}.$$
Mostre que o polinômio minimal de T é o polinômio minimal de $\mathbf{B}$.

31. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. As matrizes $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ têm o mesmo polinômio minimal?

Capítulo 5

Espaços com Produto Interno

O principal objetivo neste capítulo é estudar espaços vetorias nos quais tenha sentido falar do "comprimento" de um vetor e do "ângulo" entre dois vetores.

5.1 Produto Interno

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é um *produto interno* sobre V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2. $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq 0$, para todo $\mathbf{u} \in V$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Observações 5.1 *1. Note que*

$$\langle a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle,\ \ \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,$$

pois

$$\begin{aligned} \langle a\mathbf{u}+b\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle &= \langle a\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle b\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \\ &= a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle. \end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$\langle a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n, \mathbf{w}\rangle = a_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}\rangle + \cdots + a_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{w}\rangle,\ \ \forall\ a_i \in \mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \in V.$$

2. Note, também, que

$$\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v}+b\mathbf{w}\rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + b\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle,\ \ \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \ e\ \ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Exemplo 5.2 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in V$. *Então*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

é um produto interno sobre V, *o qual é chamado de* produto interno usual (canônico). *Note que*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{X}^t\mathbf{Y},$$

onde

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Y} = [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Dados $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3), \mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3) \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \text{ e } a\mathbf{u} = (ax_1, ax_2, ax_3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 \text{ em } \mathbb{R} \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

As condições (2) e (3) são análogas a (1). Finalmente, é claro que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0.$$

Agora, para provar que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, digamos $x_1 \neq 0$. Então

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow (\frac{x_2}{x_1})^2 + (\frac{x_3}{x_1})^2 = -1,$$

o que é uma contradição, pois o lado esquerdo da última equação é positivo enquanto o lado direito é negativo.

Exemplo 5.3 *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $\mathbf{u} = (x_1, x_2), \mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. *Então*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2$$

é um produto interno sobre V. *Note que*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y},$$

onde

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Y} = [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Solução. Vamos provar apenas a (4) condição. Como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2x_2)^2$$

temos que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in V \ \text{ e } \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0.$$

Note que, como a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

é simétrica temos que existe uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^t\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ é diagonal, pois

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1 (C_2 \to C_2 + C_1)} \left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] = [\ \mathbf{D} \ \vdots \ \mathbf{P}^t \ ].$$

Assim, dizemos que $\mathbf{A}$ é *positiva definida* se todos os elementos diagonais de $\mathbf{D}$ são positivos. Portanto, a função $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{X}^t\mathbf{AY}$ define um produto interno se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica positiva definida.

Exemplo 5.4 *Sejam $V = P_1(\mathbb{R})$ e $f = a_0 + a_1x$, $g = b_0 + b_1x \in V$. Então*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

é um produto interno sobre V.

Solução. Vamos provar apenas a (4) condição. Como

$$\langle f, f \rangle = a_0^2 + a_0a_1 + \frac{1}{3}a_1^2 = (a_0 + \frac{a_1}{2})^2 + \left(\frac{a_1}{\sqrt{12}}\right)^2$$

temos que

$$\langle f, f \rangle \geq 0, \ \forall \ f \in V \ \text{ e } \ \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Exemplo 5.5 *Sejam $V = l^2$ o conjunto de todas as seqüências reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

e $\mathbf{u} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{v} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n$$

é um produto interno sobre V.

Solução. Note que a função $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ está bem definida, pois se

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty, \;\; y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$$

e

$$0 \leq (|x_n| - |y_n|)^2 = x_n^2 - 2\,|x_n y_n| + y_n^2,$$

então

$$2\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = x + y < \infty.$$

Agora, fica como uma exercício provar que a função $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ é um produto interno.

Um *espaço euclidiano* é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ munido com um produto interno.

Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Dizemos que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ e denotamos por

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Sejam α e β subconjuntos de V. Dizemos que α e β são *ortogonais* se

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \;\; \forall \;\mathbf{u} \in \alpha \;\text{ e }\; \mathbf{v} \in \beta$$

e denotamos por

$$\alpha \perp \beta.$$

Proposição 5.6 *Seja V um espaço euclidiano. Então*:

1. $\mathbf{0} \perp \mathbf{u}$, *para todo* $\mathbf{u} \in V$.

2. *Se* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, *então* $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

3. *Se* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, *para todo* $\mathbf{v} \in V$, *então* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

4. *Se* $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, *então* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

5. *Se* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, *então* $(a\mathbf{u}) \perp \mathbf{v}$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *e* $a \in \mathbb{R}$.

Prova. Vamos provar apenas os itens (1) e (3). Como $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in V$, temos que

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle = \langle 0\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Finalmente, como por hipótese $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, para todo $\mathbf{v} \in V$, temos, em particular, que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. ■

Teorema 5.7 *Seja V um espaço euclidiano. Se β é um subconjunto (finito ou infinito) de V formado de vetores não-nulos ortogonais aos pares, então β é linearmente independente.*

Prova. Sejam $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vetores distintos de β e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_j \rangle = \langle x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= x_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_j \rangle + \cdots + x_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j \rangle = x_j\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle,\end{aligned}$$

pois $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Como $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle > 0$ temos que $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto, β é linearmente independente. ■

Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \ldots\}$$

é uma *base ortogonal* (*Hamel*) de V se $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$, quando $i \neq j$.

Corolário 5.8 *Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Se*

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é um conjunto de vetores não-nulos ortogonais aos pares de V, então β é uma base ortogonal de V. ■

Exemplo 5.9 *Seja $V = \mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Então*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

é uma base ortogonal de V.

Exemplo 5.10 *Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2,$$

onde $\mathbf{u} = (x_1, x_2), \mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Então

$$\beta = \{(2, 1), (-3, 1)\}$$

é uma base ortogonal de V.

Solução. Como

$$\langle (2, 1), (-3, 1) \rangle = 2(-3) - 2 \cdot 1 - 1(-3) + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

temos que os vetores $(2, 1)$ e $(-3, 1)$ são LI. Portanto, β é uma base ortogonal de V.

Exemplo 5.11 *Sejam* $V = P_1(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

onde $f = a_0 + a_1x$, $g = b_0 + b_1x \in V$. *Então*

$$\beta = \{1, 1 - 2x\}$$

é uma base ortogonal de V.

Solução. Como

$$\langle 1, 1 - 2x\rangle = \int_0^1 (1 - 2t)dt = 0$$

temos que os vetores 1 e $1 - 2x$ são LI. Portanto, β é uma base ortogonal de V.

Exemplo 5.12 *Seja* $V = l^2$ *com o produto interno do Exemplo* 5.5. *Então*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}, \text{ onde } \mathbf{e}_n = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots),$$

é um conjunto ortogonal de V *mas não é uma base ortogonal de* V.

Solução. É claro que $\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n\rangle = 0$ se $m \neq n$, isto é, β é um conjunto ortogonal de V. Logo, β é um conjunto LI mas $V \neq [\beta]$, pois

$$\mathbf{u} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in V \text{ e } \mathbf{u} \notin [\beta].$$

Sejam V um espaço euclidiano e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortogonal de V. Então

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i\rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i\rangle}\mathbf{u}_i, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Neste caso,

$$[\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}_n\rangle}{\langle \mathbf{u}_n,\mathbf{u}_n\rangle} \end{bmatrix}.$$

De fato, dado $\mathbf{u} \in V$ existem únicos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle &= \langle x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= x_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_j \rangle + \cdots + x_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_j \rangle \text{ por hipótese} \\ &= x_j\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$x_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle}, \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Portanto,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}\mathbf{u}_i, \ \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Observação 5.13 *Os escalares*

$$x_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}, i = 1, \ldots, n,$$

são chamados os coeficientes de Fourier *de* $\mathbf{u}$ *em relação à base* β *e a expressão para* $\mathbf{u}$ *no lado direito é chamada de* expansão de Fourier *de* $\mathbf{u}$ *em relação à base* β*. Os vetores* $x_i\mathbf{u}_i$ *são os* vetores projeções *de* $\mathbf{u}$ *sobre* $[\mathbf{u}_i]$*. Neste caso,* $(\mathbf{u} - x_i\mathbf{u}_i) \perp \mathbf{u}_i$*,* $i = 1, \ldots, n$*, (confira Figura 5.1).*

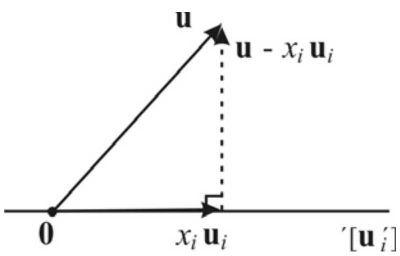


Figura 5.1: Projeção de $\mathbf{u}$ sobre $[\mathbf{u}_i]$.

Exemplo 5.14 *Seja* $V = \mathbb{R}^2$ *com o produto interno usual. Então*

$$\beta = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

é uma base ortogonal de V*. Calcule* $[(2, 3)]_\beta$*.*

Solução. É claro que

$$\langle (1, 1), (-1, 1) \rangle = 0.$$

Logo, β é uma base ortogonal de V. Para calcular as coordenadas do vetor $\mathbf{u} = (2, 3)$ em relação à base β, basta calcular

$$x_1 = \frac{\langle (2, 3), (1, 1) \rangle}{\langle (1, 1), (1, 1) \rangle} = \frac{5}{2} \text{ e } x_2 = \frac{\langle (2, 3), (-1, 1) \rangle}{\langle (-1, 1), (-1, 1) \rangle} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$[(2, 3)]_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Mostre que

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

é um produto interno sobre V.

2. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1x_2y_2$$

é um produto interno sobre V.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

é um produto interno sobre V.

4. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in V$. Mostre que

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

é um produto interno sobre V.

5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Verifique se

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

é um produto interno sobre V.

6. Seja $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Mostre que

$$\beta = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 3), (1, 1, -9, 2), (16, -13, 1, 3)\}$$

é uma base ortogonal de V. Calcule $[(a, b, c, d)]_\beta$.

7. Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear

   (a) Que condições T deve satisfazer para que a função

   $$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle$$

   seja um produto interno sobre V?

(b) Que condições T deve satisfazer para que a função

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle$$

seja um produto interno sobre V?

8. Sejam V e W espaços vetoriais com produtos internos f e g, respectivamente. Mostre que a função $h : (V \times W) \times (V \times W) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h((\mathbf{v},\mathbf{w}),(\mathbf{v}',\mathbf{w}')) = f(\mathbf{v},\mathbf{v}') + g(\mathbf{w},\mathbf{w}')$$

é um produto interno sobre $V \times W$.

9. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Para $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V$, seja

$$f(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{Y}.$$

Mostre que f é um produto interno sobre V se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ e $\det(\mathbf{A}) > 0$.

10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a soma de dois produtos internos sobre V é um produto interno sobre V. A diferença de dois produtos internos sobre V é um produto interno sobre V? Mostre que um múltiplo positivo de um produto interno sobre V é um produto interno sobre V.

11. Descreva explicitamente todos os produtos internos sobre $\mathbb{R}$.

12. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ pode ser munido com um produto interno.

5.2 Norma

Seja V um espaço euclidiano. A *norma* ou *comprimento* de um vetor $\mathbf{u} \in V$ é definida como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}.$$

Note que esta definição é possível, pois $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$, para todo $\mathbf{u} \in V$.

Seja $\mathbf{u} \in V$ um vetor qualquer. Dizemos que $\mathbf{u}$ é um *vetor unitário* se

$$\|\mathbf{u}\| = 1.$$

Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é um vetor não-nulo qualquer, então

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

é um vetor unitário tal que

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}].$$

Neste caso, dizemos que $\mathbf{u}$ é a *normalização* do vetor $\mathbf{v}$.

Teorema 5.15 *Seja V um espaço euclidiano. Então:*

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, *para todo* $\mathbf{u} \in V$.
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
3. $\|a\mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\|$, *para todo* $\mathbf{u} \in V$ *e* $a \in \mathbb{R}$.
4. $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
5. $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. (***Desigualdade de Cauchy-Schwarz***)
6. $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, *para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. (***Desigualdade de Minkowski***)

Prova. Vamos provar apenas o item (5). Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nada há para ser provado. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então

$$\|s\mathbf{v} + t\mathbf{u}\| \geq 0, \ \forall \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\|s\mathbf{v} + t\mathbf{u}\|^2 = s^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle st + \|\mathbf{u}\|^2 t^2$$

temos que

$$s^2 \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle st + \|\mathbf{u}\|^2 t^2 \geq 0, \ \forall \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, escolhendo $s = \|\mathbf{u}\|^2$ e $t = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, temos que

$$\|\mathbf{u}\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 - 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \left(\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2\right) \geq 0.$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \geq 0 \Rightarrow |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2,$$

pois $\|\mathbf{u}\|^2 > 0$. Portanto, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

■

Exemplo 5.16 *Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ se, e somente se,*

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|, \ \forall \ a \in \mathbb{R}.$$

Solução. Como

$$\|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

temos que

$$\|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + a^2 \|\mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u}\|^2$$

se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, pois $a^2 \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Logo, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos que

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|, \ \forall \ a \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, como

$$\|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u}\|^2$$

temos que

$$-2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0, \ \forall \ a \in \mathbb{R},$$

Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, nada há para ser provado. Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então

$$-2a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 = -\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + \|\mathbf{v}\|^2\left(a - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)^2 \geq 0, \ \forall \ a \in \mathbb{R}.$$

Assim, escolhendo

$$a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2},$$

temos que

$$-\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \geq 0.$$

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, isto é, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Tendo definido o conceito de comprimento em um espaço euclidiano qualquer, é natural perguntar: se o conceito de ângulo pode ser generalizado? A resposta é verdadeira se nosso corpo é os reais $\mathbb{R}$ mas é falsa no corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Seja V um espaço euclidiano. Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$, o *ângulo* entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definido como o ângulo θ tal que

1. $0 \leq \theta \leq \pi$;
2. $\cos\theta = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$.

Observação 5.17 *Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,*

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

e, assim, o ângulo θ sempre existe e é único.

Sejam V um espaço euclidiano e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base de V. Dizemos que β é uma *base ortonormal* ou *sistema de coordenadas cartesianas* para V se

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo 5.18 *Seja $V = \mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Então*

$$\beta = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

é uma base ortonormal de V.

