Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 8 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Sejam* $u,\ v,\ w \in \mathbb{E}$, *(*$\mathbb{E}$ *espaço com p.i.) tais que* $||u|| = 1$, $||v|| = 2$, $||w|| = 1$, $\langle u, v\rangle = 2$, $\langle u, w\rangle$ *e* $\langle v, w\rangle = 5$. *Calcule:* $\langle u+v,\ u+w\rangle$, $\langle 2v+w,\ 2u-v\rangle$ *e* $||u+v+w||$.

2 *Seja* $<,>: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle (x_1, x_2),\ (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$. *Verifique se* $<,>$ *define um produto interno sobre* $\mathbb{R}^2$.

3 *Seja* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial com produto interno. Mostre que:*

$$\forall u, v \in \mathbb{E},\ ||u|| = ||v|| \Leftrightarrow \langle u+v,\ u-v\rangle = 0.$$

4 *Sejam* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ *vetores unitários e ortogonais e sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Prove que:*

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \perp c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \ \ \Leftrightarrow \ \ ac + bd = 0.$$

5 *Mostre que os vetores* $v_1 = (\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0)$, $v_2 = (-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0)$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)$ *formam uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$, *com o p.i. usual. Determine as coordenadas do vetor* $v = (1, -1, 2)$ *nesta base.*

6 *Considere* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual. Determine uma base ortonormal para o subespaço* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

7 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um operador linear tal que,* $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\langle Tu, u\rangle = 0$. *Mostre que:* $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, $\langle Tu, v\rangle = -\langle Tv, u\rangle$.

8 *Sejam* $v_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *e* $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \perp v_0\}$. *Mostre que* W *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

9 *Em* $\mathbb{R}^4$ *considere o p.i. definido por* $\langle (a, b, c, d),\ (x, y, z, w)\rangle = 2ax + by + cz + dw$. *Detremine uma base para o subespaço ortogonal a* $S = span\{(1, 2, 0, -1),\ (2, 0, -1, 1)\}$.

10 *Sejam* $u, v \in \mathbb{E}$ *vetores num espaço com p.i. Mostre que:*

$$|\langle u, v\rangle| = ||u||||v|| \ \ \Leftrightarrow \ \ \{u, v\} \text{ é um conjunto ld.}$$

11 *Em* $\mathbb{R}^4$, *seja* $W = span\{(1, 1, 1, 1),\ (1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\}$. *Ache a projeção ortonal de* $v = (1, -3, 4, 5)$ *sobre* W.

12 *Dados os vetores* $u = (2, -1, 2)$, $v = (1, 2, 1)$ *e* $w = (-2, 3, 3)$. *Determine o vetor de* $\mathbb{R}^3$ *que é a projeção ortogonal de* w *sobre* $span\{u, v\}$.

13 *Determine a base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$ *obtida pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a partir da base* $\{u, v, w\}$, *onde* $u = (2, 6, 3)$, $v = (-5, 6, 24)$ *e* $w = (9, -1, -4)$.

14 *Sejam* $\mathbb{E}$ *um espaço vetorial com p.i. e* $W \subset \mathbb{E}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{E}$. *Seja* $W^{\perp} = \{v \in \mathbb{E} : \langle v,\ w\rangle = 0, \forall w \in W\}$. *Mostre que* $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{E}$.