IAL 1ª Prova 12/09/2017

1) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$

a) W é subesp. de $\mathbb{R}^3$.

(i) $W \neq \emptyset$; de fato, $(0,0,0) \in W$ $(0+0-0=0)$

(ii) $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$

$$\vec{v}_1 \in W \Rightarrow x_1 + y_1 - z_1 = 0$$
$$\vec{v}_2 \in W \Rightarrow x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

Daí, $(x_1+y_1-z_1) + (x_2+y_2-z_2) = 0$, ou seja

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) - (z_1+z_2) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in W$$

(iii) $\vec{v} = (x,y,z) \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\vec{v} \in W \Rightarrow x+y-z=0$$
$$\Rightarrow \lambda(x+y-z) = 0 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (\lambda x) + (\lambda y) - (\lambda z) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in W.$$

Por (i), (ii) e (iii) W é um subesp de $\mathbb{R}^3$

b) Uma base e a dimensão de W.

$$(x,y,z) \in W \Rightarrow x+y-z=0$$
$$\Rightarrow z = x+y.$$
$$\Rightarrow (x,y,z) = (x,y,x+y)$$
$$= x(1,0,1) + y(0,1,1)$$

$\therefore \quad W = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,1)\}$

Agora como os vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ são l.i. (um não é múltiplo escalar do outro) eles formam uma base de W.

$\therefore \quad \mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é base de W

Daí $\quad \underline{\dim W = 2}$

c) $V \subset \mathbb{R}^3$ subesp. t.q. $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

seja $V = \text{span}\{(1,1,-1)\}$

observe que $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$ é l.i.

De fato, $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \quad \ldots\ldots (*)$

Logo $\quad V + W = \text{span}\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$

$\qquad\qquad = \underline{\mathbb{R}^3}$

($\tilde{\mathcal{B}}$ é base de $V + W$, logo $\dim(V+W) = 3$)

É claro que $V \cap W = \{(0,0,0)\}$ (Veja $(*)$ acima)

$\therefore \quad \underline{\mathbb{R}^3 = V \oplus W}$

2) $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$

$$(*)\quad \begin{cases} w_1 = v_1 - v_2 \\ w_2 = 2v_1 - v_2 + v_3 \\ w_3 = v_1 - 2v_2 + v_3 \end{cases}$$

(a) Determinar $[I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$ e $[I]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}$

$$[I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(de (*) acima)}$$

$$[I]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = \left([I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad [I]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) $[v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinar $[v]_{\mathcal{B}_1}$

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = [I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} \cdot [v]_{\mathcal{B}_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4-1 \\ -3+2-2 \\ 0-2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z,w) = (x-2w, y-3w, z-4w)$

a) Determinar $\ker(T)$ e $Im(T)$.

$$\ker(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = (0,0,0)\}$$

$$(x,y,z,w) \in \ker(T) \Rightarrow \begin{cases} x-2w=0 \\ y-3w=0 \\ z-4w=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2w \\ y = 3w \\ z = 4w \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y,z,w) = (2w, 3w, 4w, w) = w(2,3,4,1)$$

$$\therefore \underline{\ker(T) = span\{(2,3,4,1)\}}$$

ou

$$\ker(T) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 4t \\ w = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

<u>$Im(T)$</u>

Como
$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim \ker(T) + \dim Im(T) = 1 + \dim Im(T)$$

temos $\dim Im(T) = 3$ e sendo $Im(T)$ subespaço de $\mathbb{R}^3$ ~~Ker~~ temos $\underline{Im(T) = \mathbb{R}^3}$

(b) $[T] = ?$

$T(1,0,0,0) = (1,0,0)$
$T(0,1,0,0) = (0,1,0)$
$T(0,0,1,0) = (0,0,1)$
$T(0,0,0,1) = (-2,-3,-4)$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y+z,\, x-y,\, x-z)$

T é isomorfismo ?

$T(1,0,0) = (1,1,1)$
$T(0,1,0) = (1,-1,0)$
$T(0,0,1) = (1,0,-1)$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, logo $\{(1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$ é l.i. e portanto base de $\mathbb{R}^3$ (o conj. tem 3 elementos)

Assim T leva uma base numa base e portanto é um isomorfismo.

Outra solução

Lembre que, neste caso ($T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), T é injetiva se, e somente se, T é sobrejetiva, então basta mostrar que T é injetiva, ou que T é sobrejetiva.

A solução anterior também mostra que T é sobrejetiva

Para mostrar que T é injetiva basta ver que

$\ker(T) = \{(0,0,0)\}$.

$(x,y,z) \in \ker T \iff T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\iff (*) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}.$$

Como $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ o sist. $(*)$ acima tem solução única. $\therefore$ $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$

5) $T: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linear, $\dim \mathbb{E} = 6$, $\dim \mathbb{F} = 4$

T é injetiva?

Não!

Teorema do núcleo e a imagem:

$6 = \dim \mathbb{E} = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$.

$\operatorname{Im}(T)$ é subespaço de $\mathbb{F}$, logo $\operatorname{Im}(T)$ tem dimensão no máximo 4. Dessa forma $\ker(T)$ tem dimensão de pelo menos 2, ou seja necessariamente $\dim \ker(T) > 0$ $\therefore$ $\ker(T) \neq \{\vec{0}\}$ e

T não é injetiva.