EXERCÍCIOS

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

onde $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Calcule o ângulo entre os vetores $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$.

2. Seja $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ com o produto interno

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

onde $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in V$. Calcule o ângulo entre as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sejam $V = P_1(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

onde $f = a_0 + a_1x$, $g = b_0 + b_1x \in V$. Calcule o ângulo entre os polinômios

$$f = 1 + x \text{ e } g = 1 - x.$$

Também, determine $h \in V$ tal que o ângulo entre h e $1 + x$ seja $60°$.

4. Seja $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas munido com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Calcule o ângulo entre

$$f(x) = x + e^x \text{ e } g(x) = x.$$

5. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, a *distância* entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definida por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Mostre que:

(a) $d(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0$, para todo $\mathbf{u} \in V$ e $d(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$, para todos $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

(c) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{v},\mathbf{w})$, para todos $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

6. (**Identidade do Paralelogramo**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right).$$

7. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2.$$

8. (**Identidade de Polarização**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que
$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right).$$

9. (**Identidade de Appolonius**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$. Mostre que
$$\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + 2\left\|\mathbf{w} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\right\|^2.$$

10. Seja V um espaço vetorial com dois produtos internos f e g. Mostre que se $\|\mathbf{u}\|_f = \|\mathbf{u}\|_g$, para todo $\mathbf{u} \in V$, então $f = g$.

11. Sejam V um espaço euclidiano e $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, então
$$(x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) \perp (z\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$

12. Seja V um espaço euclidiano. Mostre que se $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ são ortogonais e unitários, então $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

13. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in V$. Seja $\mathbf{A}$ a matriz cujas colunas sejam esses vetores. Mostre que a matriz $\mathbf{A^tA}$ é diagonal se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais em relação ao produto interno usual.

14. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$. Mostre que a função $f(x) = \|\mathbf{u} + x\mathbf{v}\|^2$ possui um ponto de mínimo.

15. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u} \in V$ um vetor unitário. Sejam
$$S = \{\mathbf{v} \in V : \|\mathbf{v}\| = 1\}$$
e $f : S \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

(a) Mostre que o valor máximo de f é 2 e que o valor mínimo de f é 0.

(b) Mostre que $f(\mathbf{v}) = \sqrt{2}$ se, e somente se, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

16. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores unitários tais que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \pm 1$, então $\mathbf{u} = \pm \mathbf{v}$.

17. Sejam V espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

se, e somente se, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente dependentes. (Sugestão: Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, nada há para ser provado. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \text{ ou } \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle .$$

Logo,

$$\left\langle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle = 1 \text{ ou } \left\langle \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\rangle = -1,$$

continue.)

18. Sejam V espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$, para algum $a \in \mathbb{R}_+$.

19. Sejam V espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mostre que

$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| .$$

20. (**Teorema de Pitágoras**) Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$. Mostre que se $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$, quando $i \neq j$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{u}_i\|^2$$

21. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Mostre que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \, \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| .$$

(Sugestão: Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, nada há para ser provado. Caso contrário, considere a normalização dos vetores

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \text{ e } \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Note que

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \, \|\mathbf{u}\|^{-2} \, \|\mathbf{v}\|^{-2}$$

e use a desigualdade triangular.)

5.3 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Sejam V um espaço euclidiano e

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base de V. Então poderemos obter uma base ortogonal

$$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

de V a partir da base α como segue:

Para iniciar o processo vamos escolher $\mathbf{v}_1$ como qualquer um dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, digamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, já vimos que o vetor

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

é ortogonal ao vetor $\mathbf{v}_1$ e é claro que

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2].$$

Assim, os vetores de $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ são da forma

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2,$$

para alguns $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Como $\mathbf{u}_3 \notin [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ temos que

$$\langle \mathbf{u}_3 - (x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

Analogamente,

$$\langle \mathbf{u}_3 - (x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}..$$

Assim, o vetor

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

é tal que

$$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3 \text{ e } [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3].$$

(confira Figura 5.2).

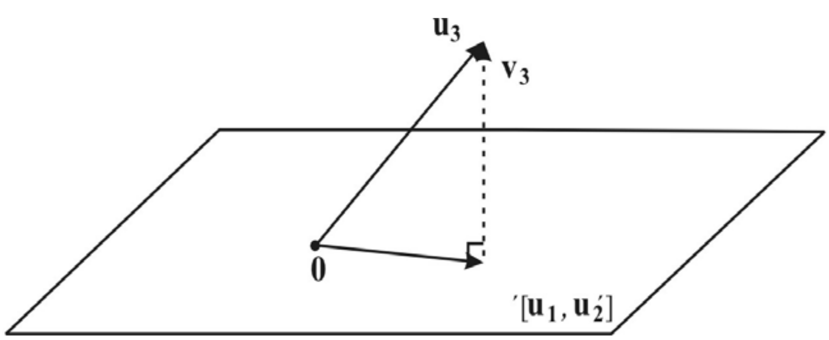


Figura 5.2: Projeção de $\mathbf{u}_3$ sobre o espaço $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

Continuando desta maneira, obtemos uma base ortogonal

$$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

de V, onde

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, k = 1, \ldots, n.$$

Este processo de ortogonalização é conhecido como o *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Conclusão 5.1 *A partir de uma base qualquer de V podemos sempre obter uma base ortogonal (ortonormal) de V. Mais geralmente, se*

$$\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \ldots)$$

é um seqüência LI de V, então podemos construir, indutivamente, uma seqüência ortogonal

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \ldots)$$

de V tal que

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k], \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 5.19 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e*

$$\alpha = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

uma base de V. Determine a partir de α uma base ortonormal de V.

Solução. Para resolver este problema, vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Escolhendo um vetor inicial $\mathbf{u}_1$, digamos

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1).$$

Agora, tomamos

$$\mathbf{u}_2 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1), \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

e

$$\mathbf{u}_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle (0,0,1), \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Finalmente, normalizando os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, obtemos uma base ortonormal

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \right\}$$

de V.

Exemplo 5.20 *Seja $V = P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes reais munido com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Determine uma base ortonormal de V a partir da base

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}.$$

Solução. Para resolver este problema, vamos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Escolhendo um vetor inicial p_1, digamos

$$p_1 = 1.$$

Agora, tomamos

$$\begin{aligned}
p_2 &= x - \frac{\langle x, p_1 \rangle}{\|p_1\|^2} p_1 = x, \\
p_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, p_1 \rangle}{\|p_1\|^2} p_1 - \frac{\langle x^2, p_2 \rangle}{\|p_2\|^2} p_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \\
p_4 &= x^3 - \frac{\langle x^3, p_1 \rangle}{\|p_1\|^2} p_1 - \frac{\langle x^3, p_2 \rangle}{\|p_2\|^2} p_2 - \frac{\langle x^3, p_3 \rangle}{\|p_3\|^2} p_3 = x^3 - \frac{3}{5} x,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Finalmente, normalizando os vetores p_1, p_2, p_3, p_4,..., obtemos uma base ortonormal

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots\}$$

de V. Os polinômios nesta seqüência são chamados, a menos de constantes, de *polinômios de Legendre*.

Observação 5.21 *Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Se*

$$\langle x\mathbf{u} + y\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0,$$

não é verdade, em geral, que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, pois se $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e

$$\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

uma base ortogonal de V, onde $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$. Seja $\mathbf{w} = (5, -3) \in V$. Então

$$\langle 4\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

mas $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 2$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 8$.

EXERCÍCIOS

1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormal de V a partir da base
$$\beta = \{(1,2),(2,1)\}.$$

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormal de V a partir da base
$$\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0)\}.$$

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido com o produto interno
$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$
onde $\mathbf{u} = (x_1,x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1,y_2) \in V$. Determine uma base ortonormal de V a partir da base
$$\beta = \{(-1,1),(1,1)\}.$$

4. Seja $V = P_1(\mathbb{R})$ munido com o produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$
onde $f = a_0 + a_1x$, $g = b_0 + b_1x \in V$. Determine uma base ortonormal de V a partir da base
$$\beta = \{x, 1+x\}.$$

5. Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormal para o subespaço $\mathbf{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$W = \{(x,y,z) \in V : x - y + z = 0\}.$$

6. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ munido com o produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}dt.$$
Determine uma base ortonormal de V a partir da base
$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

5.4 Complementar Ortogonal

Sejam V um espaço euclidiano e β um subconjunto não-vazio de V. O *complementar ortogonal* de β em V é o conjunto

$$\beta^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in \beta\}.$$

Observação 5.22 *Pelos itens* (4) *e* (5) *da Proposição* 5.6*,* $\beta^{\perp}$ *é um subespaço de* V *se* β *é um subespaço ou não de* V*. Note, também, pelos itens* (1) *e* (3) *da Proposição* 5.6*, que* $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$ *e* $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$*.*

Exemplo 5.23 *Sejam* $\mathbb{R}^4$ *com o produto interno usual e*

$$W = [(1,0,1,0),(1,1,0,0)]$$

um subespaço de $\mathbb{R}^4$*. Determine* $W^{\perp}$*.*

Solução. Para resolver este problema basta encontrar

$$\mathbf{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

tal que

$$\langle \mathbf{u}, (1,0,1,0) \rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle \mathbf{u}, (1,1,0,0) \rangle = 0,$$

isto é, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Logo, $x = -z$, $y = z$ e z, t quaisquer. Portanto,

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = -z, y = z \ \text{ e } \ z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-1,1,1,0),(0,0,0,1)]. \end{aligned}$$

Teorema 5.24 (Teorema da Projeção) *Sejam* V *um espaço euclidiano e* W *um subespaço de* V *com* $\dim W = k$*. Então*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Prova. Como $\dim W = k$ temos, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, que W contém uma base ortonormal

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}.$$

Para cada $\mathbf{v} \in V$, consideremos o vetor

$$\widehat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k \in W,$$

isto é, a projeção de $\mathbf{v}$ sobre W ou a expansão de Fourier de $\mathbf{v}$ com respeito à base β. Logo,

$$\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}) \in W + W^{\perp},$$

pois

$$\langle \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \widehat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_i \rangle = 0, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Logo, $V = W + W^{\perp}$. Portanto, $V = W \oplus W^{\perp}$, pois $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. ■

Observação 5.25 *Se a dimensão de W, no Teorema da Projeção, for infinita o resultado é, em geral, falso. Por exemplo, sejam $V = l^2$ e $W = [\beta]$ do Exemplo* 5.12. *Então*

$$W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in W\} = \{\mathbf{0}\},$$

pois se $\mathbf{v} = (y_n) \in W^{\perp}$, então $y_n = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto,

$$W \oplus W^{\perp} = W \neq V.$$

Note que, β é um conjunto ortonormal maximal, pois não existe $\mathbf{v} = (y_n) \in W^{\perp}$ diferente do vetor nulo.

Teorema 5.26 *Sejam V um espaço euclidiano e W_1, W_2 subespaços de V. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. $V = W_1 \oplus W_2$ *e* $W_1 \perp W_2$ (*soma direta ortogonal*);
2. $V = W_1 \oplus W_2$ *e* $W_2 = W_1^{\perp}$;
3. $V = W_1 \oplus W_2$ *e* $W_2 \subseteq W_1^{\perp}$.

Prova. $(1 \Rightarrow 2)$ Como $W_1 \perp W_2$ temos que $W_2 \subseteq W_1^{\perp}$. Por outro lado, se $\mathbf{v} \in W_1^{\perp} \subseteq V$, então existem $\mathbf{w}_1 \in W_1$ e $\mathbf{w}_2 \in W_2$ tais que $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Logo,

$$0 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle.$$

implica que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_2 \in W_2$. Assim, $W_1^{\perp} \subseteq W_2$. Portanto, $W_2 = W_1^{\perp}$.
$(2 \Rightarrow 3)$ É claro.
$(3 \Rightarrow 1)$ Como $W_2 \subseteq W_1^{\perp}$ temos que $W_1 \perp W_2$. ■

Proposição 5.27 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e W um subespaço de V. Então $V = W \oplus W^{\perp}$ se, e somente se, existe um operador linear $P : V \to V$ tal que $\operatorname{Im} P = W$, $\ker P = W^{\perp}$ e $P(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, para todo $\mathbf{w} \in W$.*

Prova. Se $V = W \oplus W^{\perp}$, basta definir $P : V \to V$ por $P(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1$, para todo $\mathbf{w}_1 \in W$ e $\mathbf{w}_2 \in W^{\perp}$. Reciprocamente, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser escrito sob a forma

$$\mathbf{v} = P(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - P(\mathbf{v})),$$

onde $P(\mathbf{v}) \in W$ e $\mathbf{v} - P(\mathbf{v}) \in W^{\perp}$. Logo, $V = W + W^{\perp}$. É fácil verificar que

$$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}.$$

Portanto, $V = W \oplus W^{\perp}$. ■

Observação 5.28 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e W um subespaço de V. Então $P(\mathbf{v}) \in W$ é a melhor aproximação (única) de $\mathbf{v} \in V$ em W, isto é,*

$$\|\mathbf{v} - P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \ \forall \ \mathbf{w} \in W,$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \mathbf{v} - P(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{w} \in W.$$

Além disso, se

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

é uma base ortonormal de W, então

$$P(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k\rangle \mathbf{u}_k.$$

Exemplo 5.29 *Sejam $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e*

$$W = [(1,1,1,1),(1,-3,4,-2)]$$

um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Determine a melhor aproximação de $\mathbf{v} = (1,3,5,7) \in \mathbb{R}^4$ sobre W.

