Universidade Federal da Paraíba
CCEN - Departamento de Matemática
Pós-Graduação em Matemática
http://www.mat.ufpb.br/~pgmat

Geometria Diferencial
Turma: Mestrado
1^a Prova, João Pessoa, 14 de setembro de 2006

Prof. Pedro A. Hinojosa

Nome: ______________________________ Matrícula: ______________

Questão 1 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, com curvatura positiva e contida numa esfera de raio $r > 0$. Para $s_0 \in I$, prove que são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) $k'(s_0) = 0$,

(b) $k(s_0) = \frac{1}{r}$ *ou* $\tau(s_0) = 0$.

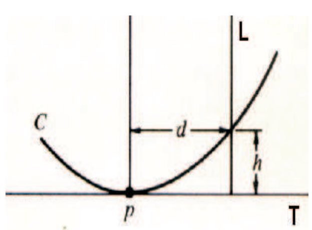
Questão 2 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número real positivo e $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco tal que, $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Prove que o traço de α é simétrico com relação à reta normal de α em 0.*

Questão 3 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p = (x_0, y_0) \in A$ um ponto de A. Seja $S := Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}$. Mostre que o plano tangente a S no ponto $(p, f(p)) \in S$ é o gráfico da diferencial de f no ponto p, $df(p)$ e sua equação é: $z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0)$.*

Questão 4 *Sejam S uma superfície regular e $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, onde $p \in S$ e p_0 é um ponto fixo de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $df(p)w = \langle 2w, p - p_0\rangle,\ w \in T_pS$.*

Questão 5 *Sejam C uma curva plana e T a reta tangente à curva C no ponto $p \in C$. Seja L uma reta paralela à reta nornal a C em p que está à distância d do ponto p (Veja a figura abaixo). Seja h o comprimento do segmento determinado sobre L por C e T (h é a altura relativa a T). Prove que: $|k(p)| = \lim\limits_{d \to 0} \frac{2h}{d^2}$. onde $k(p)$ é a curvatura de C em p.*

Use este resultado para mostrar que se a curva C está contida no interior de um disco fechado de raio r, então existe um ponto $p \in C$ tal que $|k(p)| \geq \frac{1}{r}$.



Boa Prova !!