## UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
## 5ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2005.1

**01.** Se $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, encontre o número $c$ que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio no intervalo $[1, 8]$.

**02.** Se $f(x) = |x - 1|$, existe algum número $c$ satisfazendo $3f'(c) = f(3) - f(0)$?

**03.** A resposta da questão anterior contradiz o Teorema do Valor Médio?

**04.** Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, mostre que existe $c \in ]a, b[$, tal que $f'(c) = 0$.

(**Observação**: *O resultado acima é conhecido como* **TEOREMA DE ROLLE**)

**05.** Considere $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número $c \in ]-1, 1[$, satisfazendo $f'(c) = 0$. Isso contradiz o Teorema de Rolle ? Por que?

**06.** Prove que a equação $x^3 + x - 1$ tem exatamente uma raiz real.

(**Sugestão**: *Use, inicialmente, o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de uma raiz real para a equação. A unicidade dessa raiz será então obtida como conseqüência do Teorema de Rolle, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição*).

**07.** Prove que existe um único número real $x$, tal que $e^x + x = 0$.

**08.** Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f$ é diferenciável em $(a, b)$ e $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, mostre que $f$ é uma função constante.

(**Sugestão**: *Tome* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *e aplique o Teorema do Valor Médio à função* $f$ *no intervalo* $[x_1, x_2]$).

**09.** Mostre que $arctg\, x + arccotg\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

(**Sugestão**: *Mostre que a função* $f(x) = arctg\, x + arccotg\, x$ *é constante e, então, calcule* $f(1)$).

**10.** Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f$ é diferenciável em $(a, b)$ e $f'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante $c$, tal que, $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) = ce^x.$$

(**Sugestão**: *A função* $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ *é constante* ?).

**11.** Sejam $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ e funções contínuas. Se ambas são diferenciáveis em $(a, b)$ e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, mostre que essas funções diferem por uma constante, isto é,

$$f(x) = g(x) + c.$$

**12.** Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função $f$ que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

**13.** Mostre que $x < e^x$, para qualquer $x$ real.

(**Sugestão**: *Se* $x \leq 0$, *a desigualdade é claramente verdadeira. Se* $x > 0$, *verifique que a função* $f(x) = e^x - x$ *é crescente e, então, calcule* $f(0)$).

**14.** Mostre que $\ln x < x$, para todo $x > 0$.

(**Sugestão**: *Use o resultado do exercício anterior*).

**15. a)** Decida sobre a existência de máximos e mínimos locais e absolutos para a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

**b)** Calcule os valores máximo e mínimo de $f$ no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

**16. a)** Repita o exercício **15a)**, considerando a função $\varphi(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

**b)** Calcule os valores máximo e mínimo de $\varphi$ no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

**c)** Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 3]$.

**d)** Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$.

**e)** Repita o item **b)**, considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

**17.** Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos e mínimos locais e absolutos.

**a)** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$

**b)** $f(x) = xe^{-x}$

**c)** $f(x) = 3\cos(2x),\ x \in [0, \pi]$

**d)** $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\ ,\ x \in [-1, 1]$

**e)** $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$

**f)** $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}\ ,\ x \in [-1, 1]$

**18.** A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $x \in [0, 2]$, admite algum ponto de mínimo ou de máximo ?

**19.** Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$. Analise, ainda, o gráfico dessa função quanto à concavidade.