Solução. Como

$$\langle (1,1,1,1),(1,-3,4,-2)\rangle = 0$$

temos que $\beta = \{(1,1,1,1),(1,-3,4,-2)\}$ é uma base ortogonal de W. Então os coeficientes de Fourier $\mathbf{v}$ em relação a β são

$$x_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, (1,1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1,1)\|^2} = 4 \text{ e } x_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, (1,-3,4,-2)\rangle}{\|(1,-3,4,-2)\|^2} = -\frac{1}{15}.$$

Portanto,

$$P(\mathbf{v}) = x_1(1,1,1,1) + x_2(1,-3,4,-2) = \frac{1}{15}(59,63,56,62).$$

Exemplo 5.30 *Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine a solução do sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ x + 8y - 6z = -7 \end{cases}.$$

mais próxima do vetor $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

Solução. Vamos escalonar a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -6 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{array}\right].$$

Portanto,

$$\mathbf{X} = (\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0) + c(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1), \ \forall \ c \in \mathbb{R},$$

é a solução geral do sistema. Seja

$$W = [(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)]$$

o subespaço solução do sistema homogêneo. Então

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{17}}(2, 2, 3) \right\}$$

é uma base ortonormal para W e

$$P(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0) = \langle(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(2, 2, 3)\rangle \frac{1}{\sqrt{17}}(2, 2, 3) = \frac{14}{51}(2, 2, 3).$$

Poranto,

$$\mathbf{X}_0 = (\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0) + \frac{14}{51}(2, 2, 3) = \frac{1}{51}(215, -40, 42)$$

é a solução mais próxima do vetor $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (z, x - y, -z),$$

e $W = \ker T$.

(a) Encontre uma base ortonormal para $W^\perp$, em relação ao produto interno usual.

(b) A mesma questão, considerando o produto interno

$$\langle(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2.$$

2. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e

$$W = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$$

um subespaço de V. Determine $W^\perp$ e um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Im} T = W$ e $\ker T = W^\perp$.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno

$$\langle(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2 + 3z_1z_2.$$

e $\mathbf{W}$ núcleo do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x - y, 0, z).$$

(a) Encontre bases ortogonais de W e $W^{\perp}$.

(b) Use as bases ortogonais de W e $W^{\perp}$ do item (a) para determinar uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e

$$W = [(1,0,-1),(0,1,1)].$$

um subespaço de V. Determine $W^{\perp}$ e um operador linear diagonalizável $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Im} T = W$ e $\ker T = W^{\perp}$.

5. Sejam $V = P_2(\mathbb{R})$ e

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt.$$

(a) Verifique que a função definida acima é um produto interno.

(b) Se $W = [1, 1-t]$, determine uma base ortonormal de W utilizando esse poduto interno.

6. Seja $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostre que

$$f(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^t\mathbf{A}\right),$$

onde $\mathbf{A},\mathbf{B} \in V$, é um produto interno sobre V. Determine uma base ortonormal de V a partir da base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

7. Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ munido com o produto interno

$$f(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{B}^t\mathbf{A}\right) \text{ e } W = \{\mathbf{A} \in V : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}\}.$$

Determine uma base ortogonal de $W^{\perp}$.

8. Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e o subconjunto

$$\beta = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine $\beta^{\perp}$.

(b) Se tivéssemos

$$\beta = [(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)],$$

o que seria $\beta^{\perp}$? Considerando esta hipótese, Determine bases ortogonais de β e $\beta^{\perp}$.

9. Sejam $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e $W = [\mathbf{u}_i]$. Determine bases ortonormais de W e $W^\perp$, onde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2, 1), \mathbf{u}_2 = (4, 3, 0, -1) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (0, -3, -8, 5).$$

10. Sejam $V = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \text{ e } W = \{f \in V : f(x) = f(-x), \;\forall\; x \in [-1, 1]\}.$$

Determine $W^\perp$.

11. Sejam V um espaço euclidiano e

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

uma base ortogonal de V. Mostre que

$$\{k_1\mathbf{u}_1, \dots, k_n\mathbf{u}_k\}$$

uma base ortogonal de V, para todo $k_i \in \mathbb{R}^*$, $i = 1, \dots, n$.

12. Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que:

    (a) $W_1 \subseteq W_2$ se, e somente se, $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

    (b) $W_1^{\perp\perp} = W_1$.

    (c) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ e $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

13. Sejam V um espaço euclidiano com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e, para cada $\mathbf{u} \in V$, considere o conjunto

$$\beta_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{v} \in V : \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\}..$$

Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

    (a) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, para algum $\mathbf{w} \in V$.

    (b) $\beta_{\mathbf{u}} \cap r = \{\mathbf{v}\}$, onde

$$r = \{\mathbf{v} + t\mathbf{w} : t \in \mathbb{R}\}.$$

14. Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vetores distintos. Mostre que

$$\{\mathbf{x} \in V : (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{v})\}$$

é uma esfera.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que
$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$$
Mostre que
$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = - \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle \,, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

16. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear definido por
$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}^t.$$
Mostre que se $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ e $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, então
$$\langle T(1,0), (0,1) \rangle = a_{21} \ \text{ e } \ \langle T(0,1), (1,0) \rangle = a_{12}.$$

17. Sejam $\mathbf{A}$ e T como no Exercício anterior e suponhamos que
$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$$
Mostre que
$$\mathbf{A} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

18. Sejam $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e
$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{u}_i$$
um vetor fixo em $\mathbb{R}^3$. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (produto vetorial). Mostre que
$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Reciprocamente, mostre que cada matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$, descreve um operador linear da forma $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

19. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear tal que
$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, n,$$
onde
$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$
é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\| T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \,, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$
Conclua que T é um isomorfismo.

20. Sejam $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e

$$W = [(1,1,1,1),(1,-1,2,2),(1,2,-3,-4)]$$

um subespaço de $\mathbb{R}^4$. Determine a melhor aproximação de $\mathbf{v} = (1,2,-3,4) \in \mathbb{R}^4$ sobre W.

21. Sejam $V = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

e $W = [1, x, x^2, x^3]$ um subespaço de V. Determine a melhor aproximação de $f(x) = e^x$ em W.

22. (**Identidade de Bessel**) Sejam V um espaço euclidiano e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortonormal de V. Mostre que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n\rangle|^2, \ \forall \ \mathbf{v} \in V.$$

23. (**Identidade de Parseval**) Sejam V um espaço euclidiano e

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortonormal de V. Mostre que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_1\rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_n\rangle, \ \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

24. Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita,

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

um conjunto ortonormal de V e

$$P(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k\rangle\mathbf{u}_k, \ \forall \ \mathbf{v} \in V.$$

(a) (**Desigualdade de Bessel**) Mostre que

$$\|P(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|, \ \forall \ \mathbf{v} \in V.$$

(b) Mostre que β é uma base de V se, e somente se, $P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$.

(c) Mostre que β é uma base de V se, e somente se,

$$\|P(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \ \forall \ \mathbf{v} \in V.$$

(d) Mostre que β é uma base de V se, e somente se,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_1\rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_n\rangle, \ \forall \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Capítulo 6

Operadores Especiais

Com objetivo de classificar as cônicas e as superfícies quadráticas apresentaremos neste capítulo alguns operadores especiais.

6.1 Operador Adjunto

Sejam V um espaço euclidiano e $\mathbf{v} \in V$ fixado. Então a função $f_\mathbf{v} : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V,$$

é uma transformação linear (prove isto!). Seja $V^* = L(V, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em $\mathbb{R}$. Já vimos que V^* é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 6.1 (Teorema da Representação de Riesz) *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $f \in V^*$. Então existe um único $\mathbf{v} \in V$ tal que*

$$f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Prova. (Existência) Seja $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal de V. Então cada vetor $\mathbf{u} \in V$ pode ser escrito de modo único sob a forma

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Logo,

$$f(\mathbf{u}) = x_1c_1 + \cdots + x_nc_n,$$

onde $c_i = f(\mathbf{u}_i) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Assim, tomando

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n,$$

obtemos a transformação linear

$$f_\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_i) &= \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}_i, c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \rangle \\ &= c_i \\ &= f(\mathbf{u}_i), i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portanto, $f = f_{\mathbf{v}}$.

(Unicidade) Sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tais que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Então

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Portanto, $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. ■

Observações 6.2 *1. O Teorema* 6.1 *mostra que a função $T : V \to V^*$ definida por*

$$T(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{v}}, \ \forall \ \mathbf{v} \in V$$

é um isomorfismo.

2. *Seja $W = \ker f$ como no Teorema* 6.1*. Então $V = W \oplus W^\perp$ e f é completamente determinado pelos vetores de $W^\perp$. De fato, seja a função $P : V \to V$ definida por*

$$P(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_2, \ \mathbf{w}_1 \in W \ \text{ e } \ \mathbf{w}_2 \in W^\perp.$$

Então P é um operador linear tal que $\operatorname{Im} P = W^\perp$ *e $P^2 = P$. Logo,*

$$f(\mathbf{u}) = f(P(\mathbf{u}) + \mathbf{u} - P(\mathbf{u})) = f(P(\mathbf{u})), \ \forall \ \mathbf{u} \in V,$$

pois $\mathbf{u} - P(\mathbf{u}) \in W$. Agora, suponhamos que $f \neq 0$. Então $\dim W^\perp = 1$*. Assim, se $W^\perp = [\mathbf{w}]$, então*

$$P(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.$$

Portanto,

$$f(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} f(\mathbf{w}), \ \forall \ \mathbf{u} \in V \ \text{ e } \ \mathbf{v} = \frac{f(\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}.$$

Exemplo 6.3 *Sejam $V = \mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e $f \in V^*$. Então existe um único*

$$\mathbf{v} = (c_1, \ldots, c_n) \in V$$

tal que

$$f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V,$$

pois

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1c_1 + \cdots + x_nc_n, \ \forall \ \mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in V.$$

Exemplo 6.4 *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual,* $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$*,* $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \in V$ *fixados e* $f \in V^*$ *definido por*

$$f(\mathbf{w}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \det[\ \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}\ ],\ \forall\ \mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3) \in V.$$

Então existe um único $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in V$ *tal que*

$$f(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,\ \forall\ \mathbf{w} \in V.$$

Exemplo 6.5 *Seja* $V = P_2$ *com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,\ \forall\ f, g \in V.$$

Se $t = 1 \in \mathbb{R}$ *fixado, determine* $g_t \in V$ *tal que* $\langle f, g_t \rangle = f(t)$*, para todo* $f \in V$*.*

Solução. Seja

$$g_t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V.$$

Então

$$\begin{aligned} 1 &= \langle 1, g_t \rangle = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 \\ t &= \langle x, g_t \rangle = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 \\ t^2 &= \langle x^2, g_t \rangle = \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2. \end{aligned}$$

Assim, resolvendo o sistema, obtemos

$$a_0 = 3, a_1 = -24 \text{ e } a_2 = 30.$$

Portanto,

$$g_t = 3 - 24x + 30x^2.$$

Teorema 6.6 *Sejam* V *um espaço euclidiano com* $\dim V = n$ *e* $T : V \to V$ *um operador linear. Então existe um único operador linear* $T^t : V \to V$ *tal que*

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v}) \rangle,\ \forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Prova. Seja $\mathbf{v} \in V$ fixado. Então a função $f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{u}) = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle,\ \forall\ \mathbf{u} \in V,$$

é uma transformação linear, isto é, $f \in V^*$. Assim, pelo Teorema 6.1, existe um um único $\mathbf{w} \in V$ (dependendo de $\mathbf{v}$) tal que

$$f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle,\ \forall\ \mathbf{u} \in V.$$

Vamos definir $T^t : V \to V$ por $T^t(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, de modo que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v})\rangle, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

É claro que T^t está bem definido e é único. Assim, resta mostrar que T^t é um operador linear. Dados $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v}+\mathbf{w})\rangle &= \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle + \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v})\rangle + \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v}) + T^t(\mathbf{w})\rangle, \ \forall \ \mathbf{u} \in V.\end{aligned}$$

Logo, $T^t(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T^t(\mathbf{v}) + T^t(\mathbf{w})$. De modo análogo, mostra-se que $T^t(a\mathbf{v}) = aT^t(\mathbf{v})$. Portanto, T^t é um operador linear. ■

Teorema 6.7 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$,*

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortonormal de V, $T : V \to V$ um operador linear e

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = [T]_\beta^\beta.$$

Então

$$a_{ij} = \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_i\rangle.$$

Prova. Para cada $\mathbf{u} \in V$, obtemos

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_1\rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_n\rangle \mathbf{u}_n.$$

Como $T(\mathbf{u}_j) \in V$, $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$T(\mathbf{u}_j) = \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_1\rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_n\rangle \mathbf{u}_n, j = 1, \ldots, n.$$

Por definição de $\mathbf{A}$, obtemos

$$a_{1j}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{u}_n = T(\mathbf{u}_j) = \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_1\rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_n\rangle \mathbf{u}_n, j = 1, \ldots, n.$$

Portanto,

$$a_{ij} = \langle T(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_i\rangle.$$

pois β base é uma de V. ■

Corolário 6.8 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então $[T^t] = \mathbf{A}^t$, onde $\mathbf{A} = [T]$ é a matriz de T em relação à qualquer base ortonormal de V.* ■

Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T possui um *operador adjunto* sobre V se existir um operador linear $T^t : V \to V$ tal que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v})\rangle, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Quando $\dim V = n$ o operador adjunto sempre existe.

Exemplo 6.9 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $T : V \to V$ um operador linear definido por*

$$T(x, y) = (x + 2y, y).$$

Determine o operador adjunto de T.

Solução. A representação matricial de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[T]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

é a representação matricial de T^t em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Assim,

$$[T^t(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + y \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T^t(x, y) = (x, 2x + y).$$

Teorema 6.10 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$, $S, T : V \to V$ operadores lineares e $a \in \mathbb{R}$. Então*:

1. $(T^t)^t = T$.
2. $(S + T)^t = S^t + T^t$ *e* $(aT)^t = aT^t$.
3. $(TS)^t = S^t T^t$.
4. *Se T é invertível, então T^t é invertivel e* $(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$.

Prova. Vamos provar apenas o item (3). Como

$$\langle \mathbf{u}, (TS)^t(\mathbf{v})\rangle = \langle TS(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle S(\mathbf{u}), T^t(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, S^t T^t(\mathbf{v})\rangle, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

temos, pela unicidade, que $(TS)^t = S^t T^t$. ■

Sejam V um espaço euclidiano, W um subespaço de V e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que W é um *subespaço invariante sob* T se $T(W) \subseteq W$, isto é,

$$T(\mathbf{w}) \in W, \ \forall \ \mathbf{w} \in W.$$

Se W é um subespaço invariante sob T, então T induz um operador linear $T_W : W \to W$ tal que $T_W(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w})$, para todo $\mathbf{w} \in W$. Note que $T_W \neq T$, pois W é domínio de T_W e não de V.

