Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 5 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *uma aplicação linear tal que:* $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (-1,1,2)$ *e* $T(0,0,1) = (2,0,1)$. *Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:* $ker(T)$, $Im(T)$, $ker(T) \cap Im(T)$ *e* $ker(T) + Im(T)$.

2 *Verifique que cada uma das aplicações lineares abaixo é um isomorfismo e encontre a aplicação inversa.*

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (z, y-4z, x-3y-2z)$;

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x, x-y, 2x+y-z)$.

3 *Sejam* $F,\ G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definidas por* $F(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$ *e* $G(x,y,z) = (x+2y,\ y-z,\ x+2z)$. *Determine:* $F \circ G$, $ker(F \circ G)$, *e* $Im(F \circ G)$.

4 *Determine uma aplicação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $Im(T) = span\{(1,1,2,1),\ (2,1,0,1)\}$

5 *Determine* $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}$ *para as transformações* T *e as bases* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *dadas abaixo:*

(1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ T(x,y,z) = (x+y+z, x-z, x+y, x+2y+3z)$,
$\mathcal{B}1 = \{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ $\quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (0,0,1,1),\ (0,0,0,1)\}$;

(2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$
$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ $\quad \mathcal{B}_2 = \{(0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,0)\}$;

(3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y) = (x+y, x-y)$
$\mathcal{B}_1 = \{(1,0),\ (0,1)\}$ $\quad \mathcal{B}_2 = \{(-1,0),\ (0,-1)\}$.

6 *Encontre isomorfismos entre os espaços* $\mathbb{E}$ *e* $\mathbb{F}$ *dados abaixo:*

(1) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, $\quad \mathbb{F} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0, z+w=0\}$;

(2) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $\quad \mathbb{F} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *(polinômios de grau menor ou iguial a 3);*

(3) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $\quad \mathbb{F} = \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ *(matrizes* 2×2 *reais).*

7 *Dadas as bases* $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),\ (-1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *encontra a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $[T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

8 *Seja* $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ *uma transformação linear. Suponha que,* $dim(\mathbb{E}) = n$ *e* $dim(|F) = m$. *Mostre que, se* $n > m$, *então* T *não é injetiva e que se* $n < m$, *então* T *não é sobrejetiva.*