**20.** Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo.

**a)** $f(x) = x^3 - 3x$

**b)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

**c)** $f(x) = x^4 - x^3$

**d)** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

**e)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

**f)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

**g)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

**h)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 3}$

**i)** $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 9}$

**j)** $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

**k)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

**l)** $f(x) = e^{-x^2}$

**m)** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

**n)** $f(x) = x - \operatorname{sen} x$

**o)** $f(x) = xe^{-x}$

**p)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

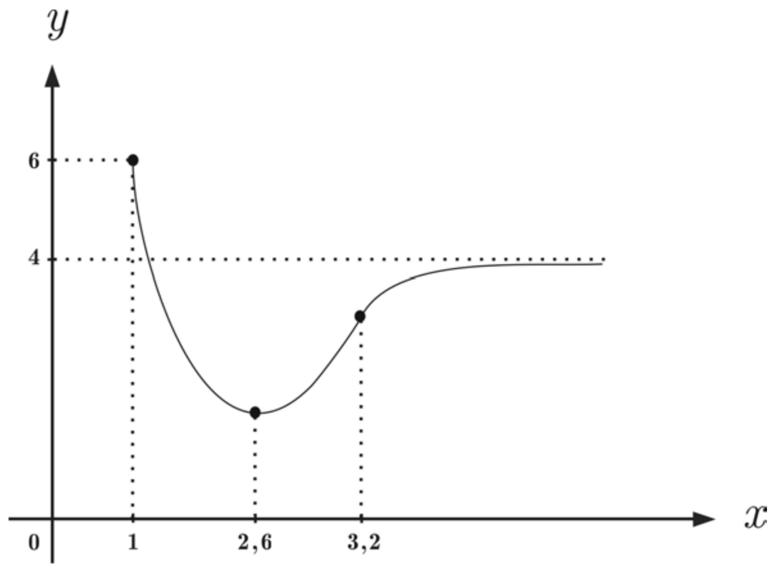
**21.** Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de uma função $y = f(x)$.

**a)** Para quais valores de $x$, $f$ é crescente ? E decrescente ?

**b)** Essa função possui pontos de máximo e de mínimo ?

**c)** Essa função possui ponto de inflexão ?

**c)** O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$ ?

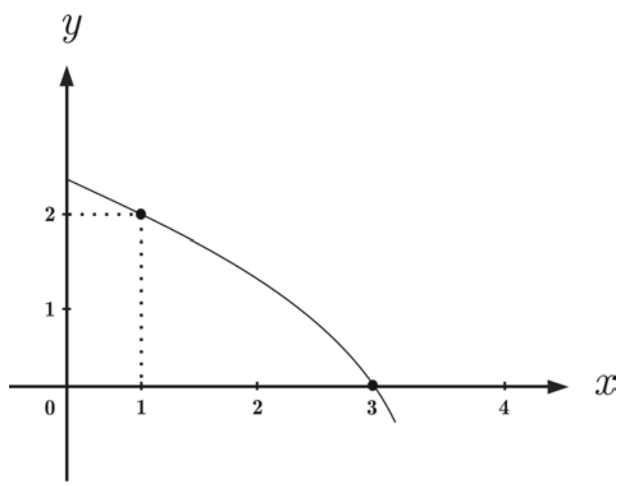



**22.** Suponha que a figura ao lado corresponda ao gráfico de $y = f'(x)$, sendo $f'$ a derivada de uma função $f$.

**a)** Qual a inclinação da tangente ao gráfico de $f$ em $x = 1$ ?

**b)** Com relação ao crescimento e à concavidade, descreva o gráfico de $f$ no intervalo [1, 2].

**c)** O gráfico de $f$ possui alguma tangente horizontal ?




**d)** A função $f$ possui algum ponto de máximo ou de mínimo local ?

**23.** Existe algum valor para $m$, de modo que a função $f(x) = mx - m^2 ln(1 + x^2)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local ?

**24.** Se $a^2 < 3b$, conclua que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui máximo nem mínimo.

**25.** Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível ?

**26.** Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem ?

(**Sugestão**: *Represente a distância de um ponto à origem pela expressão* $f(x, y) = d^2[(x, y), (0, 0)] = x^2 + y^2$).

**27.** Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$?

**28.** Mostre que de todos os retângulos com o mesmo perímetro $p$, o de maior área é um quadrado.

(**Sugestão**: *Observe que* $p = 2x + 2y$ *e que* $A = xy$).