Exemplo 6.11 *Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Então o auto-espaço V_λ, para todo autovalor λ de T, é invariante sob T, pois dado $\mathbf{w} \in V_\lambda$, obtemos*

$$T(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w} \in V_\lambda.$$

Exemplo 6.12 *Sejam V um espaço euclidiano, $T : V \to V$ um operador linear e $U : V \to V$ operador linear qualquer tal que $TU = UT$. Então $\ker U$ e $\operatorname{Im} U$ são invariantes sob T, pois*

$$\mathbf{w} \in \ker U \Rightarrow U(T(\mathbf{w})) = UT(\mathbf{w}) = T(U(\mathbf{w})) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

isto é, $T(\mathbf{w}) \in \ker U$. Se $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} U$, então existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{w} = U(\mathbf{v})$. Logo,

$$T(\mathbf{w}) = T(U(\mathbf{v})) = TU(\mathbf{v}) = UT(\mathbf{v}) = U(T(\mathbf{v})),$$

isto é, $T(\mathbf{w}) \in \operatorname{Im} U$.

Teorema 6.13 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então:*

1. $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\perp$ *e* $\operatorname{Im} T^t = (\ker T)^\perp$. *Logo,*

   $$V = \operatorname{Im} T^t \oplus \ker T \;\text{ e }\; V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T^t.$$

   Em particular, a equação $T(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ tem solução se, e somente se, $\mathbf{b} \perp \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in \ker T^t$.

2. *Se W é um subespaço invariante sob T, então $W^\perp$ é um subespaço invariante sob T^t.*

3. *Os operadores T e T^t têm os mesmos autovalores.*

4. *Sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ autovetores de T e T^t associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$.*

5. $\ker T^tT = \ker T$ *e* $\operatorname{Im} T^tT = \operatorname{Im} T^t$.

Prova. Vamos provar apenas os itens (1) e (5). Dado $\mathbf{v} \in V$, obtemos

$$\mathbf{v} \in (\operatorname{Im} T)^\perp \Leftrightarrow 0 = \langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^t(\mathbf{v})\rangle,\;\; \forall\; \mathbf{u} \in V.$$

Logo, $T^t(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{v} \in \ker T^t$. Assim, $\ker T^t = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Como $(T^t)^t = T$ temos que

$$\ker T = \ker (T^t)^t = (\operatorname{Im} T^t)^\perp.$$

Logo,

$$(\ker T)^\perp = ((\operatorname{Im} T^t)^\perp)^\perp = \operatorname{Im} T^t.$$

Portanto,

$$V = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp} = \ker T \oplus \operatorname{Im} T^t$$

e

$$V = \operatorname{Im} T \oplus (\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Im} T \oplus \ker T^t.$$

(5) É claro $\ker T \subseteq \ker T^t T$. Por outro lado,

$$\mathbf{u} \in \ker T^t T \Rightarrow 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^t T(\mathbf{u}) \rangle = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{u}) \rangle = \|T(\mathbf{u})\|^2.$$

Assim, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{u} \in \ker T$. Finalmente, é claro que $\operatorname{Im} T^t T \subseteq \operatorname{Im} T^t$. Como

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} T^t &= \dim(\ker)^{\perp} = \dim V - \dim \ker T \\ &= \dim V - \dim \ker T^t T = \dim \operatorname{Im} T^t T \end{aligned}$$

temos que $\operatorname{Im} T^t T = \operatorname{Im} T^t$. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por
$$T(x, y, x) = (x + y + z, 3x + y + z, x + 3y + 3z).$$
Mostre que o sistema de equações linerares $T(x, y, z) = (3, 10, 1)$ não tem solução, mostrando que $(3, 10, 1) \notin (\ker T^t)^{\perp}$.

3. Sejam $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que
$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$
Determine os subespaços invariantes sob T

4. Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$
Verifique se o subespaço $W = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ é invariante sob T.

5. Sejam $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^4$. Verifique se os subespaços $W_1 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ e $W_2 = [\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ são invariantes sob T.

6. Sejam V um espaço euclidiano, $T : V \to V$ um operador linear e W um subespaço de V invariante sob T. Mostre que se $\mathbf{u} \in W$ for um autovetor de T_W associado ao autovalor λ, então $\mathbf{u}$ também é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

7. Sejam $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por
$$T(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}, \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$
é um operador linear e descreva explicitamente T^t.

8. Mostre que para cada transformação linear $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ existe um único $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que
$$T(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}), \ \forall \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

6.2 Operadores Ortogonais e Simétricos

Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é *ortogonal* se
$$TT^t = T^tT = I,$$
isto é, T é invertível com $T^{-1} = T^t$.

Teorema 6.14 *Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Então as seguintes condição são equivalentes:*

1. *T é ortogonal.*

2. *$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.*

3. *$\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$, para todo $\mathbf{u} \in V$.*

4. *T leva toda base ortonormal de V em alguma base ortonormal de V.*

Prova. $(1 \Leftrightarrow 2)$ Basta observar que

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, T^tT(\mathbf{v}) \rangle, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Basta notar que

$$\|T(\mathbf{u})\|^2 = \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{u})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2.$$

$(3 \Rightarrow 4)$ Seja

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortonormal de V. Então

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathbf{u}_i), T(\mathbf{u}_j)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|T(\mathbf{u}_i) + T(\mathbf{u}_j)\|^2 - \|T(\mathbf{u}_i) - T(\mathbf{u}_j)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j\|^2 - \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2\right) \\
&= \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$T(\beta) = \{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é uma base ortonormal de V.
$(4 \Rightarrow 2)$ Seja

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

uma base ortonormal de V. Então

$$T(\beta) = \{T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

é uma base ortonormal de V. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, existem únicos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i \text{ e } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{u}_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle T(\mathbf{u}_i), T(\mathbf{u}_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo 6.15 *Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Determine todos os operadores ortogonais sobre $\mathbb{R}^2$.*

Solução. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador ortogonal. Então toda base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é da forma

$$\{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)\},$$

onde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é a base canônical de $\mathbb{R}^2$. Seja $T(\mathbf{e}_1) = (a, b)$. Então

$$|a|^2 = a^2 \le a^2 + b^2 = \|T(\mathbf{e}_1)\|^2 = 1 \Rightarrow -1 \le a \le 1.$$

Como a função $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ é sobrejetora temos que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$. Logo, $b = \operatorname{sen}\theta$ e

$$T(\mathbf{e}_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

Sendo

$$\|T(\mathbf{e}_2)\| = 1 \text{ e } \langle T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)\rangle = 0,$$

obtemos

$$T(\mathbf{e}_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \text{ ou } T(\mathbf{e}_2) = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta).$$

Portanto, a representação matricial de T em relação a qualquer base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ ou } [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

isto é, qualquer operador ortogonal sobre $\mathbb{R}^2$ é uma rotação sobre a origem ou uma reflexão em torno de uma reta passando pela origem.

Sejam V um espaço euclidiano e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é *auto-adjunto* ou *simétrico* se $T^t = T$.

Teorema 6.16 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n > 0$ e $T : V \to V$ um operador simétrico. Então T possui um autovetor não-nulo.*

Prova. Consideremos a função (quociente de Raleigh) $R : V - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$R(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, T(\mathbf{u})\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}.$$

Como R é contínua e

$$S = \{\mathbf{u} \in V : \|\mathbf{u}\| = 1\}$$

é um conjunto compacto (confira Elon Lages Lima, Espaços Métricos, páginas 209 e 215) temos que existe $\mathbf{u}_0 \in V$ com $\|\mathbf{u}_0\| = 1$ tal que

$$R(\mathbf{u}_0) \leq R(\mathbf{v}), \ \forall \ \mathbf{v} \in S.$$

Seja $\mathbf{w} \in V - \{\mathbf{0}\}$ um vetor qualquer. Então

$$R(\mathbf{u}_0) \leq R(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}) = R(\mathbf{w}).$$

Portanto, $\mathbf{u}_0 \in V$ é um mínimo absoluto de R. Agora, fixado $\mathbf{v} \in V$ e considerando a função

$$g : \left] -\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right[\to \mathbb{R}$$

definida por

$$g(t) = R(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}_0, T(\mathbf{u}_0)\rangle + 2t\langle \mathbf{v}, T(\mathbf{u}_0)\rangle + t^2\langle \mathbf{v}, T(\mathbf{v})\rangle}{1 + 2t\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{v}\rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2},$$

a qual é bem definida e tem um mínimo em $t = 0$. Logo,

$$0 = g'(0) = 2\langle (T(\mathbf{u}_0) - \langle \mathbf{u}_0, T(\mathbf{u}_0)\rangle \mathbf{u}_0), \mathbf{v}\rangle.$$

Portanto,

$$T(\mathbf{u}_0) = \langle \mathbf{u}_0, T(\mathbf{u}_0)\rangle \mathbf{u}_0,$$

isto é, $\mathbf{u}_0$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = \langle \mathbf{u}_0, T(\mathbf{u}_0)\rangle$. ■

Teorema 6.17 *Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n > 0$ e $T : V \to V$ um operador simétrico. Então V possui uma base ortonormal formada de autovetores de T. Em particular, T é diagonalizável e o polinômio característico de T só tem raízes reais.*

Prova. Vamos usar indução em n. Se $n = 1$, então pelo Teorema 6.16 T possui um autovetor não-nulo $\mathbf{u}$. Seja

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}.$$

Então $\mathbf{u}_1$ é um autovetor de T com $\|\mathbf{u}_1\| = 1$. Suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado seja válido para todo espaço euclidiano com dimensão k, $1 \leq k < n$. É claro que $W = [\mathbf{u}_1]$ é invariante sob T. Assim, pelo Teorema 6.13, $W^\perp$ é invariante sob $T^t = T$. Como $S = T_{W^\perp}$ é simétrico e $W^\perp$ é um espaço euclidiano com $\dim W^\perp = n - 1 < n$ temos, pela hipótese de indução, que $W^\perp$ possui uma base ortonormal

$$\{\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de autovetores de S (T prove isto!). Já vimos que $V = W \oplus W^\perp$. Portanto,

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é uma base ortonormal de V formada de autovetores de T. ■

Corolário 6.18 *Seja $\mathbf{A} \in M(n, n)$ uma matriz simétrica. Então existe uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ tal que*

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

seja uma matriz diagonal. ■

Exemplo 6.19 *Sejam $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador simétrico. Determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada de autovetores de T.*

Solução. A representação matricial T com relação a qualquer base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2)$$

Como

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

temos duas possibilidades:

Se $\Delta = 0$, então $a = c$ e $b = 0$. Logo, $T = aI$ e qualquer base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ é formada de autovetores de T.

Se $\Delta > 0$, então T possui dois autovalores distintos λ_1 e λ_2. Logo, pelo Teorema 6.13, os autovetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são ortogonais. Portanto,

$$\beta = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada de autovetores de T e

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.20 *Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador simétrico tal que*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ *tal que*

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$$

seja uma matriz diagonal.

Solução. O polinômio característico de T é

$$f_T = x^3 - 12x - 16$$

e $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$ são os autovalores de T. Logo,

$$V_{\lambda_1} = [(-2, 0, 1), (-1, 1, 0)] \text{ e } V_{\lambda_2} = [(1, 1, 2)].$$

Assim, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos bases ortonormais

$$\left\{ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \right\} \text{ e } \left\{ (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}) \right\}$$

de V_{λ_1} e V_{λ_2}, respectivamente. Logo,

$$\beta = \{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de T e

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Mostre todas as afirmações deixadas nesta seção.

2. Sejam $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$ o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_1.

   (a) Determine o autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_2.

   (b) Determine a matriz $\mathbf{A}$.

   (c) Determine uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

3. Sejam V um espaço euclidiano, $T : V \to V$ um operador simétrico e $\mathbf{u} \in V$ um autovetor de T. Mostre que o subespaço

$$[\mathbf{u}]^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0\}$$

   é invariante sob T.

4. Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Mostre que se

$$\{\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

   é uma base de $[\mathbf{u}]^\perp$, então

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

   é uma base de V.

5. Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n > 1$, $T : V \to V$ um operador simétrico e $\mathbf{u} \in V$ um autovetor de T. Mostre que se $T_{[\mathbf{u}]^\perp}$ é diagonalizável, então T é diagonalizável.

6. Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $T : V \to V$ um operador linear invertível. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

   (a) $T = \lambda U$, onde U é um operador ortogonal.

   (b) T preserva ângulo, isto é,

$$\frac{\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle}{\|T(\mathbf{u})\| \, \|T(\mathbf{v})\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}.$$

(c) T preserva ortogonalidade, isto é, se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, então $\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = 0$.

(d) T preserva comprimento, isto é, se $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, então $\|T(\mathbf{u})\| = \|T(\mathbf{v})\|$.

7. Sejam $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Mostre que as colunas de $\mathbf{A}$ são ortonormais se, e somente se, as linhas de $\mathbf{A}$ também o são.

8. Sejam V um espaço euclidiano com $\dim V = n$ e $T : V \to V$ um operador linear.

   (a) Mostre que se T é auto-adjunto, então $\det T$ é real.

   (b) Mostre que se T é ortogonal, então $\det T = \pm 1$.

6.3 Quádricas

Seja $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Uma *isometria* ou um *movimento rígido* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva produto interno, isto é,

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 6.21 *Se $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, então a função $T_{\mathbf{t}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$T_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{t}, \ \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,$$

é um movimento rígido, chamado a translação (à direita) por $\mathbf{t}$*. É claro que $T_{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) = \mathbf{t}$, de modo que $T_{\mathbf{t}}$ não é um operador linear se $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$. Note, também, que todo operador ortogonal sobre $\mathbb{R}^n$ é um movimento rígido em $\mathbb{R}^n$.*

Lema 6.22 *Sejam $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um movimento rígido. Então*

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, se $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, então T é um operador linear.

Prova. Suponhamos que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e

$$T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, i = 1, \ldots, n.$$

Então

$$\|T(\mathbf{u})\| = \|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{u}\|, \ \forall \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Denotando $T(\mathbf{u})$ por $(y_1, \ldots, y_n)$, obtemos

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2. \tag{6.1}$$

Por outro lado,

$$\|T(\mathbf{u}) - \mathbf{e}_1\| = \|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{e}_1)\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{e}_1\|.$$

Logo,

$$(y_1 - 1)^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{6.2}$$

Assim, subtraindo a equação (6.1) de (6.2) e desenvolvendo, obtemos

$$2y_1 - 1 = 2x_1 - 1 \Rightarrow y_1 = x_1.$$

De modo análogo, obtemos $y_i = x_i$, para todo $i = 2, \ldots, n$. Portanto, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, isto é, $T = I$ é a aplicação identidade.

