



## Geometria Diferencial

Turma: Mestrado

1ª Prova, João Pessoa, 17 de novembro de 2006

Prof. Pedro A. Hinojosa

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

**Questão 1** Seja  $S$  uma superfície regular. Mostre que a curvatura média  $H$  num ponto  $p \in S$  é dada por:  $H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta$  onde  $k_n(\theta)$  é a curvatura normal em  $p \in S$  ao longo de uma direção que faz um ângulo  $\theta$  com uma direção fixa

**Questão 2** Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, n > 2$ , as curvaturas normais em  $p \in S$  ao longo de direções que fazem ângulos  $0, \frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$  com uma direção principal. Prove que:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = nH$  onde  $H$  é a curvatura média em  $p$ .

**Questão 3** O gradiente de uma função diferenciável  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável  $\text{grad } f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada ponto  $p \in S$  um vetor  $\text{grad } f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle_p = df(p)v \quad \forall v \in T_p S$$

Prove que:

a) se  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental numa parametrização  $X : U \rightarrow S$ , então  $\text{grad } f$  sobre  $X(U)$  é dado por:

$$\text{grad } f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} X_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} X_v.$$

Em particular, se  $S = \mathbb{R}^2$  com coordenadas  $x, y$ , então  $\text{grad } f = f_x e_1 + f_y e_2$  onde  $\{e_1, e_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ;

b) se fixamos  $p \in S$  e fazemos variar  $v$  no círculo unitário de  $T_p S$  ( $\|v\| = 1$ ), então  $df(p)$  é máximo se, e só se,  $v = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$ ;

c) se  $\text{grad } f \neq 0$  em todos os pontos de uma curva de nível  $C = \{q \in S : f(q) = \text{cte.}\}$ , então  $C$  é uma curva regular em  $S$  e  $\text{grad } f$  é normal a  $C$  em todos os seus pontos.

**Questão 4** Seja  $S$  uma superfície regular compacta em  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que:

a)  $S$  tem um ponto elíptico.

b)  $S$  não pode ser uma superfície mínima.

**Questão 5** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação definida por  $F(p) = cp$ , onde  $p \in \mathbb{R}^3$  e  $c$  é uma constante positiva. Sejam  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $\bar{S} := F(S)$ . Mostre que  $\bar{S}$  é uma superfície regular e encontre fórmulas relacionando as curvaturas média e gaussiana,  $H$  e  $K$ , de  $S$  com as curvaturas respectivas,  $\bar{H}$  e  $\bar{K}$  de  $\bar{S}$ .

**Boa Prova !!**