UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
6ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2005.1

01. Encontre a primitiva g da função $f(x) = \sqrt[4]{x}$, satisfazendo $g(1) = 2$.

02. Determine a função f que satisfaz $f(1) = 1$ e que, para todo x em seu domínio,

$$f'(x) = xf(x).$$

(**Sugestão**: *Qual é a derivada da função* $g(x) = ln(f(x))$?)

03. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, tivermos $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$,

a) verifique que $\left(f(x) - sen\,x\right)^2 + \left(g(x) - cos\,x\right)^2 = 0$ e, então,

b) conclua que $f(x) = sen\,x$ e que $g(x) = cos\,x$.

(**Sugestão**: *A função* $\varphi(x) = \left(f(x) - sen\,x\right)^2 + \left(g(x) - cos\,x\right)^2$ *é constante*?)

04. Para cada uma das funções f abaixo, calcule $\int f(x)dx$.

a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = 2\,sen\,x - \dfrac{1}{x^5}$

d) $f(x) = (1 + x^2)^2$ **e)** $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ **f)** $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x + 2} + sec^2 x$ **h)** $f(x) = tg^2 x - x\sqrt{1 + x^2}$ **i)** $f(x) = 2^x + e^{x+1}$

j) $f(x) = 2 + x^2 cos(2x^3)$ **k)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x}$ **l)** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

m) $f(x) = sec^2(4x + 2)$ **n)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^3 - 5}$ **o)** $f(x) = sec(2x)tg(2x)$

p) $f(x) = \dfrac{sen\,x}{\sqrt{1 + cos\,x}}$ **q)** $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ **r)** $f(x) = \dfrac{sen\,2x}{1 + 3\,sen^2 x}$

05. Calcule

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ (**Sugestão:** *Faça a substituição* $u = \dfrac{x}{2}$ *e lembre-se da função* $arcsen\,x$)

06. Determine a função f que satisfaz $f''(x) = x^2 + e^x$, $f'(0) = 1$ e $f(0) = 2$.

07. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto $(-3, 0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x, y), é dada por $m(x) = 2x + 1$.

08. Considere f uma função contínua e suponha que $a(x)$ e $b(x)$ sejam funções deriváveis. Se

$$\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt,$$

verifique que $\varphi'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.

09. Usando o resultado do exercício anterior, calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo.

a) $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4}\,dt$ **b)** $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5\,dt$ **c)** $\varphi(x) = \int_{x^2-1}^{e^x} \cos\left(t^2\right)dt$

10. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida da função f, no intervalo I.

a) $f(x) = \begin{cases} x, & se\ x < 0 \\ x^2 - x + 1, & se\ x \geq 0 \end{cases}$; $I = [-1, 1]$. **b)** $f(x) = |x-1|$; $I = [-2, 2]$.

c) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$; $I = [-\pi, \pi]$. **d)** $f(x) = x + |\cos x|$; $I = [-\pi, \pi]$.

e) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$; $I = [-3, 5]$. **f)** $f(x) = x - |x|$; $I = [-\pi, \pi]$.

11. Calcule a área delimitada

b) pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $x \in [0, 1]$.

c) pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $x \in [0, 1]$.

d) pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.

e) pelo eixo Y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, até o primeiro ponto em que essas se cortam para $x > 0$.

f) pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.

g) pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

h) pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$

i) pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo X.

j) pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

12. Calcule a área da região A, definida por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0 \ \text{ e } \ x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}.$$

13. Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{x^3}{4}, & para \quad x < 0 \\ x^2 - x - 2, & para \quad 0 \leq x < 3 \\ 16 - 4x, & para \quad x \geq 3 \end{cases}$, calcule $\int_{-2}^{5} f(x)dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo X, de $x = -2$ até $x = 5$.

14. Calcule as integrais abaixo e, em cada caso, faça um gráfico da região cuja área as mesmas representam.

a) $\int_0^1 dx$ **b)** $\int_0^1 2x\,dx$ **c)** $\int_{-1}^0 (4+3x)\,dx$ **d)** $\int_{-5}^{-3} (x+5)\,dx + \int_{-3}^0 2\,dx + \int_0^4 (2-\sqrt{x})\,dx$

15. Mostre que $\int_0^{2\pi} sen(kt)\,dt = 0$, onde k é um inteiro não-nulo.

16. Se f é uma função par, verifique que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

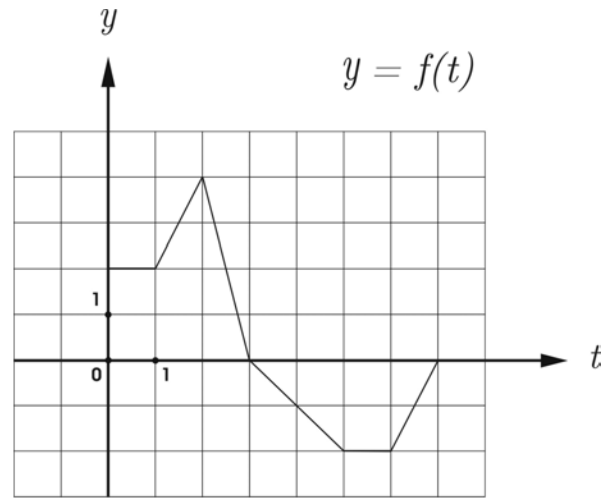
17. Se f é uma função ímpar, verifique que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

18. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico encontra-se esboçado ao lado.

a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

b) Em que intervalo g está crescendo ?

c) Quando g atinge seu valor máximo ?



19. Quatro pessoas, **A**, **B**, **C** e **D**, calculam o valor de $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$ e, ao final, encontram respostas diferentes. **A** diz que a integral vale $\frac{4}{3}$; **B** diz que a integral vale $\frac{2}{3}$; **C** garante que o valor da integral é $ln(-3)^2 = ln\,9$, já que $ln(-1)^2 = ln\,1 = 0$ e **D** afirma que o valor da integral é $-\frac{4}{3}$. Quem está com a razão ?

20. Analise cada uma das integrais abaixo quanto à convergência.

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ **b)** $\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}$ **c)** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x+1}$

d) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ **e)** $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ **f)** $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

$\int\int\int\int\int\int$