Suponhamos, agora, que $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$ e que $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seja um operador linear tal que

$$S(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, n,$$

onde

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. É claro que S é invertível e $S^{-1} \circ T$ é um movimento rígido em $\mathbb{R}^n$. Como

$$S^{-1} \circ T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ e } S^{-1} \circ T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i, i = 1, \ldots, n$$

temos que $S^{-1} \circ T = I$ e $T = S$. ■

Teorema 6.23 *Todo movimento rígido em $\mathbb{R}^n$ pode se escrito de modo único sob a forma*

$$T \circ S,$$

onde T é uma translação em $\mathbb{R}^n$ e S é um operador ortogonal em $\mathbb{R}^n$.

Prova. Sejam f um movimento rígido em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{t} = f(\mathbf{0})$ e $S = f - \mathbf{t}$. Então é fácil verificar que S é um movimento rígido em $\mathbb{R}^n$ e $S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Logo, pelo Lema 6.22, S é um operador linear em $\mathbb{R}^n$. Portanto,

$$f = T \circ S,$$

onde $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{t}$, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Agora, seja

$$f = T_1 \circ S_1$$

outra decomposição. Então

$$T \circ S = T_1 \circ S_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S \circ S_1^{-1} &= T^{-1} \circ (T \circ S) \circ S_1^{-1} \\ &= T^{-1} \circ (T_1 \circ S_1) \circ S_1^{-1} \\ &= T^{-1} \circ T_1. \end{aligned}$$

Assim, $T^{-1} \circ T_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{t}_1 - \mathbf{t} = \mathbf{0}$, isto é, $T = T_1$. Portanto, $S = S_1$. ■

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$. Uma função $q : V \to \mathbb{R}$ é uma *forma quadrática* sobre V se, para qualquer base

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de V, existir uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$q(\mathbf{v}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X},$$

onde $\mathbf{X} = [\mathbf{v}]_\beta$.

Seja $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Uma *quádrica* em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$S_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0\right\},$$

onde $a_{ij}, b_k, c \in \mathbb{R}$ e pelo menos um $a_{ij} \neq 0$. Em particular, S_2 é chamada de *cônica* e S_3 é chamada de *superfície quadrática.*

Sejam

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ e } \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Então

$$S_n = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c = 0\right\}.$$

Não há perda de generalidade em supor que $\mathbf{A}$ seja uma matriz simétrica, pois a quádrica S_n permanece inalterada quando substituímos $\mathbf{A}$ pela matriz

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t),$$

que é uma matriz simétrica.

Exemplo 6.24 *Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Então os conjuntos*

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 9x_2^2 - 36 = 0\right\} \\ H_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 - 1 = 0\right\} \\ P_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 - 1 = 0\right\} \end{aligned}$$

são quádricas em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.25 *Sejam $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e S_n uma quádrica em $\mathbb{R}^n$. Então existem um vetor $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ e uma base ortonormal*

$$\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$S_n = \left\{\mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} d_jz_j + e = 0\right\}.$$

Prova. Suponhamos que a equação da quádrica S_n é dada por

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t\mathbf{x} + c = 0. \tag{6.3}$$

Como $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica temos, pelo Corolário 6.18, que existe uma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal. Tomando, $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ e $\mathbf{d} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$, obtemos

$$[\mathbf{x}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{b}]_\beta = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

onde

$$\beta = \{\mathbf{P}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{P}\mathbf{e}_n\}$$

é uma nova base de $\mathbb{R}^n$. Então a equação (6.3) torna-se

$$\mathbf{y}^t\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{d}^t\mathbf{y} + c = 0,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i + c = 0.$$

Reenumerando, se necessário, podemos supor que $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, e $\lambda_j = 0$, $j = k+1, \ldots, n$. Assim, completanto os quadrados, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (y_i + \frac{d_i}{2\lambda_i})^2 + \sum_{j=k+1}^{n} d_j y_j + c - \sum_{i=1}^{k} (\frac{d_i}{2\lambda_i})^2 = 0.$$

Agora, aplicando a translação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$, onde

$$z_i = y_i + \frac{d_i}{2\lambda_i}, i = 1, \ldots, k, \text{ e } z_j = y_j, j = k+1, \ldots, n,$$

e fazendo

$$e = c - \sum_{i=1}^{k} (\frac{d_i}{2\lambda_i})^2,$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} d_j z_j + e = 0.$$

■

Observação 6.26 *Como o operador ortogonal e a translação são movimentos rígidos temos que a forma geométrica da quádrica não é alterada.*

Exemplo 6.27 *Seja* $\mathbb{R}^2$ *com o produto interno usual. Classifique a quádrica*

$$S_2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 - 1 = 0\right\}.$$

Solução. Note que a quádrica na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 1 = 0.$$

O polinômio característico da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

é

$$f_{\mathbf{A}} = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Logo, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ são os autovalores de $\mathbf{A}$. Sejam

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \text{ e } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$$

os autovetores (normalizados) associados aos autovalores λ_1 e λ_2. Se

$$(x_1, x_2) = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \end{cases}$$

a equação da quádrica torna-se

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - 1 = 0,$$

ou seja,

$$\frac{y_2^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = 1.$$

Assim, a quádrica é uma hipérbole com eixo imaginário o eixo y_1.

Exemplo 6.28 *Seja* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual. Classifique a quádrica cuja equação é*

$$6x_1^2 + 7x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_1 + 6x_2 - 18x_3 - 18 = 0.$$

Solução. Note que a quádrica na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - 18 = 0.$$

O polinômio característico da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

é

$$f_{\mathbf{A}} = x^3 - 18x^2 + 99x - 162.$$

Logo, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$ são os autovalores de $\mathbf{A}$. Sejam

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2) \text{ e } \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$$

os autovetores (normalizados) associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3. Se

$$(x_1, x_2, x_3) = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2 + 2y_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 2y_3) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-2y_1 + 2y_2 + y_3), \end{cases}$$

a equação da quádrica torna-se

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -12 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} - 18 = 0,$$

ou seja,

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2 + 6y_1 - 12y_2 - 18y_3 - 18 = 0.$$

Agora, completando os quadrados, obtemos

$$\frac{(y_1 + 1)^2}{12} + \frac{(y_2 - 1)^2}{6} + \frac{(y_3 - 1)^2}{2} = 1.$$

Finalmente, aplicando a translação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$, onde

$$z_1 = y_1 + 1, z_2 = y_2 - 1 \text{ e } z_3 = y_3 - 1,$$

obtemos

$$\frac{z_1^2}{12} + \frac{z_2^2}{6} + \frac{z_3^2}{2} = 1.$$

Assim, a quádrica é um elipsóide com semi-eixos $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$.

Exemplo 6.29 *Seja* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual. Classifique a quádrica cuja equação é*

$$-x_1^2 + x_2x_3 - x_2 + x_3 - 100 = 0.$$

Solução. Note que a quádrica na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - 100 = 0.$$

O polinômio característico da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é

$$f_{\mathbf{A}} = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Logo, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ são os autovalores de $\mathbf{A}$. Sejam

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \text{ e } \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

os autovetores (normalizados) associados aos autovalores λ_1 e λ_2. Se

$$(x_1, x_2, x_3) = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_3), \end{cases}$$

a equação da quádrica torna-se

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} - 100 = 0,$$

ou seja,

$$-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 - 100 = 0.$$

Agora, completando os quadrados, obtemos

$$-\frac{(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\frac{199}{2}} - \frac{y_2^2}{\frac{199}{2}} + \frac{y_3^2}{\frac{199}{2}} = 1.$$

Finalmente, aplicando a translação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$, onde

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, z_2 = y_2 \text{ e } z_3 = y_3,$$

obtemos

$$-\frac{z_1^2}{\frac{199}{2}} - \frac{z_2^2}{\frac{199}{2}} + \frac{z_3^2}{\frac{199}{2}} = 1.$$

Assim, a quádrica é um hiperbolóide de duas folhas.

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Determine todos os movimentos rígidos em $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Classifique as seguintes quádricas:

   (a) $12x^2 + 24xy + 9y^2 = 5$.

   (b) $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$.

   (c) $2x^2 + \sqrt{12}xy = 1$.

   (d) $23x^2 + 2y^2 - 72xy + 30x + 40y = 0$.

   (e) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x - 2y - 3 = 0$.

3. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Classifique as seguintes quádricas:

   (a) $12x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 16xy + 12yz = 2$.

   (b) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 8xy + 2xz + 2yz = 3$.

   (c) $y^2 - z^2 + 4xy - 6x + 4y + 2z + 8 = 0$.

   (d) $-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 2$.

   (e) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz + 2y - 4z + 2 = 0$.

4. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual:

   (a) Classifique a quádrica

   $$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz = 0.$$

   (b) Mostre que

   $$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 > 4xy - 4yz, \ \forall \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$$

5. Sejam $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. Mostre que

   $$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = 2a\}$$

   é uma elipse com semi-eixo maior a e semi-eixo menor

   $$\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2}.$$

6. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $\dim V = n$ e $q : V \to \mathbb{R}$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes:

    (a) q é uma forma quadrática.

    (b) Existem uma base
    $$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$
    de V e uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que
    $$q(\mathbf{v}) = \mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X},$$
    onde $\mathbf{X} = [\mathbf{v}]_\beta$.

    (c) Existe uma forma bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in V$.

    (d) Existe uma forma bilinear simétrica $B : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in V$.

    (e) A função $\widetilde{B}(\mathbf{v}) = q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})$, é uma forma bilinear sobre V e $q(a\mathbf{v}) = a^2q(\mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

Capítulo 7

Forma Canônica de Jordan

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Já vimos que a matriz $\mathbf{A} = [T]_\alpha^\alpha$ em relação a alguma base ordenada α de V era semelhante a uma matriz diagonal se, e somente se, V possui uma base formada de autovetores de T. Nosso objetivo neste capítulo é o seguinte: se T não pode ser diagonalizável, então determinar uma base de V em relação à qual a matriz de T tenha uma forma tão próximo quanto possível da matriz diagonal.

7.1 Teorema da Decomposição Primária

Um polinômio $f \in \mathbb{R}[x]$ é chamado *redutível* sobre $\mathbb{R}$ se existirem $g, h \in \mathbb{R}[x]$ com

$$1 \leq \partial(g), \partial(h) < \partial(f)$$

tais que

$$f = gh.$$

Caso contrário, dizemos que ele é *irredutível* sobre $\mathbb{R}$.

Sejam $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{R}[x]$. Dizemos que $f_1, \ldots, f_k$ são *relativamente primos* se o

$$\mathrm{mdc}(f_1, \ldots, f_k) = 1$$

ou, equivalentemente, existirem $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k = 1. \qquad \text{(Identidade de Bezout)}$$

Teorema 7.1 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $f \in \mathbb{R}[x]$ com decomposição*

$$f = p_1 \cdots p_k,$$

onde os $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x]$ são relativamente primos.

1. *Os subespaços $W_i = \ker p_i(T)$ de V são invariantes sob T e*

$$\ker f(T) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

2. *A projeção E_i associada a decomposição em* (1) *é um polinômio em T. Além disso, se $S : V \to V$ é um operador linear tal que $TS = ST$, então $E_iS = SE_i$.*

3. *Se $W \subseteq \ker f(T)$ é um subespaço invariante sob T, então*

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k).$$

Prova. (1) Seja

$$\widehat{f}_i = \frac{f}{p_i} = \prod_{j \neq i} p_j, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Então é fácil verificar que os $\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_k$ são relativamente primos e que f divide $\widehat{f}_i\widehat{f}_j$ se $i \neq j$. Vamos provar primeiro que a soma é direta. Suponhamos que

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{u}_i \in W_i$. Então

$$\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}$$

se $i \neq j$, pois $\widehat{f}_i(T)$ contém o fator $p_j(T)$. Como $\widehat{f}_i$ e p_i são relativamente primos temos que existem $g_i, h_i \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g_i\widehat{f}_i + h_ip_i = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= I(\mathbf{u}_i) = \Big(g_i(T)\widehat{f}_i(T) + h_i(T)p_i(T)\Big)(\mathbf{u}_i) = g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}_i) \\ &= g_i(T)\widehat{f}_i(T)\left(-\sum_{j \neq i} \mathbf{u}_j\right) = -\sum_{j \neq i}\Big(g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}_j)\Big) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_k$ são relativamente primos temos que existem $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g_1\widehat{f}_1 + \cdots + g_k\widehat{f}_k = 1.$$

Assim, se $\mathbf{u} \in \ker f(T)$, então $\mathbf{u}_i = g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}) \in W_i$, pois

$$p_i(T)(\mathbf{u}_i) = p_i(T)g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}) = g_i(T)f(T)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\mathbf{u} = I(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}) \in \sum_{i=1}^{k} W_i,$$

isto é,

$$\ker f(T) \subseteq W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Como a outra inclusão é trivial temos que

$$\ker f(T) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

(2) A prova de (1) mostra que $E_i = g_i(T)\widehat{f}_i(T)$ e $W_i = \operatorname{Im} E_i$, $i = 1, \ldots, k$.

(3) Seja $\mathbf{u} \in W$. Então, por (1), temos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k,$$

onde $\mathbf{u}_i \in W_i$. Logo,

$$\mathbf{u}_i = E_i(\mathbf{u}) = g_i(T)\widehat{f}_i(T)(\mathbf{u}) \in W,$$

pois W sendo invariante sob T, W é invariante sob o polinômio $g_i(T)\widehat{f}_i(T)$. Portanto,

$$W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k).$$

■

Teorema 7.2 (Teorema da Decomposição Primária) *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e*

$$m_T = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k},$$

o polinômio minimal de T, onde os $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x]$ são distintos, irredutíveis e mônicos.

