Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de Matemática
Pós-Graduação em Matemática
http://www.mat.ufpb.br/~pgmat

PGmat

Geometria Diferencial

Turma: Mestrado

1^a Prova, João Pessoa, 14 de setembro de 2006

Prof. Pedro A. Hinojosa

RESPOSTAS (você NÃO quer tudo feito... Quer?)

Questão 1 *Se* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *está contida numa esfera de raio* r, *então* $|\alpha(s)|^2 = r^2$. *Derivando (três vezes) obtemos:*

$$\langle \alpha\,,\,\mathbf{t}\rangle = 0, \quad 1 + \langle \alpha\,,\,\mathbf{n}\rangle = 0 \quad e \quad k'\langle \alpha\,,\,\mathbf{n}\rangle - k\tau\langle \alpha\,,\,\mathbf{b}\rangle = 0.$$

Agora construa a igualdade $r^2 = |\alpha(s)|^2 = \langle \alpha\,,\,\mathbf{t}\rangle^2 + \langle \alpha\,,\,\mathbf{n}\rangle^2 + \langle \alpha\,,\,\mathbf{b}\rangle^2$.

Pronto. Agora pode terminar?

Questão 2 *Seja* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a simetria com relação à reta normal de* α *em* $\alpha(0)$. *Defina "outra curva"* $\beta : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ *por* $\beta(s) = \phi(\alpha(-s))$. *Então tem-se:* $\beta(0) = \alpha(0)$ *e* $\beta'(0) = \alpha'(0)$. *Além disso,* $k_\alpha = k_\beta$ ... *Faça a conta.*

Agora use o teorema fundamental das curvas (curvas planas).

Note que, se escolhemos coordenadas em $\mathbb{R}^2$ *de modo que* $\alpha(0) = (0,0)$, $\mathbf{t}(0) = \alpha'(0) = (1,0)$ *e* $\mathbf{n}(0) = (0,1)$, *então teremos:* $\phi(x,y) = (-x,y)$ *e se* $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ *com* $(x(s))^2 + (y(s))^2 = 1$ *(α ppca), então* $\beta(s) = \phi(\alpha(-s)) = (-x(-s), y(-s))$, *donde*

$$\beta'(s) = (x'(-s), -y'(-s)) \quad e \quad \beta''(s) = (-x''(-s), y''(-s)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} k_\beta(s) &= x'(-s)y''(-s) - (-x''(-s))(-y'(-s)) \\ &= x'y'' - x''y'(-s) \\ &= k_\alpha(-s) = k_\alpha(s) \end{aligned}$$

Questão 3 **Isto você aprendeu em Cálculo .... Sem comentários.**

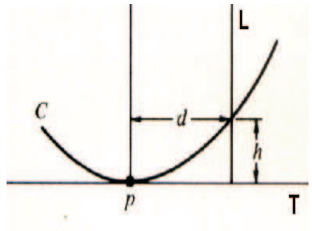
Questão 4 *S superfície regular,* $f : S \to \mathbb{R}$, $f(p) = |p - p_0|^2$, $p \in S$ *e* $p_0 \in \mathbb{R}^3$ *fixo.*

$df(p)w = \langle 2w, p - p_0\rangle$, $w \in T_pS$?

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, *uma curva dif. tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = w$. *Então,*

$$\begin{aligned} df(p)w &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \alpha(t) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle \alpha(t) - p_0\,,\,\alpha(t) - p_0\rangle \\ &= 2\langle \alpha'(t)\,,\,\alpha(t) - p_0\rangle|_{t=0} \\ &= 2\langle \alpha'(0)\,,\,\alpha(0) - p_0\rangle \\ &= 2\langle w\,,\,p - p_0\rangle = \langle 2w\,,\,p - p_0\rangle. \end{aligned}$$

Questão 5 *Olhe a figura abaixo. Escolha coordenadas em* $\mathbb{R}^2$ *de modo que o centro esteja no ponto* p *e os eixos* X *e* Y *coincidam, respectivamente, com as retas tangente e normal a* C *em* p.



Parametriza C *pelo comprimento de arco a partir do ponto* p, *ou seja,* $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ *com* $\alpha(0) = p$.

Considere o desenvolvimento de Taylor de α.

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2} + R \quad \textit{onde} \quad \lim_{s \to 0} \frac{R}{s^2} = 0.$$

Conclua que:

$$x(s) = s + R_1\,, \qquad e \qquad y(s) = \pm\frac{ks^2}{2} + R_2 \qquad \textit{onde} \qquad R = (R_1, R_2).$$

(O sinal depende da orientação de α.*)*

Daí, $|k| = \lim\limits_{s \to 0} \frac{2|y(s)|}{s^2} = \lim\limits_{d \to 0} \frac{2h}{d^2}$.

Agora, se α *está contida no interior de um disco fechado* D, *então contraia* ∂D *por uma família de discos concêntricos até tocar na curva num ponto* p. *Agora use o resultado anterior.*

FIM