UFPB – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
4ª LISTA DE EXERCÍCIOS – PERÍODO 2005.1

1. Nos exercícios **1a)** $\to$ **1e)**, encontre a derivada da função dada, usando a definição.

1a) $f(x) = x^2 + 1$. **1b)** $f(x) = 2x^3$. **1c)** $f(x) = x^2 - 5$. **1d)** $f(x) = 2x^2 - 3x$.

1e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Considere f definida por $f(x) = \begin{cases} -x, & para\ x \le 0 \\ 2, & para\ x > 0 \end{cases}$.

a) Calcule $f'(-1)$ **b)** Existem $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$? **c)** f é derivável em $x = 0$?

3. Seja f a função dada por $f(x) = |x| + x$.

a) Existe $f'(0)$? **b)** Existe $f'(x)$ para $x \neq 0$? **c)** Como se define a função f'?

4. Nos exercícios **4a)** $\to$ **4c)**, investigue a derivabilidade da função dada no ponto indicado.

4a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & para\ x \le 0 \\ x, & para\ x > 0 \end{cases}$; $x = 0$. **4b)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & para\ 0 < x < 1 \\ 2x - 1, & para\ 1 \le x < 2 \end{cases}$; $x = 1$.

4c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & para\ 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), & para\ 1 \le x < 2 \end{cases}$; $x = 1$.

5. Existe algum ponto no qual a função $y = \left|x^2 - 4x\right|$ não é derivável?

6. Suponha que uma função f seja derivável em $x = 1$ e que $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$.

Quanto valem $f(1)$ e $f'(1)$?

7. Suponha que f seja uma função derivável em $\mathbb{R}$, satisfazendo $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(h)}{h} = 3$, determine $f(0)$ e $f'(x)$.

8. Encontre o valor de a e o de b, de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \le 1 \\ ax + b, & se\ x > 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$.

9. Nos exercícios **9a)** $\to$ **9c)**, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto cuja abscissa é fornecida.

9a) $f(x) = x^{2/3}$, $x = 8$. **9b)** $f(x) = x^{-3/4}$, $x = 16$. **9c)** $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 3$.

10. Qual é a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, com inclinação $m = -8$? Faça um gráfico.

11. Qual é a equação da reta normal à curva $y = \dfrac{-x^3}{6}$, com inclinação $m = \dfrac{8}{9}$?

12. Se y é a função dada por $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}\ , & para\ x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}\ , & para\ x \leq 2 \end{cases}$, encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de y, no ponto de abscissa $x = 2$.

13. Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função $y = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x + 2$.

14. Verifique que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no ponto de abscissa a, intercepta o eixo X no ponto $(2a, 0)$.

15. Determine as equações das retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

16. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2\ , & para\ x \leq 1 \\ 2, & para\ x > 1 \end{cases}$.

a) Esboce o gráfico de f. **b)** f é contínua em $x = 1$? **c)** f é derivável em $x = 1$?

17. Repita o exercício anterior, considerando agora a função f definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2\ , & para\ x \leq 1 \\ 1, & para\ x > 1 \end{cases}.$$

18. Considere a função $f(x) = x\,|x|$, definida para todo x em $\mathbb{R}$.

a) Existe $f'(0)$? **b)** Determine $f'(x)$ para $x < 0$ e para $x > 0$.

c) Esboce o gráfico de f e o de f'.

19. Se $y = x^2 - \sqrt{1 + u^2}$ e $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

20. Se $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, verifique que $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\,\dfrac{dy}{dx}$.

21. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, verifique que, $\forall t \in \mathbb{R}$, tem-se $\dfrac{dy}{dt} = -2xy^2\,\dfrac{dx}{dt}$.

22. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável até a segunda ordem. Se $y = x^3$, verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

23. Sabendo-se que $g(-1) = 2$, $f(2) = -3$, $g'(-1) = -\dfrac{1}{3}$ e $f'(2) = 6$, determine as equações das retas tangente e normal à curva $h(x) = f(g(x))$, em $x = -1$.

24. Se $h(x) = [f(x)]^3 + f(x^3)$, calcule $h'(2)$, sabendo que $f(2) = 1, f'(2) = 7$ e que $f'(8) = -3$.

25. Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

26. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

26a) $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$

26b) $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

26c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

26d) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

26e) $y = x\, arcsen\, x$

26f) $y = \dfrac{\left(x^2+1\right) arctgx - x}{2}$

26g) $y = e^x \cos x$

26h) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

26i) $y = \left(3 - 2 sen\, x\right)^5$

26j) $y = 2x + 5\cos^3 x$

26k) $y = \sqrt{\dfrac{3 sen\, x - 2\cos x}{5}}$

26l) $y = \sqrt{xe^x + x}$

26m) $y = \arccos\left(e^x\right)$

26n) $y = sen(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{5}\right) + tg\left(\sqrt{x}\right)$

26o) $y = \dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

26p) $y = arctg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

26q) $y = \ln(sen\, x)$

26r) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

27. Verifique que a função $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1-x)y$.

28. Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1+x+\ln x}$ é solução da equação $xy' = y\left(y\ln x - 1\right)$.

29. Se a e b são constantes quaisquer, verifique que a função $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ é solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$.

30. Se n é um número natural, qual é a derivada de ordem n da função $y = (ax+b)^n$?

31. Nos exercícios **31a)** $\rightarrow$ **31f)**, encontre $\dfrac{dy}{dx}$ em cada uma das equações que, implicitamente, definem y como função de x.

31a) $y^3 = x + y$

31b) $\sqrt{x+y} = \sqrt{y} + 1$

31c) $\dfrac{y}{x-y} + \dfrac{x}{y} = \sqrt{x}$

31d) $4\cos x\, sen\, y = 1$

31e) $xy = cotg\,(xy)$

31f) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

32. Determine as equações das retas tangente e normal à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, no ponto $P_0 = (3, 4)$.

33. Mesma questão anterior, considerando agora a hipérbole $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $P_0 = \left(-5, \dfrac{9}{4}\right)$.

34. Suponha que f seja uma função derivável em seu domínio D e que, para todo x em D, satisfaça $xf(x) + sen\left[f(x)\right] = 4$.

Se $x + \cos\left[f(x)\right] \neq 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{x + \cos\left[f(x)\right]}$.