1. *Os subespaços $W_i = \ker p_i^{r_i}(T)$ de V são invariantes sob T e*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

2. *Se $T_i = T|_{W_i} : W_i \to W_i$ é a restrição de T a W_i, então o polinômio minimal de T_i é igual a $p_i^{r_i}$. Além disso,*

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k.$$

3. *Se $\mathbf{A}_i$ é a representação matricial de T_i em relação a alguma base de W_i, então T é representado pela matriz diagonal em bloco*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}_k.$$

Prova. (1) Como $m_T(T) = 0$ temos que $\ker m_T(T) = V$. Assim, pelo item (1) do Teorema 7.1, temos que W_i é invariante sob T e

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

(2) Seja m_i o polinômio minimal de T_i. Então m_i divide $p_i^{r_i}$, pois $p_i^{r_i}(T)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{u} \in W_i$. Por outro lado, como $m_i(T_i) = 0$ temos que

$$\left(m_i\widehat{f}_i\right)(T) = m_i(T)\widehat{f}_i(T) = 0.$$

Assim, m divide $m_i\widehat{f}_i$, isto é, $p_i^{r_i}\widehat{f}_i$ divide $m_i\widehat{f}_i$. Logo, $p_i^{r_i}$ divide m_i. Portanto, $m_i = p_i^{r_i}$, pois ambos são mônicos. ■

Lema 7.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $S, T : V \to V$ operadores lineares diagonalizáveis tais que $ST = TS$. Então S e T são simultaneamente diagonalizáveis, ou seja, existe uma base β de V tal que $[S]_\beta^\beta$ e $[T]_\beta^\beta$ são diagonais.*

Prova. Como S e T são diagonalizáveis temos, pelo Teorema 4.17, que

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \text{ e } V = V_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_m}.$$

Fixando $\mu_j \in \mathbb{R}$, escolhendo $\mathbf{u} \in V_{\mu_j} \subseteq V$ e fazendo

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i,$$

onde $\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k} S(\mathbf{v}_i) = S(\mathbf{u}) = \mu_j \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} (\mu_j \mathbf{v}_i).$$

Como V_{λ_i} é invariante sob S e a soma é direta temos que

$$S(\mathbf{v}_i) = \mu_j \mathbf{v}_i, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Logo,

$$V_{\mu_j} = \left(V_{\mu_j} \cap V_{\lambda_1}\right) \oplus \cdots \oplus \left(V_{\mu_j} \cap V_{\lambda_k}\right)$$

Portanto,

$$V = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \left(V_{\mu_j} \cap V_{\lambda_i}\right),$$

isto é, escolhendo uma base para cada $V_{\mu_j} \cap V_{\lambda_i}$, obtemos uma base de V formada de autovetores de ambos S e T. ■

Exemplo 7.4 *Sejam $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares cujas representações matriciais em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ são*

$$\mathbf{A} = [S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = [T] = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

repectivamente. Determine uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ e $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ sejam ambas diagonalizáveis.

Solução. É fácil verificar que S e T são diagonalizáveis e $ST = TS$, onde

$$V_1 = [(1, 0)], \ \ V_2 = [(2, 1)] \text{ e } V_{-1} = [(2, 1)], \ \ V_3 = [(1, 0)].$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^2 = (V_1 \cap V_3) \oplus (V_2 \cap V_{-1}) = [(1, 0)] \oplus [(2, 1)].$$

Assim, fazendo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador nilpotente* se existir $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^r = 0.$$

O menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = 0$ é chamado de *índice de nilpotência* de T.

Lema 7.5 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $S, T : V \to V$ operadores lineares tais que $ST = TS$.*

1. *Se S e T são diagonalizáveis, então $S + T$ também o é.*

2. *Se S e T são nilpotentes, então $S + T$ também o é.*

Prova. (1) Segue do Lema 7.3. Para provar (2), suponhamos que $S^m = 0$ e $T^n = 0$. Então, escolhendo $k = m + n - 1$, obtemos pelo binômio de Newton

$$\begin{aligned}(S+T)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^{k-j}T^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{k}{j} S^{k-j}T^j + \sum_{j=n+1}^{k} \binom{k}{j} S^{k-j}T^j \\ &= 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

pois $k - j = m + (n - 1 - j) \geq m$. Portanto, $S + T$ é nilpotente. ■

Teorema 7.6 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e*

$$m_T = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k},$$

o polinômio minimal de T, onde os $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ são distintos aos pares. Então:

1. *Existe um operador diagonalizável D e um operador nilpotente N tais que*

   a. $T = D + N$.

   b. $DN = ND$.

Além disso, os operadores D e N são determinados de modo único por (a) e (b) e são polinômios em T.

2. Para cada $i = 1, \ldots, k$, $V^{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i}$.

Prova. (1) Pelo item (2) do Teorema 7.1, temos que

$$\operatorname{Im} E_i = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i}, \;\; i = 1, \ldots, k.$$

Fazendo

$$D = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$$

temos, pelo Teorema 4.31, que D é um operador diagonalizável. Seja $N = T - D$. Então N é um operador nilpotente, pois

$$N = T - D = \sum_{i=1}^{k} (T - \lambda_i I) E_i$$

implica que

$$N^r = \sum_{i=1}^{k} (T - \lambda_i I)^r E_i, \;\; \forall \; r \in \mathbb{N}.$$

Logo, tomando

$$r \geq \max\{r_1, \ldots, r_r\},$$

temos que $N^r = 0$. Portanto, $T = D + N$ e $DN = ND$. Finalmente, suponhamos que $T = D' + N'$, com D' diagonalizável, N' nilpotente e $D'N' = N'D'$. Então

$$TD' = D'T \;\text{ e }\; TN' = N'T.$$

Assim,

$$f(T)D' = D'f(T) \;\text{ e }\; f(T)N' = N'f(T), \;\; \forall \; f \in \mathbb{R}[x].$$

Em particular,

$$DD' = D'D, \;\; ND' = D'N, \;\; DN' = N'D \;\text{ e }\; NN' = N'N.$$

Pelo Lema 7.5, temos que $D - D'$ é diagonalizável e $N' - N$ é nilpotente. Como $D - D' = N' - N$ temos que $D - D'$ é nilpotente. Logo, o polinômio minimal de $D - D'$ é da forma $m = x^k$, onde $k \leq \dim V$, mas sendo $D - D'$ diagonalizável devemos ter $k = 1$, isto é, $m = x$. Portanto, $D - D' = 0$, ou seja, $D = D'$ e $N = N'$.

(2) É claro que $\ker(T - \lambda_i I)^{r_i} \subseteq V^{\lambda_i}$. Suponhamos, por absurdo, que existe $\mathbf{u} \in V^{\lambda_i}$ tal que

$$\mathbf{v} = (T - \lambda_i I)^{r_i}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}.$$

Então existe $s \in \mathbb{N}$ com $s > r_i$ tal que

$$(T - \lambda_i I)^s(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Escrevendo $m = q(x - \lambda_i)^{r_i}$, temos que

$$\operatorname{mdc}(q, (x - \lambda_i)^{s - r_i}) = 1.$$

Assim, existem $g, h \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$gq + h(x - \lambda_i)^{s-r_i} = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= I(\mathbf{v}) = [g(T)q(T) + h(T)(T - \lambda_i I)^{s-r_i}](\mathbf{v}) \\
&= g(T)q(T)(\mathbf{v}) + h(T)(T - \lambda_i I)^{s-r_i}(\mathbf{v}) \\
&= g(T)m(T)(\mathbf{u}) + h(T)(T - \lambda_i I)^{s}(\mathbf{u}) \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, $V^{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$. ■

Exemplo 7.7 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que existe um operador diagonalizável D sobre $\mathbb{R}^3$ e um operador nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tais que $T = D + N$ e $DN = ND$. Determine as matrizes de D e N em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Solução. É fácil verificar que o polinômio característico e minimal de T é

$$f_T = m_T = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2.$$

Sejam $p_1 = x - 1, p_2 = x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ e $W_1 = \ker p_1(T)$, $W_2 = \ker p_2(T)^2$. Então é fácil verificar que p_1 e p_2 são distintos, irredutíveis e mônicos. Sejam

$$\widehat{f_1} = \frac{m_T}{p_1} = x^2 - 4x + 4 \text{ e } \widehat{f_2} = \frac{m_T}{p_2^2} = x - 1.$$

Então $\widehat{f_1}$ e $\widehat{f_2}$ são relativamente primos. Assim, existem $g_1 = 1, g_2 = -x + 3 \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g_1\widehat{f_1} + g_2\widehat{f_2} = 1.$$

Sejam

$$E_1 = g_1(T)\widehat{f_1}(T) = T^2 - 4T + 4I \text{ e } E_2 = g_2(T)\widehat{f_2}(T) = -T^2 + 4T - 3I.$$

Então $W_1 = \operatorname{Im} E_1$ e $W_2 = \operatorname{Im} E_2$. Portanto, existem

$$D = E_1 + 2E_2 = -T^2 + 4T - 2I \text{ e } N = T - D = T^2 - 3T + 2I$$

tais que $T = D + N$ e $DN = ND$. Finalmente,

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } [N] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\alpha_1 = \{(1,0,2)\} \text{ e } \alpha_2 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$$

são bases de W_1 e W_2, respectivamente. Logo,

$$V = W_1 \oplus W_2 \text{ e } \mathbf{A} = [T] = [T_1]_{\alpha_1}^{\alpha_1} \oplus [T_2]_{\alpha_2}^{\alpha_2} = \begin{bmatrix} [T_1]_{\alpha_1}^{\alpha_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [T_2]_{\alpha_2}^{\alpha_2} \end{bmatrix},$$

onde

$$T_1 = T|_{W_1},\ T_2 = T|_{W_2},\ [T_1]_{\alpha_1}^{\alpha_1} = [1] \text{ e } [T_2]_{\alpha_2}^{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Sejam $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares cujas representações matriciais em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ são

$$\mathbf{A} = [S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix},$$

repectivamente. Determine uma matriz invertível $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ e $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{BP}$ sejam ambas diagonalizáveis.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Escreva o polinômio minimal de T sob a forma $m_T = p_1 p_2$, onde p_1 e p_2 são distintos, irredutíveis e mônicos sobre $\mathbb{R}$. Sejam $W_1 = \ker p_1(T)$ e $W_2 = \ker p_2(T)$. Determine bases α_1 e α_2 para W_1 e W_2, respectivamente. Se $T_i = T|_{W_i}$, determine a matriz de T_i em relação à base α_i.

3. Sejam $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e D a parte diagonal de T. Mostre que a parte diagonal de $g(T)$ é $D(T)$, para todo $g \in \mathbb{C}[x]$.

4. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ tal que posto$(T) = 1$. Mostre que T é diagonalizável ou nilpotente, não ambos.

5. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que se T comuta com todo operador linear diagonalizável sobre V, então $T = aI$, para algum $a \in \mathbb{R}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ um operador linear definido por $T(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} - \mathbf{AB}$, onde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é fixada. Mostre que se $\mathbf{B}$ é nilpotente, então T é um operador nilpotente. (Sugestão: Use o binômio de Newton.)

7. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de T é um produto de fatores lineares distintos.

8. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ e $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$. Determine se a matriz $\mathbf{A}$ é ou não diagonalizável.

7.2 Operadores Nilpotentes

Nesta seção faremos um estudo mais detalhado de operadores nilpotentes.

Lema 7.8 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e $\mathbf{u} \in V$ tal que*

$$T^k(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \;\text{ e }\; T^{k-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}.$$

1. *O conjunto $\alpha = \{\mathbf{u}, T(\mathbf{u}), \ldots, T^{k-1}(\mathbf{u})\}$ é LI.*

2. *$W = [\alpha]$ é invariante sob T.*

3. *$\widetilde{T} = T|_W$ é nilpotente de índice k.*

4. *Se ordenarmos α por $\mathbf{u}_1 = T^{k-1}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}_2 = T^{k-2}(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{u}_{k-1} = T(\mathbf{u})$ e $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}$, então $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base de W com $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$, $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_{i-1}$, $i = 1, \ldots, k$, e*

$$[\widetilde{T}]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz, onde os elementos da superdiagonal são todos iguais a 1 e o restante zeros.

Prova. Vamos provar apenas o item (1). É fácil verificar, indutivamente, que

$$T^{k+m}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \;\; \forall\; m \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos que
$$c_1\mathbf{u}+c_2T(\mathbf{u})+\cdots+c_kT^{k-1}(\mathbf{u})=\mathbf{0}. \tag{7.1}$$
Assim, aplicando T^{k-1} à equação vetorial (7.1), obtemos
$$c_1T^{k-1}(\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$
Logo, $c_1=0$, pois $T^{k-1}(\mathbf{u})\neq\mathbf{0}$. Aplicando T^{k-2} à equação vetorial (7.1), obtemos
$$c_2T^{k-1}(\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$
Logo, $c_2=0$, pois $T^{k-1}(\mathbf{u})\neq\mathbf{0}$. Continuando deste modo, obtemos
$$c_1=c_2=\cdots=c_k=0.$$
Portanto, α é LI. ■

Lema 7.9 *Sejam $T:V\to V$ um operador linear e $W_i=\ker T^i$ com $i\in\mathbb{Z}_+$. Então*:

1. $W_i\subseteq W_{i+1}$.
2. $T(W_{i+1})\subseteq W_i$.
3. *Se $\alpha_i=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k\}$, $\alpha_{i+1}=\{\alpha_i,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_l\}$ e $\alpha_{i+2}=\{\alpha_{i+1},\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ são bases ordenadas de W_i, W_{i+1} e W_{i+2} respectivamente, então o conjunto*
$$\alpha=\{\alpha_i,T(\mathbf{w}_1),\ldots,T(\mathbf{w}_m)\}\subseteq W_{i+1}$$
é LI.

