Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de matemática
http://www.mat.ufpb.br

Lista de Exercícios Nº 4 : Introdução à Álgebra Linear

Prof.: Pedro A. Hinojosa

1 *Seja $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ um isomorfismo. Prove que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de $\mathbb{E}$ se, e somente se, $\{Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\}$ é uma base de $\mathbb{F}$.*

2 *Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial $\mathbb{E}$. Considere a função $T : U \times V \to \mathbb{E}$, definida por $T(u, v) = u + v$. Mostre que:*

(i) T *é uma aplicação linear;*

(ii) *A imagem de T, $Im(T)$, é o subespaço $U + V$;*

(iii) *O núcleo de T é $ker(T) = \{(u, -u) : u \in U \cap V\}$ é isomorfo a $U \cap V$.*

3 *Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:*

(i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y, z) = (x + 2z, y + 2z);$

(ii) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z, w) = (x - w, y - w, z - w);$

(iii) $T : P(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3,\ T(ax^2 + bx + c) = (a + b, a + c, a = b = c).$

4 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x + y, 2x - 4y - 3z, x + 4y - 2z)$. Determine se T é invertível, caso afirmativo encontre T^{-1}.*

5 *Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $(1, 0, 2) \in ker(T)$ e $Im(T) = span\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, 1)\}$.*

6 *Seja $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Prove que:*

(i) *$T(v) = v$, para todo $v \in Im(T)$;*

(ii) $\mathbb{E} = ker(T) \oplus Im(T)$.

7 *Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x - y, x + y)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y) = (-y, x)$. Encontre: $T_1 + T_2$, $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$, T_1^3, e T_2^4*

8 *Sejam $T : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ uma transformação linear injetiva e S_1, $S_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ lineares. Prove que: se $T \circ S_1 = T \circ S_2$, então $S_1 = S_2$.*

9 *Seja $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ uma transformação linear tal que $T^2 = 0$. Mostre que a transformação linear $Id - T$ é invertível.*

10 *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2y - 3z, -2z, 0)$. Mostre que $T^3 = 0$.*