**29.** Ache a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 2)$ e, no primeiro quadrante, forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

(**Sugestão**: *Supondo-se que a equação da reta seja* $y = ax + b$, *tem-se* $3a + b = 2$. *Como a área do triângulo vale*

$$\frac{base \times altura}{2},$$

*vê-se que o problema estará praticamente resolvido quando forem determinados os pontos* $x_o$ *e* $y_o$ *de acordo com a* **Figura 1**, *abaixo*).

**30.** Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio unitário, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo.

(**Sugestão**: *Analise a* **Figura 2**, *abaixo*).

**Figura 1**

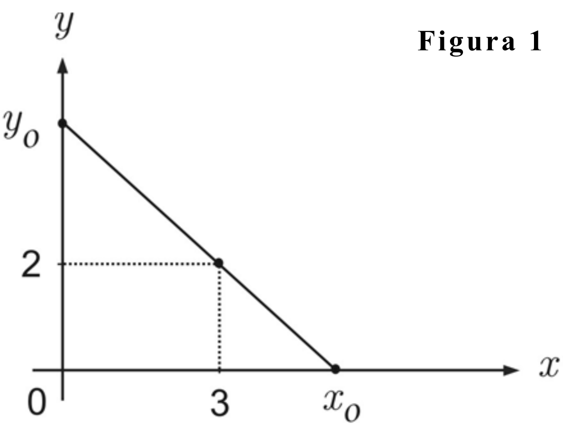
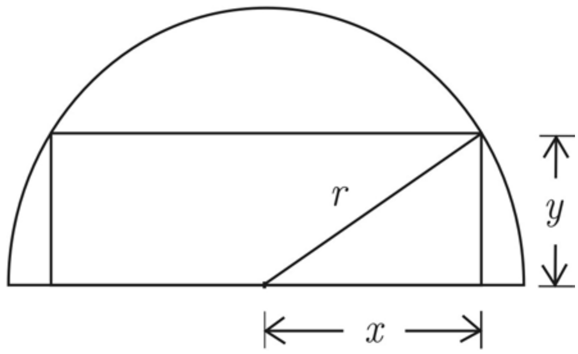
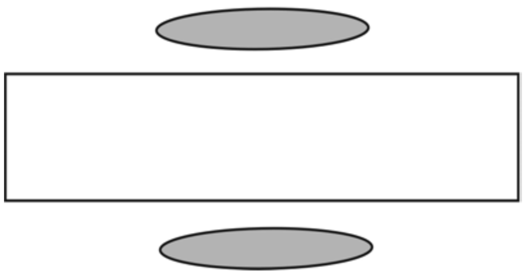



**Figura 2**




**31.** Você trabalha em uma indústria de embalagens de metal que acaba de ser a escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção ?


$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$V = 500 = \pi r^2 h$$



(**Sugestão**: *Note que o problema corresponde à minimização da área total da latinha, sabendo-se que seu volume é de 500ml. Veja a figura ao lado*).

**32.** Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde $q$ representa a quantidade produzida mensalmente.
Qual a produção que maximiza o lucro ? Qual é esse lucro máximo ?

**33.** Verifique que o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo possui pelo menos um tipo de assíntota.

**a)** $f(x) = x + \ln x$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

**c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

**d)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

**e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

**f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

**g)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

**h)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Nos exercícios **34** $\to$ **40**, calcule o limite de $f(x)$ conforme indicado.

**34.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x - 1}$ , $x \mapsto 1$

**35.** $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$, $x \mapsto 0_+$

**36.** $f(x) = x^{1/x}$, $x \mapsto +\infty$

**37.** $f(x) = (1 + x)^{1/x}$, $x \mapsto 0$

**38.** $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ , $x \mapsto +\infty$

**39.** $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$, $x \mapsto 0_+$

**40.** $f(x) = (1 - \cos x).\operatorname{cotg} x$ , $x \mapsto 0$