



Geometria Diferencial: 1ª Lista de Exercícios

Prof. Pedro A. Hinojosa

Questão 1 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco (ppca). Prove que α é um segmento de reta ou um arco de circunferência se, e somente se, a curvatura de α é constante.

Questão 2 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva ppca. Suponha que existe uma função diferenciável $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(s)$ é o ângulo que a reta tangente a α faz com uma direção fixa. Prove que: $\theta'(s) = \pm k(s)$.

Questão 3 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana regular e $[a, b] \subset I$ tal que $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Prove que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que a reta tangente a α em t_0 é paralela ao segmento de reta que une $\alpha(a)$ com $\alpha(b)$. (Isto é uma generalização do conhecido teorema de Rolle).

Questão 4 Uma curva plana, em coordenadas polares, é parametrizada na forma $\alpha(\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, onde $\rho = \rho(\theta)$, $a < \theta < b$. Mostre que:

a) o comprimento de α é $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$.

b) a curvatura de α é $k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 + \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}}$.

Questão 5 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco (ppca), $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um movimento rígido e $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a curva definida por $\beta(s) = M(\alpha(s))$. Prove que, para cada $s \in I$ tem-se:

$$k_\beta(s) = k_\alpha(s) \text{ e } \tau_\beta = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{se } M \text{ preserva orientação.} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{se } M \text{ reverte orientação.} \end{cases}$$

Questão 6 (Comparação de duas curvas num ponto) Sejam α e β duas curvas planas, regulares, com a mesma orientação e definidas num intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon)$. Suponha que α e β são tangentes em $p := \alpha(0) = \beta(0)$. Dizemos que " α é maior do que β no ponto p ", escrevemos $\alpha(0) > \beta(0)$, se existe uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$ na qual $\langle \alpha - \alpha(0), \bar{\mathbf{n}}_\alpha(0) \rangle \geq \langle \beta - \beta(0), \bar{\mathbf{n}}_\beta(0) \rangle$. Prove que:

1. Se $\alpha(0) > \beta(0)$, então $k_\alpha(0) \geq k_\beta(0)$.

2. Se $k_\alpha(0) > k_\beta(0)$, então $\alpha(0) > \beta(0)$.

Questão 7 Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva ppca e $s_0 \in I$ tal que $k(s_0) > 0$. Sejam $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $A_\lambda = \alpha(s_0) + \lambda \bar{\mathbf{n}}(s_0)$ um ponto na reta normal à curva α em s_0 . Defina a função $f_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\lambda(s) = |\alpha(s) - A_\lambda|^2$. Mostre que:

$$f_\lambda(s_0) = \lambda^2, \quad f'_\lambda(s_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''_\lambda(s_0) = 2(1 - \lambda k(s_0)).$$

Conclua daí que:

1. Se $\lambda < \frac{1}{k(s_0)}$, então existe $J \subset I$ vizinhança de s_0 tal que $\alpha(J)$ está fora da circunferência com centro no ponto A_λ e raio $|\lambda|$.
2. Se $\lambda < \frac{1}{k(s_0)}$, então existe $J \subset I$ vizinhança de s_0 tal que $\alpha(J)$ está dentro da circunferência com centro no ponto A_λ e raio $|\lambda|$.

Assim, a circunferência com centro no ponto $\alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \vec{n}(s_0)$ e raio $\frac{1}{k(s_0)}$ é a que melhor aproxima a curva α numa vizinhança de $\alpha(s_0)$. Esta circunferência é chamada **circunferência oscultriz**, o seu raio chama-se **raio de curvatura** e o seu centro, **centro de curvatura**. A curva formada pelos centros de curvatura de uma curva α ($\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$), supondo $k(s) > 0$, é chamada **evoluta** de α .

Questão 8 Em geral diz-se que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **hélice** se as retas tangentes à curva α formam um ângulo constante com uma direção fixa. Admita que $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Prove que:

- a) α é uma hélice se, e somente se, $k/\tau = \text{cte}$.
- b) a curva $\alpha(s) = (\frac{a}{c} \int \sin\theta(s) ds, \frac{a}{c} \int \cos\theta(s) ds, \frac{b}{c} s)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, é uma hélice e $k/\tau = a/b$.

Questão 9 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $[a, b] \subset I$. Suponha que $\alpha(a) = P$ e que $\alpha(b) = Q$.

- (i) Mostre que, para qualquer vetor constante unitário, v , tem-se:

$$\langle Q - P, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt \geq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

- (ii) Defina, $v := \frac{Q-P}{|Q-P|}$ e mostre que,

$$|\alpha(a) - \alpha(b)| \geq \int_a^b |\alpha'(t)| dt,$$

isto é, a curva com menor comprimento ligando $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ é o segmento de reta entre estes pontos.

Questão 10 Uma **translação** por um vetor v em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = p + v$, $p \in \mathbb{R}^3$. Uma aplicação linear $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **transformação ortogonal** quando $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Um **movimento rígido** em $\mathbb{R}^3$ é o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal com determinante positivo.

- (i) Mostre que o módulo de um vetor e o ângulo θ entre dois vetores, $0 \leq \theta \leq \pi$, são invariantes por transformações ortogonais com determinante positivo.
- (ii) Mostre que o produto vetorial de dois vetores é invariante por transformações ortogonais com determinante positivo. A afirmação continua verdadeira caso seja retirada a condição sobre o determinante?
- (iii) Mostre que o comprimento de arco, a curvatura e a torção de uma curva parametrizada (nos pontos onde estão definidas) são invariantes por movimentos rígidos

Questão 11 Exercícios 1, 2, 4, 5, 6, 8 e 9 da seção 1.7 do livro do Manfredo.