

- 36.** Para cada uma das funções f definidas abaixo, comprove a existência da função inversa g , determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce, ainda, o gráfico de f e o de g .

$$\mathbf{36a)} \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \geq 0 \quad \mathbf{36b)} \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \leq 0 \quad \mathbf{36c)} \quad f(x) = x^2 - 4, x \leq 0$$

$$\mathbf{36d)} \quad f(x) = x^2 - 4, x \geq 0 \quad \mathbf{36e)} \quad f(x) = -\sqrt{1-x}, x \leq 1 \quad \mathbf{36f)} \quad f(x) = \frac{x}{x+1}, x > -1$$

- 37.** Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis f_1 e f_2 , determinando, em seguida, as respectivas inversas g_1 e g_2 . Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções f_i e g_i , $i = 1, 2$, em cada caso.

$$\mathbf{a)} \quad y = x^2 - 2x - 3 \quad \mathbf{b)} \quad y = -x^2 + x + 2 \quad \mathbf{c)} \quad y = \sqrt{1-x^2} \quad \mathbf{d)} \quad y = -\sqrt{4-x^2}$$

- 38.** Verifique que a função $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, definida para todo x real, tem como

$$\text{inversa a função } x = g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ definida para } |y| < 1.$$

- 39.** Qual é a inversa da função $f(x) = \frac{1}{x}$? E da função $f(x) = \frac{x}{x+1}$? Especifique os domínios e as imagens, esboçando, também, os gráficos.

- 40.** Considere a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$, definida para $x \geq 1/2$, e seja $x = g(y)$ sua inversa.

a) Qual o domínio e qual a imagem de g ?

b) Sabendo-se que $g(-2) = 1$, calcule $g'(-2)$.

- 41.** Considere as funções $f(x) = \arctg x + \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = \arcsen x + \arccos x$, definidas, respectivamente, para $x > 0$ e para $x \in [-1, 1]$.

a) Mostre que $f'(x) = 0, \forall x > 0$, e que $g'(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$.

b) Lembrando que as funções constantes são as que possuem derivada nula, mostre que $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$, e que $g(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$.

- 42.** Se f é uma função derivável, tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = 1/2$, determine a equação da reta tangente à curva $y = \arctg(f(x))$, no ponto de abscissa $x = 2$.

- 43.** Sabendo-se que no ponto $(0, 1)$ o gráfico da função $f(x) = e^{x^2+2x}$ possui a mesma reta tangente que o de uma certa função g , determine $g'(0)$.

- 44.** Se f é uma função derivável, tal que $f'(x) = 2xf(x)$, mostre que a função g dada por $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2}}$ é constante.

45. Para cada uma das funções definidas abaixo, determine o domínio e calcule a derivada de primeira ordem.

45a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{5 - x^2}\right)$

45b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

45c) $f(x) = x \ln x - x$

45d) $f(x) = \ln|x|$

45e) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

45f) $f(x) = \ln(\ln x)$

45g) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2-x}{3-x}}\right)$

45h) $f(x) = \ln(\cos(3x+5))$

45i) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x+3))$

46. Considere a função $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) Qual é o domínio de f ?

b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa -1 ?
E no ponto de abscissa 0 ?

47. O *logaritmo* de um número $N > 0$, numa base $0 < b \neq 1$, é definido por meio da equivalência

$$\log_b N = a \Leftrightarrow b^a = N.$$

a) Prove a propriedade de Mudança de Base: $\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}$.

b) Se f é a função definida por $f(x) = \log_b x$, para $x > 0$, mostre que $f'(x) = \frac{1}{x \ln b}$.

48. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

48a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

48b) $f(x) = e^{x^2}$

48c) $f(x) = (e^x)^2$

48d) $f(x) = 3^{-x}$

48e) $f(x) = x^x$

48f) $f(x) = x^{(x^x)}$

48g) $f(x) = (x^x)^x$

48h) $f(x) = x^2 3^{x \operatorname{sen} x}$

48i) $f(x) = 2^{x^x}$

49. As funções trigonométricas hiperbólicas – *seno hiperbólico*, *cosseno hiperbólico*, *tangente hiperbólica* e *cotangente hiperbólica* – denotadas, respectivamente, por senh , cosh , tgh e cotgh , são definidas pelas expressões abaixo:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Com base nessas definições, mostre que:

a) $(\operatorname{cosh} x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$

c) $(\operatorname{senh} x)' = \operatorname{cosh} x$

d) $(\operatorname{cosh} x)' = \operatorname{senh} x$

e) $(\operatorname{tgh} x)' = 1/(\operatorname{cosh} x)^2$

f) $(\operatorname{cotgh} x)' = -1/(\operatorname{senh} x)^2$

50. Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando $x \mapsto 0$.

a) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

b) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{3x}$

c) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x}$

e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

f) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x}$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}$

h) $f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)}$

i) $f(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} 2x)}{x \operatorname{sen} 3x}$

51. Uma partícula se move de modo que, no instante t , a distância percorrida é dada por $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$.

a) Encontre as expressões que fornecem a velocidade e a aceleração da partícula.

b) Em que instante a velocidade é zero?

c) Em que instante a aceleração é zero?

52. Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$. Sabendo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis, em que ponto da parábola elas deslocam-se à mesma taxa?

53. Um ponto move-se ao longo da curva $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, de tal modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3cm/s. Qual será a velocidade da ordenada y , quando $x = 2$ cm?

54. Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y será o triplo da velocidade da abscissa x ?

55. Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de 12,5 cm/s. Encontre a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atinge 10cm de comprimento.

56. Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce à razão de 2,5 cm/s. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede 7,5cm?

(Obs.: O volume de uma esfera de raio r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$)

57. Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y . Supondo-se que $x = 12$ e que θ decresce à razão de 1/30 rad/s, calcule $y'(t)$ quando $\theta = \pi/3$.

58. Uma escada de 8m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3m da parede?

- 59.** Uma viga medindo 30m de comprimento está apoiada numa parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de 0,5m/s. Qual será a taxa de variação da medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando o topo da viga estiver a uma altura de 18m?
- 60.** A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde P é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, V é o volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 3.000 N/m^2 , o volume é de 5 m^3 e está crescendo à taxa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Qual é a taxa de variação da pressão nesse instante?