Prova. Vamos provar apenas o item (3). Suponhamos, por absurdo, que α seja LD. Então existem escalares $a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$, não todos nulos, tais que
$$a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_k\mathbf{u}_k+b_1T(\mathbf{w}_1)+\cdots+b_mT(\mathbf{w}_m)=\mathbf{0}.$$
Logo,
$$b_1T(\mathbf{w}_1)+\cdots+b_mT(\mathbf{w}_m)=-(a_1\mathbf{u}_1+\cdots+a_k\mathbf{u}_k)\in W_i,$$
isto é,
$$T^i(b_1T(\mathbf{w}_1)+\cdots+b_mT(\mathbf{w}_m))=\mathbf{0}.$$
Assim,
$$T^{i+1}(b_1\mathbf{w}_1+\cdots+b_m\mathbf{w}_m)=\mathbf{0},$$
ou seja,
$$b_1\mathbf{w}_1+\cdots+b_m\mathbf{w}_m\in W_{i+1}.$$
Como α_{i+1} gera W_{i+1} temos que existem $c_1,\ldots,c_k,d_1,\ldots,d_m\in\mathbb{R}$ tais que
$$c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_k\mathbf{u}_k+d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_l\mathbf{v}_l+(-b_1)\mathbf{w}_1+\cdots+(-b_m)\mathbf{w}_m=\mathbf{0},$$
o que é uma contradição, pois α_{i+2} é LI. ■

Lema 7.10 *Sejam* $T : V \to V$ *um operador linear com* $\dim V = n$ *e* $T^k = 0$ *mas* $T^{k-1} \neq 0$. *Então* T *admite uma representação matricial em bloco* $\mathbf{J}$ *cujos elementos diagonais têm a forma*

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso:

1. *Existe pelo menos um bloco* $\mathbf{N}$ *de ordem* k *e todos os outros são de ordem menor do que ou igual* k.
2. *O número de blocos* $\mathbf{N}$ *de cada ordem possível é determinado de modo único por* T.
3. *O número total de blocos* $\mathbf{N}$ *de todas as ordens é igual a* $\operatorname{nul}(T) = \dim \ker T$.

Prova. Sejam $W_i = \ker T^i$ e $n_i = \dim W_i$, $i = 1, \ldots, k$. Então $V = W_k$, $W_k \subset V$ e $n_{k-1} < n_k = n$, pois

$$T^k = 0 \text{ e } T^{k-1} \neq 0.$$

Assim, pelo item (1) do Lema 7.9, temos que

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{k-1} \subset W_k = V.$$

Logo, por indução, podemos obter uma base

$$\alpha = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

para V tal que

$$\alpha_i = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n_i}\}$$

seja uma base para W_i, $i = 1, \ldots, k$.

Vamos escolher agora uma nova base de V em relação à qual T tenha a forma desejada. Fazendo

$$\mathbf{v}_{(i,k)} = \mathbf{u}_{n_{k-1}+i} \text{ e } \mathbf{v}_{(i,k-1)} = T(\mathbf{v}_{(i,k)}), \; i = 1, \ldots, n_k - n_{k-1},$$

temos, pelo item (3) do Lema 7.9, que

$$\beta_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n_{k-2}}, \mathbf{v}_{(1,k-1)}, \ldots, \mathbf{v}_{(n_k-n_{k-1},k-1)}\}$$

é *LI* em W_{k-1}. Assim, estendendo β_1, se necessário, a uma base de W_{k-1} acrescentando elementos

$$\mathbf{v}_{(n_k-n_{k-1}+j,k-1)}, \; j = 1, \ldots, 2n_{k-1} - n_k - n_{k-2}.$$

Agora, fazendo

$$\mathbf{v}_{(i,k-2)} = T(\mathbf{v}_{(i,k-1)}), \; i = 1, \ldots, n_{k-1} - n_{k-2},$$

temos, pelo item (3) do Lema 7.9, que

$$\beta_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n_{k-3}}, \mathbf{v}_{(1,k-2)}, \ldots, \mathbf{v}_{(n_{k-1}-n_{k-2},k-2)}\}$$

é LI em W_{k-1}, que pode ser estendendido a uma base de W_{k-2} acrescentando elementos

$$\mathbf{v}_{(n_{k-1}-n_{k-2}+j,k-1)}, \;\; j = 1, \ldots, 2n_{k-2} - n_{k-1} - n_{k-3}.$$

Proceguindo assim, obtemos uma nova base de V (confira Tabela 7.1)

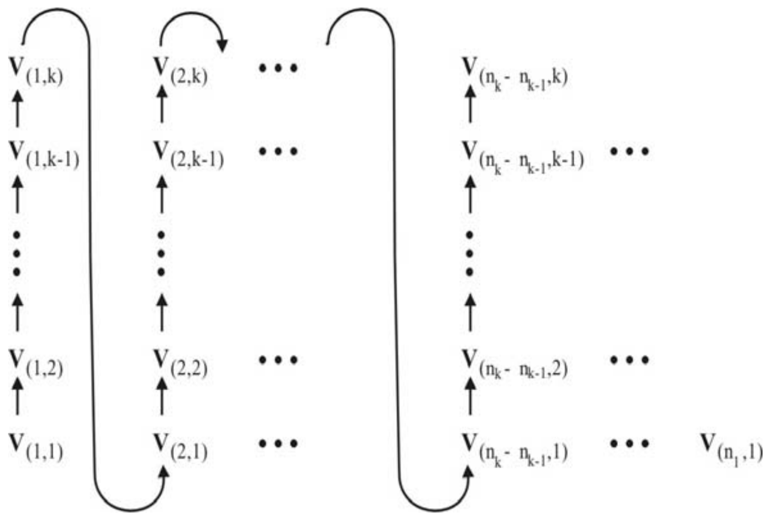


Figura 7.1: Base desejada para V.

Note que a última linha da Tabela 7.1 forma a base de W_1, as duas últimas linhas da Tabela 7.1 formam a base de W_2 e, assim por diante. Pela construção, temos que

$$T(\mathbf{v}_{(i,j)}) = \begin{cases} \mathbf{v}_{(i,j-1)} & \text{se } j > 1, \\ \mathbf{0} & \text{se } j = 1. \end{cases} \tag{7.2}$$

Assim, pelo item (4) do Lema 7.8, T terá a forma desejada se os $\mathbf{v}_{(i,j)}$ são ordenados de maneira lexicográfica (confira Tabela 7.1).

Finalmente, pela equação (7.2), obtemos

$$T^m(\mathbf{v}_{(i,j)}) = \mathbf{v}_{(i,j-m)}, \;\; \forall \; m \text{ com } 1 \leq m < j.$$

Além disso, (1) haverá exatamente

$n_k - n_{k-1}$	elementos diagonais de ordem k
$n_{k-1} - n_{k-2} - (n_k - n_{k-1}) = 2n_{k-1} - n_k - n_{k-2}$	elementos diagonais de ordem $k-1$
$\vdots$	$\vdots$
$2n_2 - n_3 - n_1$	elementos diagonais de ordem 2
$2n_1 - n_2$	elementos diagonais de ordem 1.

(2) Como os números $n_1, \ldots, n_k$ são determinados de modo único por T temos que o número de elementos diagonais de cada ordem é determinado de modo único por T.

(3) Como

$$n_1 = (n_k - n_{k-1}) + (2n_{k-1} - n_k - n_{k-2}) + \cdots + (2n_2 - n_3 - n_1) + (2n_1 - n_2)$$

temos que o número total de blocos diagonais é igual a

$$n_1 = \dim W_1 = \dim \ker T.$$

■

Teorema 7.11 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. *T é nilpotente*;
2. *Existe uma base de V em relação à qual T admite uma representação matricial em blocos $\mathbf{J}$ cujos elementos diagonais têm a forma*

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};$$

3. *Existe uma base de V em relação à qual T é representado por uma matriz triangular superior com zeros na diagonal*;
4. *$T^n = 0$.*

Prova. A implicação (1. ⇒ 2.) segue do Lema 7.10. Agora é fácil verificar as implicações (2. ⇒ 3. ⇒ 4. ⇒ 1.). ■

Exemplo 7.12 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se T é nilpotente. Caso afirmativo:

1. *Determine a matriz nilpotente $\mathbf{J}$ em forma canônica que seja semelhante a $\mathbf{A}$.*

2. *Determine uma base β de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J}$, onde $\mathbf{P}$ é a matriz cujas colunas são os vetores de β, isto é, $\mathbf{P}$ é a matriz de mudança de base da base β para base canônica de $\mathbb{R}^4$.*

Solução. (1) É fácil verificar que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Logo, T é nilpotente de índice 2.

(a) Como o índice de nilpotência de T é igual a 2 temos que $\mathbf{J}$ contém pelo menos um bloco de ordem 2 e todos os outros de ordem menor do que ou igual 2.

(b) Como o posto$(T) = 1$ temos que

$$n_1 = \dim W_1 = 4 - 1 = 3,$$

isto é, o número total de blocos diagonais de $\mathbf{J}$ é igual a 3.

(c) Como $k = 2$, $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$ temos que

$$n_2 - n_1 = 1 \text{ e } 2n_1 - n_2 = 2,$$

isto é, $\mathbf{J}$ tem um bloco diagonal de ordem 2 e dois de ordem 1. Portanto,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Pela forma de $\mathbf{J}$ basta escolher $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \text{ e } T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}, \ \ i = 1, 3, 4.$$

Como

$$\operatorname{Im} T = [(1, 0, 1, 1)] \text{ e } \mathbf{u}_1 \in \operatorname{Im} T$$

temos que $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$. Desde que $T^2 = 0$ temos que $\mathbf{u}_1 \in W_1 = \ker T$. Assim, podemos escolher $\mathbf{u}_2$ como qualquer solução da equação vetorial

$$T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1,$$

isto é, se $\mathbf{u}_2 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, então escolher uma solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -x + y + t = 1 \\ -x + y + t = 1 \\ -x + y + t = 1 \end{cases},$$

digamos $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$. Finalmente, estendendo $\mathbf{u}_1$ para uma base de W_1, escolhendo $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 0, 0)$. Portanto, se

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J}.$$

EXERCÍCIOS

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a matriz nilpotente $\mathbf{J}$ em forma canônica que seja semelhante a $\mathbf{A}$. Além disso, determine uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a matriz nilpotente $\mathbf{J}$ em forma canônica que seja semelhante a $\mathbf{A}$. Além disso, determine uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a matriz nilpotente $\mathbf{J}$ em forma canônica que seja semelhante a $\mathbf{A}$. Além disso, determine uma matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$.

4. Seja
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $\mathbf{AN} = \mathbf{NA}$ se, somente se, $\mathbf{A}$ é da forma
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que se $b \neq 0$, então $\dim V_\lambda = 1$, para todo autovalor λ de $\mathbf{A}$.

(c) Mostre que se $b = 0$ e $c \neq 0$, então $\dim V_\lambda = 2$, para todo autovalor λ de $\mathbf{A}$.

(d) Mostre que se $b = c = 0$ e $d \neq 0$, então $\dim V_\lambda = 3$, para todo autovalor λ de $\mathbf{A}$.

(e) Generalize para qualquer matriz quadrada $\mathbf{N}$.

5. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^k = 0$ mas $T^{k-1} \neq 0$. Mostre que todo operador linear semelhante a T é nilpotente de índice k.

6. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ tal que $T^k = 0$ mas $T^{k-1} \neq 0$. Mostre que
$$\operatorname{Im} T^{k-i} \subseteq \ker T^i, \ \ i = 1, \ldots, k-1.$$

7. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ tal que $T^k = 0$ mas $T^{k-1} \neq 0$. Mostre que $T + I$ é invertível.

8. Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Mostre que T é nilpotente se, e somente se, todos os autovalores de T são nulos. Mostre, com um exemplo, que uma das implicações da afirmação é falsa se V é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$.

7.3 Forma Canônica de Jordan

Nesta seção provaremos que todo operador linear $T : V \to V$ com $\dim V = n$ pode ser decomposto como soma de um operador diagonalizável com um operador nilpotente.

Lema 7.13 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$,*
$$f_T = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k} \ \text{ e } \ m_T = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k},$$
os polinômios característico e minimal de T, onde os $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) são distintos aos pares e $1 \leq r_i \leq d_i$. Então T admite uma representação matricial em bloco $\mathbf{J}$ cujos elementos diagonais têm a forma
$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$
Além disso, para cada λ_i, $i = 1, \ldots, k$, os blocos $\mathbf{J}_{ij}$ têm as seguintes propriedades:

1. *Existe pelo menos um bloco $\mathbf{J}_{ij}$ de ordem r_i e todos os outros são de ordem menor do que ou igual r_i.*

2. *A soma dos blocos* $\mathbf{J}_{ij}$ *é igual a* $d_i = m_a(\lambda_i)$.

3. *O número dos blocos* $\mathbf{J}_{ij}$ *é igual a* $m_a(\lambda_i)$.

4. *O número dos blocos* $\mathbf{J}_{ij}$ *de cada ordem possível é determinado de modo único por* T.

Prova. Como o polinômio minimal de T tem a forma

$$m_T = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k},$$

onde os λ_i, $i = 1, \ldots, k$, são distintos, temos pelo Teorema da Decomposição Primária que

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k \text{ e } V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

onde $W_i = \ker(T - \lambda_i I)^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Sendo $m_i = (x - \lambda_i)^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$, o polinômio minimal de T_i temos que

$$(T_i - \lambda_i I)^{r_i} = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Fazendo $N_i = T_i - \lambda_i I$, temos que

$$T_i = \lambda_i I + N_i \text{ e } N_i^{r_i} = 0, \ \ i = 1, \ldots, k,$$

isto é, T_i é a soma de um operador diagonalizável $\lambda_i I$ e de um operador nilpotente N_i de índice r_i. Assim, pelo Lema 7.10, podemos escolher uma base para W_i em relação à qual N_i esteja na forma canônica. Nesta base, $T_i = \lambda_i I + N_i$ é representado por uma matriz diagonal de bloco $\mathbf{J}_i$ cujos elementos diagonais são as matrizes $\mathbf{J}_{ij}$. Portanto,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{J}_k$$

está na forma canônica e é a representação matricial T.

Além disso, (1) Como $N_i^{r_i} = 0$, $i = 1, \ldots, k$, temos que existe, pelo menos, um $\mathbf{J}_{ij}$ de ordem r_i e todos os outros de ordem menor ou igual r_i.

(2) Como T e $\mathbf{J}$ possuem o mesmo polinômio característico f_T temos que a soma das ordens dos $\mathbf{J}_{ij}$ é igual a $d_i = m_a(\lambda_i)$.

(3) Como $N_i = T_i - \lambda_i I$ e a multiplicidade geométrica de λ_i é igual a dimensão do $\ker(T_i - \lambda_i I)^{r_i}$, que é a nulidade de N_i, temos que o número dos $\mathbf{J}_{ij}$ é igual a $m_g(\lambda_i)$.

(4) Segue do item (2). do Lema 7.10. ■

A matriz $\mathbf{J}$ é chamada de *forma canônica de Jordan* de T. Um bloco diagonal $\mathbf{J}_{ij}$ é chamado um *bloco elementar de Jordan* associado ao autovalor λ_i. Note que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ (sobre um corpo algebricamente fechado), então todo operador linear $T : V \to V$ admite uma representação matricial na forma canônica de Jordan.

Teorema 7.14 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear com* $\dim V = n$. *Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. *O polinômio característico de T fatora-se na forma*

$$f_T = (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_k)^{d_k};$$

2. *Existe uma base de V em relação à qual T admite uma representação matricial na forma canônica de Jordan;*

3. *T é triangularizável, isto é, existe uma base de V em relação à qual T é representado por uma matriz triangular superior da forma*

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix};$$

4. *Existem subespaços $W_0, W_1, \ldots, W_k$ de V invariantes sob T tais que*

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{k-1} \subset W_k = V;$$

5. *O corpo $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) contém n autovalores de T (contando as multiplicidades);*

6. $$V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}.$$

Prova. A implicação (1. $\Rightarrow$ 2.) segue do Lema 7.13. Agora é fácil verificar as implicações (2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 6. $\Rightarrow$ 1.). Assim, resta provar que (1. $\Rightarrow$ 6.). Pelo item (2) do Teorema 7.6, temos que

$$V = \ker(T - \lambda_1 I)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_k I)^{r_k} = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}.$$

■

Exemplo 7.15 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a forma canônica de Jordan de T.

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o polinômio característico de T:

$$f_T = \det(x\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}) = (x - 1)^4.$$

2.^{o} **Passo**. Determinar o polinômio minimal de T:

$$m_T = (x-1)^2.$$

3.^{o} **Passo**. Pelo Teorema da Decomposição Primária, temos que

$$T = T_1 \text{ e } V = \ker(T-I)^2.$$

Finalmente, fazendo

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ e pelo Exemplo 7.12

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{I},$$

isto é,

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.16 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a forma canônica Jordan de T.

Solução. Note que o polinômio característico de T é

$$\begin{aligned} f_T &= \det(x\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & 3 \\ 0 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & x^3-3x^2+3x-1 \\ -1 & 0 & x^2-3x+3 \\ 0 & -1 & x-3 \end{pmatrix} \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3. \end{aligned}$$

Assim, se λ é um autovalor de T, então, pelo Teorema 4.2, o posto$(T-\lambda I) \leq 2$. Por outro lado, as operações de linhas acima mostra que posto$(T-\lambda I) \geq 2$. Logo, posto$(T-\lambda I) = 2$. Portanto,

$$\dim V_\lambda = \dim\ker(T-\lambda I) = 3 - 2 = 1$$

e a forma canônica de Jordan de T é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este procedimento se aplica a qualquer matriz companheira.

Exemplo 7.17 *Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico*

$$f_T = (x-3)^2(x-1)^3(x+5).$$

Determine as possíveis formas canônicas de Jordan de T e a $\dim V$.

Solução. É claro, da definição de f_T, que $\dim V = 6$ e que os candidatos a polinômio minimal de T são:

$$\begin{aligned} m_T &= (x-3)(x-1)(x+5) \\ m_T &= (x-3)^2(x-1)(x+5) \\ m_T &= (x-3)(x-1)^2(x+5) \\ m_T &= (x-3)(x-1)^3(x+5) \\ m_T &= (x-3)^2(x-1)^2(x+5) \\ m_T &= f_T. \end{aligned}$$

Portanto, as possíveis formas canônicas de Jordan de T são:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.18 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz $n \times n$. Mostre que se*

$$f_{\mathbf{A}} = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_k)^{d_k}$$

é o polinômio característico de $\mathbf{A}$*, então* $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Solução. Seja $\mathbf{J}$ a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$. Então

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}_1 \cdots \mathbf{J}_n,$$

onde $\mathbf{J}_i = \mathbf{J} - \lambda_i \mathbf{I}$, $i = 1, \ldots, n$. Como a n-ésima linha de $\mathbf{J}_n$ é uma linha de zeros temos que: as duas últimas linhas de $\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{J}_n$ são de zeros, as três últimas linhas de $\mathbf{J}_{n-2}\mathbf{J}_{n-1}\mathbf{J}_n$ são de zeros, e assim por diante. Portanto,

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{J}) = \mathbf{0}.$$

Como $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ e $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{J})$ são semelhantes temos que

$$f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

Exemplo 7.19 *Sejam* $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *nilpotentes. Mostre que* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *são semelhantes se, e somente se,* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *tem o mesmo polinômio minimal.*

Solução. Sejam f, g e m, n os polinômios característicos e minimais de $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$, respectivamente. Então

$$m = n \ \text{ e } \ f = g.$$

Como m e f têm as mesma raízes temos que a forma canônica de Jordan de $\mathbf{M}$ ($\mathbf{N}$) é uma das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, em qualquer caso, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ são semelhantes.

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja representação matricial em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é
$$\mathbf{A} = [T] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Determine a forma canônica de Jordan de T.

2. Determine se as matrizes
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}$$
são ou não semelhantes, onde $a \in \mathbb{R}$.

3. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ com polinômio característico e minimal

$$f = (x-2)^3(x+7)^2 \text{ e } m = (x-2)^3(x+7),$$

respectivamente. Determine a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

4. Seja $T : V \to V$ um operador linear com polinômio característico

$$f_T = (x+2)^4(x-1)^2.$$

Determine as possíveis formas canônicas de Jordan de T e a $\dim V$.

5. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de T, então

$$\det T = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

6. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que T é não-singular se, e somente se, todos os seus autovalores são não-nulos.

7. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ têm o mesmo polinômio característico

$$f = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_k)^{d_k},$$

o mesmo polinômio minimal e $d_i \leq 3$, $i = 1, \ldots, k$, então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são semelhantes.

8. Seja $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Mostre que se $\operatorname{tr}(T^i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, então T é nilpotente. (Sugestão: Seja f_T o polinômio característico de T. Então $\operatorname{tr}(f_T(T)) = b_n n$, onde b_n é o termo constante de f_T. Como $f_T(T) = 0$ temos que $b_n = 0$. Logo, 0 é um autovetor de T. Agora, elimine o bloco elementar de Jordan associado a 0 e use indução no restante.)

9. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mostre que se

$$\lambda_1^i + \cdots + \lambda_n^i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

então $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

10. Sejam $T : V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$ e

$$f_T = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

o polinômio característico de T. Mostre que

$$b_1 = -\operatorname{tr}(\mathbf{A}), b_2 = -\frac{1}{2}\left(b_1 \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)\right), \ldots, b_n = -\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{n-k} \operatorname{tr}(\mathbf{A}^k)\right), b_0 = 1.$$

Bibliografia

[1] **ANDRADE**, L. N. de, *Introdução à Computação Algébrica com o Maple*, SBM, 2004.

[2] **BARONE JÚNIOR**, M., *Álgebra Linear*, Volumes I e II, 3.^{a} Ed., São Paulo, 1988.

[3] **BAULDRY**, W. C. et al, *Linear Algebra with Maple*, John Wiley, 1995.

[4] **BOLDRINI**, J. L. et al, *Álgebra Linear*, 3.^{a} Edição, Ed. Harbra Ltda, 1986.

[5] **DEEBA**, E. and **GUNAWARDENA**, A., *Interactive Linear Algebra with Maple V*, Springer-Verlag, 1998.

[6] **FINKBEINER**, D. T., *Introdução às Matrizes e Transformações Lineares*, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 1970.

[7] **GOLDBERG**, J. L., *Matrix Theory with Applications*, McGraw-Hill, 1991.

[8] **HALMOS**, P. R., *Espaços Vetoriais de Dimensão Finita*, Ed. Campus Ltda, 1978.

[9] **HOFFMAN**, K. e **KUNZE**, R., *Álgebra Linear*, , 2.^{a} Edição, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 1979.

[10] **LANG**, S., *Álgebra Linear*, Ed. Edgard Blücher Ltda, 1971.

[11] **LIPSCHUTZ**, S., *Álgebra Linear*, Makron Books (Coleção Schaum), 1994.

[12] **MEDEIROS**, A. S. de, "Transformações Lineares e Escalonamento de Matrizes," *Matemática Universitária*, *N.^{o}* 30 - Junho 2001, pp. 131-133.

[13] **SPLINDLER**, K., *Abstract Algebra with Applications*, Vol. 1 Marcel Dekker, Inc. 1994.

Índice

Adjunta clássica, 9
Ângulo, 157
Auto-espaço, 117
Autovalor, 117
Autovetor, 117
Base ordenada, 62
  de autovetores,
  ortogonal, 151
  ortonormal, 157
Cisalhamento, 115
Bloco elementar de Jordan, 211
Cofator, 9
Complementar ortogonal, 164
Cônica, 188
Coordenadas, 63
Corpo (s), 1
  de Galois, 2
  dos números complexos, 2, 23
  dos números racionais, 2
  dos números reais, 2, 23
  extensão de, 3
Dependência linear, 45
Desigualdade
  de Bessel, 172
  de Cauchy-Schwarz, 156
  de Minkoswski, 156
Determinante, 6
  de Vandermonde, 22
  de um operador linear, 109
Elipse, 193
Elipsóide, 191
Equação característica, 119
Espaço euclidiano, 150
Espaço l^2, 149
Espaço $\mathbb{R}^n$, 24
Espaço vetorial, 23
  base, 50
  base canônica, 50, 51
  base finita, 50
  base infinita, 51
  base ordenada, 62
  de dimensão finita, 51
  de dimensão infinita, 51
  dimensão, 53
  parametrização, 91
Espaços de funções, 27
Espaços de matrizes, 26
Espaços de polinômios, 26
Espaço quociente, 62
Espaços vetoriais isomorfos, 90
Forma (s)
  bilinear, 194
  canônica de Jordan, 211
  quadrática, 188
Fourier
  coeficientes de, 153
  expansão de, 153, 165
Geradores
  de um espaço vetorial, 42
  minimal de, 61
Hipérbole, 190
Hiperbolóide de duas folhas, 193
Identidade
  de Appolonius, 159
  de Bessel, 172
  de Bezout, 195
  do paralelogramo, 159
  de Parseval, 172
  de polarização, 159
Imagem de uma transformação linear, 82
Independência
  linear, 45
  maximal, 61
Índice de nilpotência, 199
Isometria, 186
Isomorfismo, 90

Linear
- combinação, 15, 40
- dependência, 45
- indepedência, 45

Lema de Zorn, 50

Matriz (es), 3
- A-associada, 18
- adição de, 4
- anti-simétrica, 12
- companheira, 137
- congruentes, 10
- conjugadas, 10
- definida positiva, 149
- diagonal, 4
- diagonal principal, 4
- de mudança de bases, 65
- dos cofatores, 9
- equivalentes, 10
- equivalentes por linha, 16
- identidade, 4
- iguais, 4
- invertível, 9
- não-invertível, 9
- não-singular, 9
- nula, 4
- nulidade, 17
- ortogonal, 12
- posto, 17
- produto de, 5
- reduzida por linha, 17
- semelhantes, 10
- simétrica, 12
- singular, 9
- superdiagonal, 4
- T-associada, 103
- traço de, 12
- transposta, 5
- triangular, 10
- unitárias, 5

Melhor aproximação, 167

Movimento rígido, 186

Multiplicidade
- algébrica, 121
- geométrica, 121

Normal, 155

Normalização, 155

Núcleo de uma transformação linear, 83

Números de Fibonacci, 131

Operador linear, 72
- adjunto, 176
- auto-adjunto, 182
- cisalhamento, 80
- determinante, 109
- diagonalizável, 127
- diferencial, 73
- identidade, 72
- integração, 80
- nilpotente, 199
- nulo, 72
- ortogonal, 180
- projeção, 77, 114, 137
- reflexão, 78, 114
- rotação de um ângulo θ, 73
- semelhança, 73
- simétrico, 182
- translação, 74

Operações, 1
- de adição, 1
- de multiplicação, 1
- de multiplicação por escalar, 123
- elementares, 15

Permutações, 6

Polinômio
- característico, 118
- característico de um operador linear, 119
- irredutível, 195
- Legendre, 163
- minimal, 134
- redutível, 195
- relativamente primos, 195

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, 162
Produto
interno, 147
vetorial, 112, 171
Projeções, 153
Pivô, 17
Quadrado mágico, 21, 61
Quádrica, 188
Quociente de Raleigh, 182
Regra de Cramer, 9, 47
Representação matricial
transformação linear, 94
Símbolo de Kronecker, 4
Sistemas de equações lineares, 12
compatível, 14
equivalentes, 14
forma matricial, 13
homogêneo, 13
incompatível, 14
solução do, 13
matriz ampliada do, 14
Subcorpo, 3
Subespaço (s), 32
adaptado, 40
gerado, 42
impróprios, 32
independentes, 127
interseção de, 34
invariante, 177
não-triviais, 32
própios, 32
soma de, 36, 128
soma direta de, 37
soma direta ortogonal de, 166
triviais, 32
reunião de, 36
Superfície quadrática, 188
Transformação linear, 71
bijetora, 86
imagem de, 82
injetora, 86
não-singular, 86
núcleo de, 83
nulidade de, 84
posto de, 84
singular, 86
sobrejetora, 86
Teorema de Binet, 9
Teorema de Cayley-Hamilton, 134, 214
Teorema de decomposião primária, 197
Teorema do núcleo e da imagem, 87
Teorema de Pitágoras, 160
Teorema da projeção, 165
Teorema da representação de Riesz, 173
Vetor (es)
distância entre, 158
ortogonais, 150
unitário, 155

Nasceu em Coremas, alto sertão paraibano, em 26 de janeiro de 1954. Veio para João Pessoa em 1974, onde permanece até hoje. Ingressou em 1977 na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), onde concluiu o bacharelado em matemática. Obteve o grau de mestre em matemática (1988) na Universidade Federal do Ceará (UFC) e de doutor em engenharia elétrica (1996) na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Seu principal interesse em pesquisa é na área de Teoria de Codificação. Atuou na implantação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), onde orientou várias dissertações de mestrado.

ISBN 978-85-7745-081-3

9 788577 450817